Exercices Corrigés

Exercice 1: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

Solution: Si on note les événements,
D^i =« avoir un composant défectueux au $i^{ème}$ tirage ».
N^i =« avoir un composant normal au $i^{ème}$ tirage ».
1) $P(D^1D^2D^3)= P(D^1)P(D^2/D^1)P(D^3/D^1D^2) = (4/20)\times(3/19)\times(2/18)=0{,}0035$.

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2) =P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$
$=(4/5)^3 = 0{,}512$.

Exercice 2: Dans une usine, 3 machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions respectives suivantes: p_1=25%, p_2=35% et p_3=40%. On sait que le les taux de production de pièces défectueuses par les 3 machines sont respectivement de 10%, 5% et 1%.
On choisit au hasard une pièce dans un lot de pièces fabriquées par l'usine et on constate qu'elle est défectueuse.
Quelle est probabilité qu'elle soit fabriquée par la $3^{ème}$ machine?

Solution: Si on note les événements,
D =« la pièce est défectueuse».
M_i =« la pièce est fabriquée par la $i^{ème}$ machine ».
On a:
i) $P(M_1)=0{,}25$; $P(M_2)=0{,}35$ et $P(M_3)=0{,}4$.
ii) $P(D/M_1)=0{,}1$; $P(D/M_2)=0{,}05$ et $P(D/M_3)=0{,}01$.
Donc par le théorème de Bayes on calcule la probabilité a posteriori $P(M_3/D)$:

$$P(M_3/D)=\frac{P(M_3)P(D/M_3)}{\sum_{j=1}^{3}P(M_j)P(D/M_j)}=\frac{0{,}004}{0{,}0465}=0{,}086.$$

Exercice 3: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard 7 pièces avec remise dans ce lot.
Calculer la probabilité d'avoir 2 pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées.
Solution: Soit A l'événement "avoir une pièce défectueuse lors d'un tirage", d'où, P(A)=p=0,05.
Tirer 7 pièces avec remise revient à effectuer 7 expériences de Bernoulli indépendantes.
Soit X la v.a. associée au nombre de pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées. D'où, X~ B(7; 0,05).
Donc, DX={0, 1, 2, …, 7} et pour tout $k\in DX$ on a,
On calcule alors:

$$P(X=2)=C_7^2\,0{,}05^2\,0{,}95^5\approx 0{,}041$$

Exercice 4: On sait que 4% d'une population de 1000 personnes ont une maladie M. On choisit au hasard et sans remise un échantillon de 10 personnes dans cette population.
Calculer la probabilité d'avoir 1 seule personne malade dans l'échantillon.
Solution:
On a, N=1000 et p=0,04, donc $N_1=pN=40$ et $N_2=N-N_1=960$.
Soit X la v.a. associée au nombre de personnes malades parmi les 10 choisies. D'où, X~ H(1000; 10; 0,04).
Donc,
$DX=\{k\in\mathbf{N}: \sup(0; 10-960)\le k\le \inf(10; 40)\}$
$DX=\{k\in\mathbf{N}: 0\le k\le 10\}$
et pour tout $k\in DX$ on a,

$$P(X=k)=\frac{C_{40}^{k}\times C_{960}^{10-k}}{C_{1000}^{10}}.$$

i) Avec la loi exacte de X on a: (calcul fait par Excel)

$$P(X=1)=\frac{C_{40}^{1}\times C_{960}^{9}}{C_{1000}^{10}}\approx 0{,}2791.$$

ii) Le taux de sondage 10/1000=0,01<0,1, donc on peut utiliser l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale .
H(1000; 10; 0,04) ≈ B(10; 0,04).
D'où, on calcule une valeur approchée de P(X=1), par:

$$P(X=1)=C_{10}^{1}0{,}04^{1}0{,}96^{9}\approx 0{,}2770$$

Exercice 5: Le nombre de pannes d'une machine sur une période donnée suit une loi de Poisson. Sachant qu'en moyenne la machine fait 2 pannes par trimestre.
1) Calculer la probabilité de n'avoir aucune panne à un mois donné.
2) Calculer la probabilité d'avoir 4 pannes pendant une année.
Solution: Si l'unité de temps est le trimestre.
Soient les v.a. X, Y et Z associées respectivement au nombre de pannes de la machine pendant, un trimestre, un mois et une années. Donc,
X~ ***P***(2); Y~ ***P***(2/3) et Z~ ***P***(2×4)= ***P***(8).

