

mémento de mathématiques pour les ECE1

Abdellah Bechata

Résumé

L'objectif de ce mémento est de permettre aux élèves de première année des classes préparatoires aux Ecoles de Commerces, option économique, d'avoir un résumé complet et compact du cours de mathématiques. Il ne peut être en aucun cas un remplaçant du cours mais seulement un complément (le cours permettant la lecture des preuves, l'utilisation d'exemples, de contre-exemples, de remarques, etc., ce que ne permet pas le mémento). Son seul (et essentiel) intérêt réside dans la possibilité d'obtenir rapidement un ou plusieurs théorèmes et autres définitions, afin de se rafraîchir la mémoire lors de la résolution d'un exercice, la préparation d'un devoir ou de la révision en vue des concours.

J'espère qu'il répondra efficacement à ce besoin. Pour ce faire, j'ai décidé d'introduire une table des matières et les différents types d'information (définitions, lemmes, propositions, théorèmes, méthodes, etc.) disposent de présentations visuelles clairement distinctes afin d'accélérer la recherche d'information.

Si vous avez de remarques ou critiques à faire sur ce travail, n'hésitez pas à m'en faire part en m'envoyant un mail. Pour cela, accéder à mon site web www.mathematiques.fr.st et cliquer sur "vos commentaires" en bas de la barre de gauche.

Table des matières

1 Outils élémentaires de mathématiques	3
2 Généralités sur les fonctions	5
3 Limites	7
4 Comparaison locale des fonctions	9
5 Continuité	12
6 Dérivabilité.	13
7 Théorèmes de bijection	15
8 Fonctions de classe C^k.	15
9 Intégration	17
10 Suites réelles	20
10.1 Généralités sur les suites	20
10.2 Comparaison des suites	22
10.3 Plan d'études des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$	23
11 Séries numériques	24
12 Fonctions numériques de deux variables réelles	25
12.1 Le plan \mathbb{R}^2	25
12.2 Fonctions numériques de deux variables réelles	26
13 Systèmes d'équations linéaires	28
14 Matrices	30
14.1 Généralités sur les matrices	30
14.2 Matrices carrés	32
14.3 Matrices inversibles	33
14.4 Systèmes linéaires et matrices	34
15 Dénombrement	35
16 Probabilités sur un ensemble fini	37
16.1 Généralités	37
16.2 Probabilités conditionnelles	39
17 Variables et vecteurs aléatoires finies	40
17.1 Généralités	40
17.2 Moments d'une var finie	42
17.3 Couple de variables aléatoires	44
17.4 Indépendances de deux variables	44
18 Lois discrètes finies usuelles	45
19 Probabilités sur un ensemble discret dénombrable	47
20 Variables et vecteurs aléatoires discrètes dénombrables	48
20.1 Généralités	48
20.2 Moments d'une var discrète infinie	49
20.3 Loi d'un vecteur aléatoires discrets infinis	50
20.4 Indépendances de deux var	51
21 Lois discrètes infinies usuelles	52

1 Outils élémentaires de mathématiques

Le symbole \forall signifie "pour tout (tous)" et le symbole \exists "il existe".

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des nombres naturels c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- \mathbb{Z} désigne l'ensemble des nombres relatifs c'est-à-dire des entiers naturels ainsi que leurs opposés.
- \mathbb{Q} désigne l'ensemble des nombres rationnels c'est-à-dire des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers relatifs.
Par exemple : $\frac{2002}{2003}$ appartient à \mathbb{Q} , par contre $\frac{\sqrt{2}}{3}$ n'est pas un nombre rationnel car $\sqrt{2}$ n'est pas un entier relatif.
- \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels c'est-à-dire de tous les nombres que vous avez rencontré dans votre scolarité. Par exemple : $2, -13, \frac{2002}{2003}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \pi, e^6$ etc.

