Exercices : Fonctions de deux variables

Exercice 1:

On considère le plan muni d'un repère orthonormal. Représenter graphiquement les ensembles de points suivant :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant x\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } y + x - 3 \leqslant 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } 3y + x - 12 \leqslant 0 \text{ et } 3x + y - 12 \leqslant 0\}$

Exercice 2:

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle continue en $(0,0)$?
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3:

Déterminer les domaines de définition respectifs des fonctions suivantes, puis déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de ces fonctions.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3y + y^2x}{x+y}$
2. $g(x,y) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$
3. $h(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+y^2-9}$
4. $k(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$
5. $l(x,y) = \sqrt{xy}$ (on précisera où a lieu l'existence des dérivées partielles)

Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Étudier l'existence et, le cas échéant calculer, les dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$.

Exercice 5:

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Déterminer le point critique de f et prouver que f atteint un minimum en ce point.

Exercice 6:

Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

Exercice 7:

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = x\left((\ln(x))^2 + y^2\right)$.
Déterminer le domaine de définition de f puis ses extremums locaux.

Exercice 8:

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum.

Exercice 9:

On considère, sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, la fonction g définie par : $g(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ dont on précisera la nature.

Exercice 10:

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[,\ f(x, y) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{x + y}$$

1. Calculer, pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0, 1[\times]0, 1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3. Montrer que f admet en I un minimum local.

Exercice 11:

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6)$$

1. Montrer que $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont des points critiques de F.
2. Est-ce que F présente un extremum local au point $(4, 2)$?
3. Est-ce que F présente un extremum local au point $(2, 3)$?

Exercice 12:

1. On considère l'application g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une unique solution, notée α, et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
2. On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $F(x, y) = xe^y + y\ln(x)$.
   a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
   b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.
   c) Est-ce que F admet un extremum local ?

Correction

Exercice 1:

Dessins trop longs à faire sur l'ordinateur

Exercice 2:

Idée : afin d'étudier la continuité d'une fonction de deux variables nous avons deux méthodes : pour montrer que f est continue en (x_0, y_0) on calcul $|f(x,y) - f(x_0, y_0)|$ et on essaye de majorer cette quantité par quelque chose qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \to (x_0, y_0)$; pour montrer que f n'est pas continue en (x_0, y_0) on trouve des couples (x,y) particuliers, qui tendent vers (x_0, y_0) mais tels que $f(x,y)$ ne tend pas vers $f(x_0, y_0)$.

1. On a $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Or on remarque par exemple que $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{y^2} = |y|$. Donc on a $|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \dfrac{|xy|}{|y|} = |x|$.
   Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$ on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(0,0)$.
2. On remarque que $f(x,x) = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2}|x|}$.
   Si $x > 0$, $f(x,x) = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \sqrt{2} \neq f(0,0)$.
   f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3:

1. $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \neq 0\}$. Sur ce domaine f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y+y^2)(x+y) - (x^3y+y^2x)}{(x+y)^2} = \frac{2x^3y+3x^2y^2+y^3}{(x+y)^2}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3+2xy)(x+y) - (x^3y+y^2x)}{(x+y)^2} = \frac{x^4+2x^2y+xy^2}{(x+y)^2}$$
2. $\mathcal{D}_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x}{y} > -1 \text{ et } y \neq 0\right\}$. Sur ce domaine g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1/y}{1+x/y} = \frac{1}{x+y}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-x/y^2}{1+x/y} = \frac{-x}{y(x+y)}$$
3. $\mathcal{D}_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } x^2+y^2 \neq 9\}$. Sur ce domaine h est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1/x(x^2+y^2-9) - \ln(x) \times 2x}{(x^2+y^2-9)^2} = \frac{x^2+y^2-9-2x^2\ln(x)}{x(x^2+y^2-9)^2}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y\ln(x)}{(x^2+y^2-9)^2}$$

4. $\mathcal{D}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$. Sur ce domaine k est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus :
$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$$
5. $\mathcal{D}_l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geqslant 0\}$. Comme la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, la fonction l ne sera pas dérivable sur tout son domaine de définition. Sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ k est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus :
$$\frac{\partial l}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

Exercice 4:

1. Les fonctions $(x,y) \to x^3y$ et $(x,y) \to x^2+y^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car ce sont des fonctions polynomiales et $(x,y) \to x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc par quotient, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   De plus $|f(x,y) - f(0,0)| = \dfrac{|x^3y|}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{|x^3y|}{x^2} = |xy|$. Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$.

   $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^2.}$

2. • Par le même raisonnement que précédemment, f est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - x^3y \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2) - x^3y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

   • Existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

   – On a $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$. Donc $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ admet une limite finie en 0, ce qui signifie que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

   – On a $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$. Donc $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ admet une limite finie en 0, ce qui signifie que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   • Continuité des dérivées partielles en $(0,0)$:

   – $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{3|x^2y|}{x^2+y^2} \leqslant 3|y|$ donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   – $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|x^3|}{x^2+y^2} \leqslant |x|$ donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. • Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$:

   $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 0$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

• Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$:

$\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

• Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$:

$\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$

• Existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$:

$\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 0$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$

Exercice 5:

1. f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x - 6y + 2$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x + 4y - 2$$

2. • Pour trouver le ou les points critiques de f il faut résoudre :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x - 6y + 2 = 0 \\ -6x + 4y - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

Donc f admet un unique point critique, le point $(1,2)$.