1) $$P(Y=0)=\frac{e^{-(2/3)}\times(2/3)^{0}}{0!}=e^{-(2/3)}=0{,}513.$$

2) $$P(Z=4)=\frac{e^{-8}\times 8^{4}}{4!}\approx 0{,}0573.$$

Exercice 6: A l'entrée d'une station de train un marchand de journaux remarque qu'entre 8h et 9h en moyenne, une personne sur 10 achète un journal.
Sachant qu'ils passent 120 personnes entre 8h et 9h, et soit *X* la v.a. définie par :
X = « nombre de journaux vendus pendant cette période ».
1) Indiquer la loi de probabilité exacte de *X*.
2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de *X*
3) Calculer *P(X = 15)* par la loi exacte puis par la loi approximative.
Solution:
1)Les personnes achètent les journaux indépendamment les unes des autres. Donc d'après la définition de X on a:
X~B(120; 0,1).
2) On a n=120≥50 et p=0,1≤0,1; donc on peut utiliser l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson:
*B(120; 0,1) ≈ **P**(120×0,1) =**P**(12).*
3) Par la loi exacte on a: (calcul fait par Excel)

$$P(X=15)=C_{120}^{15}(0{,}1)^{15}(0{,}9)^{105}\approx 0{,}0742$$

Par la loi approximative on a:

$$P(X=15)\approx\frac{e^{-12}\times 12^{15}}{15!}\approx 0{,}0739.$$

Exercice 7: Une urne contient une proportion *p = 3/5* de boules blanches et une proportion *q=1-p* de boules noires.
On considère un tirage avec remise et on pose *X* : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir une boule blanche » et *Y* : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir 3 boules blanches ».
1) Quelle est la loi de *X* ? Calculer P(X=2).
2) Quelle est la loi de *Y* ? Calculer P(Y=5).
Solution: On a p=3/5=0,6 et q=0,4.
Le tirage étant avec remise, donc les tirages successifs sont indépendants.
D'où, d'après les définitions de X et Y on a:
1) X~ G(0,6), une loi géométrique de paramètre p=0,6 . $D_X=\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$,
$P(X=k)=0{,}6\times(0{,}4)^{k-1}$
Donc, $P(X=2)=0{,}6\times(0{,}4)^{1}=0{,}24.$

2) Y~ G(3; 0,6), une loi binomiale négative (ou loi de Pascal) de paramètres p=0,6 et m=3,
$D_Y=\{k\in\mathbb{N} : k\geq 3\}$ et pour tout $k\in D_Y$,

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{2}(0{,}6)^{3}(0{,}4)^{k-3}.$$

Donc,

$$P(Y=5)=C_{4}^{2}(0{,}6)^{3}(0{,}4)^{2}\approx 0{,}2074.$$

Exercice 8: On suppose que la durée de vie des ampoules électriques est une v.a.c. X de loi normale d'espérance $m = 1000$ heures et de variance $\sigma^2 = 10000$.
Calculer probabilité qu'une ampoule fonctionne:
1) entre 1000 et 1200 heures?
2) moins 750 heures?

Solution: On a, $X \sim N(1000; 100)$, car $\sigma = 100$,
donc $U = (X-1000)/100 \sim N(0; 1)$,

1) $$P(1000 \leq X \leq 1200) = \pi\left(\frac{1200-1000}{100}\right) - \pi\left(\frac{1000-1000}{100}\right) = \pi(2) - \pi(0).$$

Or, $\pi(2) = 0{,}9772$ et $\pi(0) = 0{,}5$, donc
$P(1000 \leq X \leq 1200) = 0{,}9772 - 0{,}5 = 0{,}4772$.

2) $$P(X \leq 750) = \pi\left(\frac{750-1000}{100}\right) = \pi(-2{,}5).$$

Or, $\pi(-2{,}5) = 1 - \pi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$.

Donc, $P(X \leq 750) = 0{,}0062$.

Exercice 9 : Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p ($0<p<1$).
On pose $Z = X+Y$ et $T = X-Y$.
1) Déterminer la loi de Z est la loi de T.
2) Déterminer la loi conjointe du couple(Z ; T).
3) Z et T sont-elles indépendantes ? Justifier la réponse.