Définition :

Soient E un ensemble, A, B deux sous-ensembles de E et x un élément de E . On note

- $x \in A$ si l'élément x appartient à A .
- $x \notin A$ si l'élément x n'appartient pas à A .
- $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B c'est-à-dire $x \in A$ alors $x \in B$.
- $A \subsetneq B$ s'il existe un élément y de A qui ne soit pas un élément de B c'est-à-dire il existe $y \in A$ tel que $y \notin B$.

L'ensemble noté \emptyset est appelé ensemble vide et est constitué d'aucun élément.

Définition :

Une application f est la donnée de deux ensembles A et B et d'une correspondance qui à tout élément x de A associe un élément de B qui est traditionnellement noté $f(x)$.

L'application f se note $f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, $x \xrightarrow{f} f(x)$.

L'ensemble A est appelé l'ensemble de départ de f et B est l'ensemble d'arrivée de f .
 $f(x)$ se nomme l'image de f par x et si $b = f(a)$ on dit que a est un antécédent de b par f .

Définition :

Soient une application $f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$, X un sous-ensemble de A et Y un sous-ensemble de B .

- $f(X) = \{f(x), x \in X\}$ désigne l'ensemble image direct de X par f . Il s'agit de l'ensemble des images de tous les éléments de X par f .
- $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid \text{tel qu'il existe } b \in Y \text{ avec } f(a) = b\}$ désigne l'image réciproque de Y par f . Il s'agit de l'ensemble des antécédents de tous les éléments de Y par f .

Définition :

Soit n et m deux entiers. On désigne par $\llbracket n, m \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre n et m .

Lemme :

Il y a n nombre entier dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ et plus généralement, il y a $n - m + 1$ entier dans l'ensemble $\llbracket n, m \rrbracket$.

Définition :

Soient a_0, a_1, \dots, a_n ($n+1$) nombres réels.

La notation symbolique $\sum_{k=0}^n a_k$ désigne la somme $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ et elle se prononce "somme de $k = 0$ à n des a_k ".

Plus généralement, si a_n, a_{n+1}, \dots, a_m sont des nombres réels.

La notation symbolique $\sum_{k=n}^m a_k$ désigne la somme $a_n + a_{n+1} + \dots + a_m$ et elle se prononce "somme de $k = n$ à m des a_k ".

Remarque :

"L'entier" k est ce que l'on appelle l'indice de sommation de la somme $\sum_{k=0}^n a_k$. Il s'agit d'une variable muette c'est-à-dire que l'on peut la noter k, j, α ou encore à l'aide de toute lettre que l'on souhaite. Par exemple, en utilisant la définition du symbole Σ , il est immédiat que $\sum_{k=l}^n a_k = \sum_{j=l}^n a_j = \sum_{\alpha=l}^n a_\alpha$. ■

Lemme :

Soient n, m deux entiers et a_n, a_{n+1}, \dots, a_m et b_n, b_{n+1}, \dots, b_m des nombres réels. Alors on a

- $\sum_{k=n}^m (a_k + b_k) = \sum_{k=n}^m a_k + \sum_{k=n}^m b_k.$
- $\sum_{k=n}^m (a_k - b_k) = \sum_{k=n}^m a_k - \sum_{k=n}^m b_k.$
- Pour tout nombre réel λ , $\sum_{k=n}^m \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n}^m a_k.$
- Relation de Chasles.** Pour tout entier positif l , on a : $\sum_{k=n}^{m+l} a_k = \sum_{k=n}^m a_k + \sum_{k=m+1}^l a_k.$

Remarque :

Dans la formule de factorisation 3, il faut comprendre que λ ne doit pas dépendre de l'indice de sommation (ici il s'agit de k). Par contre, il peut très bien dépendre d'autres paramètres (n, m, a, \dots) . ■

Proposition (Sommes remarquables) :

Soit n un entier positif. Alors on a les égalités suivantes :

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
- Pour tout nombre réel q différent de 1, on a $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Proposition (Changement de variable) :

Soient l, n, m des entiers et $a_{n+l}, a_{n+l+1}, \dots, a_{m+l}$ des nombres réels.