• Pour déterminer si f admet un extremum local en ce point nous allons utiliser les notations de Monge. Pour cela nous avons besoin des dérivées partielles d'ordre 2 de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 10 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6$$

Au point $(1,2)$ on a donc $r = 10$, $s = -6$ et $t = 4$ donc $s^2 - rt = 36 - 40 = -4 < 0$ et comme $r > 0$, $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (1,2).}$

Exercice 6:

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ nous allons utiliser les notations de Monge.

• Points critiques :

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2 - y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy - x$ donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y(2x + y - 1) = 0 \\ x(x + 2y - 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \text{ ou } 2x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

f admet 4 points critiques $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

• Notations de Monge :

Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x+2y-1$$

– En $(0,0)$: $r=0$, $s=-1$ et $t=0$. Donc $s^2-rt=1>0$.
  f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
– En $(0,1)$: $r=2$, $s=1$ et $t=0$. Donc $s^2-rt=1>0$.
  f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.
– En $(1,0)$: $r=0$, $s=1$ et $t=2$. Donc $s^2-rt=1>0$.
  f n'admet pas d'extremum local en $(1,0)$.
– En $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$: $r=\frac{2}{3}$, $s=\frac{1}{3}$ et $t=\frac{2}{3}$. Donc $s^2-rt=-\frac{1}{3}<0$.
  Comme $r>0$, f admet un minimum local en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 7:

Le seul calcul pouvant poser problème dans le calcul de $f(x,y)$ est le calcul de $\ln(x)$ donc on a $\mathcal{D}_f=]0;+\infty[\times\mathbb{R}$.

Sur ce domaine de définition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc nous allons utiliser les notations de Monge pour trouver les extremums locaux de f.

• Points critiques :

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(\ln(x))^2+y^2+2\ln(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy$ donc :

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\ln(x))^2+y^2+2\ln(x)=0\\ 2xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\ln(x))^2+2\ln(x)=0\\ y=0 \text{ car on sait que } x\neq 0\end{cases}$$

Or on a $(\ln(x))^2+2\ln(x)=0\Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)+2)=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=e^{-2}$

f admet 2 points critiques $(1,0)$, $(e^{-2},0)$.

• Notations de Monge :

Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{x}\ln(x)+\frac{2}{x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2y$$

– En $(1,0)$: $r=2$, $s=0$ et $t=2$. Donc $s^2-rt=-4<0$.
  Comme $r>0$, f admet un minimum local en $(1,0)$.
– En $(e^{-2},0)$: $r=-2e^2$, $s=0$ et $t=2e^{-2}$. Donc $s^2-rt=4>0$.
  f n'admet pas d'extremum local en $(e^{-2},0)$.

Exercice 8:

1. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(y-2x^2y)e^{-(x^2+y^2)}=y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$
$$\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

2. <u>Points critiques :</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}=0 \\ x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ou } 1-2x^2=0 \\ x=0 \text{ ou } 1-2y^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ 1-2y^2=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1-2x^2=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1-2y^2=0 \\ 1-2x^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2=\dfrac{1}{2} \\ x^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

f admet 5 points critiques $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ nous allons utiliser les notations de Monge.
Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2xy(2x^2-3)e^{-(x^2+y^2)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2xy(2y^2-3)e^{-(x^2+y^2)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=(1-2y^2)(1-2x^2)e$$

- En $(0,0)$: $r=0$, $s=1$ et $t=0$. Donc $s^2-rt=1>0$.
  f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
- En $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $r=-2e^{-1}$, $s=0$ et $t=-2e^{-1}$. Donc $s^2-rt=-4e^{-2}<0$.
  Comme $r<0$, f admet un maximum local en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- En $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $r=2e^{-1}$, $s=0$ et $t=2e^{-1}$. Donc $s^2-rt=-4e^{-2}<0$.
  Comme $r>0$, f admet un minimum local en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- En $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $r=2e^{-1}$, $s=0$ et $t=2e^{-1}$. Donc $s^2-rt=-4e^{-2}<0$.
  Comme $r>0$, f admet un minimum local en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- En $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $r=-2e^{-1}$, $s=0$ et $t=-2e^{-1}$. Donc $s^2-rt=-4e^{-2}<0$.
  Comme $r<0$, f admet un maximum local en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 9: ECRICOME 2007

1. Les dérivées partielles d'ordre 1 sont

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}(1+y)\left[-\frac{1}{x^2}(1+x)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]=\frac{1}{2}(1+y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{et}\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}(1+x)\left[-\frac{1}{y^2}(1+y)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]=\frac{1}{2}(1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)$$