Solution :
1) Loi de Z : $D_Z = \{0, 1, 2\}$
$P(Z=0) = P(X+Y=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) = P(X=0)P(Y=0) = (1-p)^2 = q^2$.
$P(Z=1) = P(X+Y=1) = P(X=1 \text{ et } Y=0) + P(X=0 \text{ et } Y=1) = P(X=1)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=1) = 2pq$.
$P(Z=2) = P(X+Y=2) = P(X=1 \text{ et } Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = p^2$.

$z \in D_Z$	0	1	2	Total
$P(Z=z)$	q^2	$2pq$	p^2	1

Loi de T : $D_T = \{-1, 0, 1\}$
$P(T=-1) = P(X-Y=-1) = P(X=0 \text{ et } Y=1) = P(X=0)P(Y=1) = pq$.
$P(T=0) = P(X-Y=0) = P(X=0 \text{ et } Y=0) + P(X=1 \text{ et } Y=1) = P(X=0)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) = p^2+q^2$.
$P(T=1) = P(X-Y=1) = P(X=1 \text{ et } Y=0) = P(X=1)P(Y=0) = pq$.

$t \in D_T$	-1	0	1	Total
$P(T=t)$	pq	p^2+q^2	pq	1

2) Loi conjointe de (Z ; T).

T \ Z	0	1	2	Loi marginale de T
-1	0	pq	0	pq
0	q^2	0	p^2	p^2+q^2
1	0	pq	0	pq
Loi marginale de Z	q^2	$2pq$	q^2	1

3) On a, $P(Z=0 ; T=-1) = 0$ et $P(Z=0)P(T=-1) = q^2pq \neq 0$, donc Z et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 10 : Soit X une v.a.d. telle que D_X= **N** (ensemble des entiers naturels) et la loi de probabilité de X, *P(X=n)=f(n)*, vérifie :

$$f(n) = \frac{2}{n} f(n-1), \qquad \forall n \in N^*.$$

Déterminer explicitement l'expression de *f.*

Solution :

On *pose f(0)=c*, d'où,

$$f(1) = \frac{2}{1}c; \quad f(2) = \frac{2}{2} f(1) = \frac{2^2}{1\times 2}c\,; \quad f(3) = \frac{2}{3} f(2) = \frac{2^3}{1\times 2\times 3}c; \cdots$$
$$f(n) = \frac{2}{n} f(n-1) = \frac{2^n}{n!}c; \ \cdots \ .$$

Or f(n) est une distribution de probabilité donc, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}c = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = ce^2 = 1\,.$$

D'où, $c= f(0)= e^{-2}$ et

$$P(X=n) = f(n) = \frac{e^{-2}2^n}{n!}, \qquad \forall n \in N.$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre λ=2

Exercice 11 : Une machine fabrique des pièces cylindriques caractérisées par leurs diamètres. Soit X la v.a.c. associée à la mesure des diamètres en centimètre, on suppose que X suit une loi normale générale d'espérance m et d'écart type σ.
Sachant que sur 50000 pièces fabriquées, on dénombre 16500 pièces dont le diamètre est inférieur à 1,6 cm et 5100 dont le diamètre est supérieur à 1,8 cm.
Déterminer l'espérance m et d'écart type σ.

Solution :

X~N(m; σ), E(X)= m et V(X)= σ^2.
P(X<1,6)=16500/50000 =0,33 et P(X>1,8)= 5100/50000 =0,102.

$$P(X<1{,}6) = P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}6-m}{\sigma}) = \pi(\frac{1{,}6-m}{\sigma}) = 0{,}33 < 0{,}5.\ Donc\ \frac{1{,}6-m}{\sigma} < 0$$
$$d'où,\ \pi(\frac{m-1{,}6}{\sigma}) = 1-\pi(\frac{1{,}6-m}{\sigma}) = 0{,}67,\ donc\ \frac{m-1{,}6}{\sigma} = 0{,}44\ \ (D'après\ la\ table\ de\ N(0;1).$$

$$P(X>1{,}8) = P(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1-P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1-\pi(\frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 0{,}102.$$

$$d'où,\ \pi(\frac{1{,}8-m}{\sigma}) = 1-0{,}102 = 0{,}898,\ donc\ \frac{1{,}8-m}{\sigma} = 1{,}27\ \ (D'après\ la\ table\ de\ N(0;1).$$

d'où on a le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1{,}8-m}{\sigma} = 1{,}27 \\ \dfrac{m-1{,}6}{\sigma} = 0{,}44 \end{cases}, \quad donc \quad \begin{cases} m = 1{,}651\ cm \\ \sigma = 0{,}117\ cm \end{cases}.$$