Alors $\sum_{k=n}^m a_{k+l} = \sum_{k=n+l}^{m+l} a_k$ (on dit que l'on a fait le changement de variable $j = k + l$).

Exemple : Simplifier $\sum_{k=4}^{10} \frac{k^2 + k - 2}{k - 2}$ en utilisant le changement de variable $j = k - 2$.

On adopte la méthode mnémotechnique suivante : On pose $j = k - 2$ alors $k = j + 2$, ce qui nous donne

$$\frac{k^2 - k - 2}{k - 2} = \frac{(j+2)^2 - (j+2) - 2}{j} = \frac{j^2 + 3j}{j} = j + 3.$$

D'autre part, quand $k = 4$, alors $j = 2$ et quand $k = 10$ alors $j = 8$ donc $\sum_{k=4}^{10} \frac{k^2 + k - 2}{k - 2} = \sum_{j=2}^8 (j + 3)$

Théorème (Principe de récurrence) :

Soit n_0 un entier positif. Supposons avoir défini pour tout entier $n \geq n_0$, une propriété \mathcal{P}_n .

Si \mathcal{P}_{n_0} est vraie et si $\forall n \geq n_0$, \mathcal{P}_n est vraie implique \mathcal{P}_{n+1} alors $\forall n \geq n_0$ la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

Remarque :

La propriété \mathcal{P}_n se nomme la propriété \mathcal{P} au rang n . La vérification de la véracité de \mathcal{P}_{n_0} s'appelle l'initialisation de la récurrence. ■

Exemple : Montrer que $\forall n \geq 0$, $2^n \geq n + 1$. On pose \mathcal{P}_n : " $2^n \geq n + 1$ ".

Initialisation : $n = 0$. $2^0 = 1 \geq 0 + 1$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

Supposons que \mathcal{P}_n soit vraie. Nous devons prouver que \mathcal{P}_{n+1} , c'est-à-dire que $2^{n+1} \geq n+2$.
 $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc $2^{n+1} \geq 2(n+1) = 2n+2$. Or $2n+2 - (n+2) = n \geq 0$ donc $2n+2 \geq n+2$. Par conséquent $2^{n+1} \geq n+2$, ce qui démontre que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Ainsi \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier n positif.

2 Généralités sur les fonctions

Définition (Extrema) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit qu'un nombre M majore la fonction f sur I lorsque $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
 On dit qu'un nombre m mineure la fonction f sur I lorsque $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
 Dans ce cas on dit que M (resp. m) est un majorant (minorant) de f sur I .
 Il est utile de remarquer que M et m soient indépendants de x .
- Si f est majorée sur I , le plus petit des majorants est noté $\sup_{x \in I} f(x)$.
 Si f est minorée sur I , le plus grand des minorants est noté $\inf_{x \in I} f(x)$.
- On dit que f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I .
- S'il existe un élément $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \sup_{x \in I} f(x)$, on dit que x_0 est un point où se réalise le maximum de f sur I .
 S'il existe un élément $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x)$, on dit que x_0 est un point où se réalise le minimum de f sur I .
 Un extrema de f est un point x_0 où f est maximale ou minimale.

Définition (Parité) :

On dit que f (dont le domaine de définition est \mathcal{D}_f) est

- paire si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- impaire si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Définition (Valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x , le réel égal à la distance de x à 0, autrement dit

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposition :

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est une fonction paire et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |xy| = |x| |y|, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Définition (Puissances entières) :

Soit x un nombre réel et n un entier positif, on pose

$$x^0 = 1, \quad x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Proposition :

Quels que soient les entiers relatifs n, m et quels que soient les réels non nuls x, y , on a :

$$x^n \times x^m = x^{n+m}, \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n, \quad (x^n)^m = x^{n \times m}, \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Proposition :

Si n est un entier relatif, la fonction $x \mapsto x^n$ est C^∞ sur son domaine de définition et $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Définition (Logarithme népérien) :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc elle admet une unique primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Cette primitive s'appelle la fonction logarithme népérien et se note $x \mapsto \ln x$.