Et les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1+y}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{1+x}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)$$

2. Comme g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ nous allons utiliser les notations de Monge pour trouver les extremums locaux de g.
   • Points critiques :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}(1+y)\dfrac{x^2-y}{x^2y}=0 \\ \dfrac{1}{2}(1+x)\dfrac{y^2-x}{xy^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+y=0 \text{ ou } x^2-y=0 \\ 1+x=0 \text{ ou } y^2-x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ x=-1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ y^2-x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x^2-y=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ x=y^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ x=x^4 \end{array}\right. \text{ car on cherche les points critiques dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x^2 \\ x=0 \text{ ou } x^3=1 \end{array}\right.$$

   On sait que l'on veut $x \neq 0$ et de plus, comme la fonction cube est bijective, on a $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
   Sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, g n'admet donc qu'un seul point critique, le point $(1,1)$.
   • Notations de Monge :
   Au point $(1,1)$ on a $r = 2$, $s = -1$ et $t = 2$ donc $s^2 - rt = -3 < 0$.
   Comme $r > 0$, g admet un minimum local en $(1,1)$.

Exercice 10: EML 2004

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{(1-y)^2} - \dfrac{1}{(x+y)^2}$
2. Cherchons les points critiques de f :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}=0 \\ \dfrac{1}{(1-y)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)^2-(1-x)^2=0 \\ (x+y)^2-(1-y)^2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (y+1)(2x+y-1)=0 \\ (x+1)(x+2y-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \text{ car } y\neq -1 \\ x+2y-1=0 \text{ car } x \neq -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

   Donc le seul point de $]0;1[^2$ où f est susceptible de présenter un extremum est $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
3. Utilisons maintenant les notations de Monge. Pour cela nous avons besoin des dérivées secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{(x+y)^3}$$

   Donc en I, $r = \dfrac{27}{2} = t$ et $s = \dfrac{27}{4}$ et donc $s^2 - rt = \dfrac{27^2}{2^2}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) < 0$ et comme $r > 0$, f admet bien un minimum local en I.

Exercice 11: EML 2006

1. Calculons tout d'abord les dérivées partielles de F. Comme F est polynomiale, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (y-2)(x+y-6)+(x-1)(y-2)$
$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (x-1)(x+y-6)+(x-1)(y-2)$
Ainsi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(4,2)=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(4,2)=0$ donc $(4,2)$ est bien un point critique et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(2,3)=-1+1=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,3)=-1+1=0$ donc $(2,3)$ est bien un point critique.
2. Nous allons utiliser ici les notations de Monge car F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc nous avons besoin de calculer les dérivées secondes de F.
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2(y-2)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2(x-1)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x+2y-9$$
Donc au point $(4,2)$, $r=0$, $t=6$ et $s=1$. Ainsi $s^2-rt=1>0$ et donc F n'admet pas d'extremum local en $(4,2)$.
3. Au point $(2,3)$, $r=2$, $t=2$ et $s=1$. Donc $s^2-rt=-3<0$ et $r>0$ donc F admet un minimum local en $(2,3)$.

Exercice 12: EML 2007

1. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$. Donc sur $]0;+\infty[$, $g'(x)>0$ et donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
g étant continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[)=]\lim\limits_{0} g;\lim\limits_{+\infty} g[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.
Comme $0\in\mathbb{R}$, il admet un unique antécédent $\alpha\in]0;+\infty[$ par g, c'est-à-dire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.
De plus $g(1/2)=\dfrac{1}{4}-\ln 2<0$ car $\ln 2\approx 0,7$ et $g(1)=1>0$ donc $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.
2. a) Les fonctions $(x,y)\to x$, $(x,y)\to e^y$, $(x,y)\to y$ et $(x,y)\to \ln(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ donc par produit et somme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. De plus :
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=e^y+\frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=xe^y+\ln(x)$$
   b) On cherche à résoudre :
$$\begin{cases} e^y+\dfrac{y}{x}=0 \\ xe^y+\ln(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y=-\dfrac{y}{x} \\ -y+\ln(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\ln(x)}{x} \\ y=\ln(x) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)+x^2=0 \\ y=\ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\ln(\alpha) \end{cases}$$
Donc l'unique point critique de F est $(\alpha,\ln(\alpha))$.

c) Avec le même raisonnement que précédemment, on voit que F est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$. Nous allons donc utiliser les notations de Monge pour savoir si F admet un extremum local.
Les dérivées partielles d'ordre 2 de F sont

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = xe^y \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y + \frac{1}{x}$$

Donc au point $(\alpha, \ln(\alpha))$, on a $r = -\dfrac{\ln(\alpha)}{(\alpha)^2}$, $s = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ et $t = \alpha^2$.
On a donc $s^2 - rt = 2 + \dfrac{1}{\alpha^2} > 0$ et ainsi F n'admet pas d'extremum local en $(\alpha, \ln(\alpha))$.