Puisque $1 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]0, 1[$ tel que $\ln x = 1$. Ce réel se note e et $e \simeq 2.718$.

Proposition :

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur l'intervalle \mathbb{R}_+^\times , $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
2. La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^\times , de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^\times et sa dérivée est $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^\times$, on a

$$\begin{aligned} \ln(x \times y) &= \ln x + \ln y & \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln x - \ln y & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln x^\alpha &= \alpha \ln x \\ \ln x = \ln y &\Leftrightarrow x = y & \ln x < \ln y &\Leftrightarrow x < y \end{aligned}$$

Définition (Exponentielle) :

La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+^\times sur \mathbb{R} donc elle admet une réciproque notée $x \mapsto e^x$ (ou $\exp(x)$).

Proposition :

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur \mathbb{R} , strictement croissante, C^∞ sur \mathbb{R} et sa dérivée est $(e^x)' = e^x$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x e^y & \frac{e^x}{e^y} &= e^{x-y} & \forall \alpha \in \mathbb{R}, (e^x)^\alpha &= e^{\alpha x} \\ e^x = e^y &\Leftrightarrow x = y & e^x < e^y &\Leftrightarrow x < y \end{aligned}$$

3. On a également les relations suivantes liant l'exponentielle et le logarithme :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y &= \ln x \Leftrightarrow x = e^y \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) &= x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad e^{\ln x} &= x \end{aligned}$$

Définition (Puissances réelles) :

Soit α un nombre réel. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}_+^\times par : $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Proposition :

Pour tous les réels α, β et tous les réels non nuls x, y , on a :

$$x^0 = 1, \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \times \beta}, \quad x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha + \beta}, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha - \beta}, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha, \quad \frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$

Définition (Fonctions polynômes) :

On appelle fonction polynôme (ou simplement polynôme) toute fonction numérique définie sur \mathbb{R} et de la forme

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont des nombres réels et n désigne un entier positif.

Si k est un entier compris entre 0 et n , le réel a_k s'appelle le coefficient de x^k du polynôme P .

Si $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme P est de degré n et on note $\deg P = n$. Dans ce cas, le réel a_n s'appelle le coefficient dominant de P .

Si tous les coefficients sont nuls, on dit que P est le polynôme nul. Le polynôme nul ne possède pas de degré.

Un monôme est un polynôme de la forme $x \mapsto a_k x^k$.

L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{R}[X]$ et l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n se note $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et que tous leurs coefficients sont égaux. Pour tous polynômes P, Q , on a : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Définition :

Soient A et $B \in \mathbb{R}[X]$. On dit que B divise A et on le note $B \mid A$ si et seulement si il existe un polynôme $C \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BC$. Cela est équivalent (lorsque $B \neq 0$) à ce que le reste de la division euclidienne de A par B soit nul.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit a est un zéro de P ssi $P(a) = 0$.

Proposition :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors a est un zéro de P ssi $(x - a) \mid P$.

Remarque :

Si a est un zéro de P , la proposition précédente montre qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (x - a)Q$. On détermine Q en effectuant la division euclidienne de P par $(x - a)$. En recherchant de nouveau une racine évidente pour Q , on en déduit une factorisation de Q donc de P de la forme $P = (x - a)(x - b)R$. En poursuivant ce processus, on peut factoriser un polynôme de degré plus grand que deux. ■

3 Limites

Intuitivement, on dit qu'une fonction f , définie sur un intervalle I , possède l pour limite en $x_0 \in I$ si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de x_0 . On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l$ voire encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

On définit également la limite gauche (resp. droite) de f en x_0 en faisant tendre x vers x_0 par valeurs inférieures (resp. supérieures). On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f = l$ voire encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} l$.

La traduction mathématique de ces nombreuses et différentes définitions n'a pas place dans ce mémento et vous trouverez les différentes traductions dans le cours.

Théorème (Opérations sur les limites) :

Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite en x_0 . On note $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f$ et $l' = \lim_{x \rightarrow x_0} g$. La notation F.I. signifie forme indéterminée

1. Addition :

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$-\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
l'	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

2. inverse :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$-\infty$	$l \neq 0$	$l = 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$	0	$\frac{1}{l}$	F.I.	0

3. multiplication :

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x))$	$-\infty$	$l < 0$	0	$l > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$l' < 0$	$+\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$-\infty$
0	F.I.	0	0	0	F.I.
$l' > 0$	$-\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

4. La division s'obtient par utilisation du cas de la multiplication et de l'inverse en remarquant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$

Théorème (limites et inégalités) :

Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite en x_0 .

- Si $f(x) \geq g(x) \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 . Supposons que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l. \text{ et } \forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Alors h possède une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Théorème (fonctions monotones) :

Soit f une fonction définie sur $]a; b[$.

Si f est croissante et majorée sur $]a; b[$ alors f admet une limite en b^- .

Si f est croissante et minorée sur $]a; b[$ alors f admet une limite en a^+ .

Si f est décroissante et majorée sur $]a; b[$ alors f admet une limite en a^+ .

Si f est décroissante et minorée sur $]a; b[$ alors f admet une limite en b^- .

Théorème (changement de variable) :

Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} f(u(t)) = y_0$.

Théorème (limites classiques) :

- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^\alpha e^{\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^\alpha x^\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta.$
- En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x}.$
- En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^\alpha x^\beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$

Remarque :

Pour lever des indéterminations, voici quelques méthodes :

Formes indéterminées du type $+\infty - (+\infty)$. Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$

Formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$ Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et on procède de même au dénominateur

Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ (resp. $0 \times \infty$) Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et on procède de même au dénominateur (resp. on factorise dans le premier facteur le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 et celui qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ dans le second facteur)

■

4 Comparaison locale des fonctions

Définition (Equivalence) :

Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 . On dit f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on l'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Proposition (Règles de calculs) :

1. Soit l un nombre non nul. Alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} l$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.
2. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)h(x)$.
3. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et si $h(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g(x)}{h(x)}$.
4. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$.
5. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} |g(x)|$.

Proposition :

Un polynôme en x est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré.

Proposition (changement de variable) :

Soit f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0 \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \text{ alors } f(u(t)) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} g(u(t))$$

Proposition :

Deux fonctions équivalentes f et g sont de même nature, c'est-à-dire

1. f possède une limite en x_0 si et seulement si g possède une limite en x_0 et, dans ce cas, elles ont la même limite.
2. f n'a pas de limite en x_0 si et seulement si g n'a pas de limite en x_0 .

Proposition (Equivalents classiques) :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x.$$

Plus généralement, si f est dérivable en x_0 , $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

Définition (Négligeabilité ou notation $o(\cdot)$) :

f est négligeable devant g et on l'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ si et seulement si $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Définition :

On note $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x))$.

Proposition :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(g(x))$$

Proposition (Règles de calculs des $o(\cdot)$) :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(1)$ si et seulement si $f(x) \rightarrow 0$.
2. Soit l un nombre non nul. Alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} l + o(1)$ si et seulement si $f(x) \rightarrow l$.
3. (transitivité) Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x))$.
4. (multiplication) Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ alors $f(x)k(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x)k(x) + o(h(x)k(x))$.
5. (division) Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et si $h(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 alors : $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{=} o\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$.
6. (puissance) Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et $f(x) > 0$ au voisinage de x_0 alors $\forall \alpha > 0$, $(f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{=} o((g(x))^\alpha)$.
7. (addition) Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + \underline{o(h(x))}$ et $l(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} k(x) + \underline{o(h(x))}$ alors $f(x) + l(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + k(x) + \underline{o(h(x))}$.

Proposition (changement de variable) :

Si $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$ et $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(h(x))$ alors $f(u(t)) \underset{t \rightarrow t_0}{=} g(u(t)) + o(h(u(t)))$.

Proposition :

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et si g tend vers 0 alors f tend vers 0.

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ et si $|f(x)| \rightarrow +\infty$ alors $|g(x)| \rightarrow +\infty$.

Proposition :

1. En $+\infty$: $x^\alpha \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} o(x^\beta)$ si et seulement si $0 < \alpha < \beta$,
 $\forall \alpha, \beta > 0$, $(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$, $\forall \beta > 0$ et $\forall \alpha$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$.
2. En 0 : $\forall \alpha, \beta > 0$, $(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o(x^\beta)$.

Définition :

Soit n un entier positif. On dit que f possède un développement limité d'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) ssi il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Proposition (DL usuels) :

Pour tout entier n , les $DL_n(0)$ suivants sont vérifiés :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) + o(x^n), \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \right) + o(x^n), \quad e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + o(x^n) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)x^k}{k!} \right) + o(x^n)$$

Définition :

Si P est un polynôme et n un entier alors $T_n P$ désigne le polynôme P que l'on tronqué à l'ordre n c'est-à-dire on a éliminé tous les monômes de degré $> n$.

Proposition :

Soit λ un nombre réel.

1. Si f (resp. g) possède un $DL_n(x_0)$ alors λf , $f + g$, $f \times g$ possèdent également un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ alors

$$f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x - x_0) + Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) \times g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_n[(P_n(x - x_0)Q_n(x - x_0))] + o((x - x_0)^n)$$

(dans la dernière formule, on multiplie les $DL_n(0)$ entre eux puis on élimine toutes les puissances dont l'exposant excède strictement n)

2. Si f et u possède un $DL_n(0)$ et si $u(0) = 0$ alors $x \mapsto f(u(x))$ possède un $DL_n(0)$ donné par

$$f(g(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(P_n(Q_n(x)) + o(x^n))$$

(on substitue le $DL_n(0)$ de u dans celui de f puis on élimine les puissances d'exposants strictement supérieures à n)

Remarque :

Applications des DL .

1. Recherche d'équivalent : Si f possède un $DL_n(x_0)$ alors f est équivalente en x_0 au monôme de plus bas degré intervenant dans son $DL_n(x_0)$.
2. Calcul de limite : Pour déterminer la limite d'une fonction, il peut-être utile d'en faire un DL convenable puis d'en déduire un équivalent de la fonction
3. Recherche d'asymptote : Soit f une fonction définie sur I telle que $\lim_{\infty} f = \infty$. Pour déterminer une asymptote (si elle existe), on factorise le terme dominant dans $f(x)$ ce qui fait apparaitre (après une simplification algébrique) des termes en $\frac{1}{\text{terme dominant}}$ qui tendent vers 0 ce qui permet d'effectuer un DL par rapport à $\frac{1}{\text{terme dominant}}$.

■

Exemple : Asymptote et position en $+\infty$ à la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}. \text{ Le terme } \frac{1}{x^2} \text{ tend vers 0 et } \sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u) \text{ donc}$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ce qui nous donne } f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = x$ est asymptote à \mathcal{C}_f et, puisque $f(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \geq 0$, l'asymptote est situé au dessus de \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.

5 Continuité

Définition :

On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

(resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

On dit que f est continue sur $]a; b[$ ssi elle est continue en tout point x_0 de $]a; b[$.

On dit que f est continue sur $[a; b]$ ssi elle est continue sur $]a; b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Proposition :

f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche en x_0 .

Proposition (Fonctions de référence) :

1. Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R} .
4. Toute fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur \mathbb{R}_+ si $\alpha \geq 0$ (resp. sur \mathbb{R}_+^* si $\alpha < 0$)

Proposition (opérations algébriques sur les fonctions continues) :

Soient f, g deux fonctions continues en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. $f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont continues en x_0 (resp. sur I)
2. Si en outre f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 (resp. sur I)

Proposition :

Soient f une fonction continue sur I et g une fonction continue sur J , avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I .

Corollaire :

1. Si f est continue sur I alors e^f est dérivable continue sur I .
2. Si f est continue sur I et $\forall x \in I, f(x) \geq 0$ alors \sqrt{f} est continue sur I et f^α est continue sur I pour tout réel $\alpha \geq 0$.
3. Si f est continue sur I et $\forall x \in I, f(x) > 0$ alors $\ln f$ est continue sur I .

Définition :

On dit qu'une fonction f est continue par morceau sur $[a; b]$ ssi f est continue sur $[a; b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points en lesquels elle possède des limites finies à gauche et droite (pas nécessairement égales)

Définition (Prolongement par continuité) :

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ et non définie en x_0 . Supposons que f soit continue sur $I \setminus \{x_0\}$ et que la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ est un nombre réel. Alors la fonction \tilde{f} définie par $\tilde{f}(x) =$

$\begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est continue sur I . Elle s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

6 Dérivabilité.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I .

1. On appelle taux d'accroissement en x_0 de f la fonction $\tau_{x_0}(f) : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Géométriquement, cette fonction représente la pente de la droite joignant les points de la courbe représentative de f d'abscisse x et x_0 .
2. On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0}(f) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.
Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.
3. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée à droite (resp. à gauche) de f en x_0 et se note $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).
4. On dit que f est dérivable sur $]a; b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point de $]a; b[$.
5. On dit que f est dérivable sur $[a; b]$ si et seulement si f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a; b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b .

Définition :

Si f est une fonction dérivable en a , on appelle tangente à la courbe représentation \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse $x = a$, la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Proposition (Fonctions de référence) :

1. Toute fonction monôme $x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et $(x^n)' = nx^{n-1}$.
2. La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur \mathbb{R}_x^+ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
3. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$.
4. Toute fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ si $\alpha \geq 1$ (resp. sur \mathbb{R}_x^+ si $\alpha \geq 0$) et $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Proposition :

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

La réciproque de cette proposition est fausse en général.

Proposition :

f est dérivable en $x_0 \in]a; b[$ si et seulement si (f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$). Dans ce cas $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables) :

Soient f, g deux fonctions dérivables en x_0 (resp. sur I) et λ un nombre réel. Alors

1. $f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont dérivables en x_0 (resp. sur I) et

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

2. Si en outre g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 (resp. sur I) et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Proposition (Composition des fonctions dérivables) :

Soient f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J , avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Corollaire :

- Si f est dérivable sur I alors e^f est dérivable sur I et $(e^f)' = f' \times e^f$.
- Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, \underline{f(x) > 0}$ alors \sqrt{f} est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.
- Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, \underline{f(x) > 0}$ alors f^α est dérivable sur I pour tout réel $\alpha \geq 0$ et $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$.
- Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, \underline{f(x) > 0}$ alors $\ln f$ est dérivable sur I et $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.

Proposition :

Si f est dérivable en x_0 et si x_0 est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$.

Proposition (dérivée et monotonie) :

Soit f une fonction dérivable sur I .

- Soit f une fonction dérivable sur I . Alors f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0 \forall x \in I$.
- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
 - f est croissante (resp. strictement croissante) sur I si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$).
 - f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$).

Proposition (Critère de dérivabilité en un point) :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (resp. $]a, b]$)

- Si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$) est finie alors f est dérivable en b (resp. a) et $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ (resp. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$).
- Si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$) est infinie alors f n'est pas dérivable en b (resp. a) et $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$).

Définition :

On dit que f est 2 fois dérivable sur I ssi (f est dérivable et f' est dérivable). Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de f c'est-à-dire $f^{(2)} = f'' = (f')'$.

On dit que f est 3 fois dérivable sur I ssi (f est dérivable, f' est dérivable et f'' est dérivable). Dans ce cas, on note $f^{(3)} = (f^{(2)})'$.

Plus généralement, soit k un entier positif, on dit que f est k fois dérivable ssi $\forall q \leq k-1$, $f^{(q)}$ est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.

7 Théorèmes de bijection

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I . Soit J un intervalle de \mathbb{R} .

1. On dit que f réalise une bijection de I sur J ssi ($f(I) = J$ et tout élément de J possède un et un seul antécédent appartenant à I).
2. Si f réalise une bijection de I sur J , on note f^{-1} la fonction définie que J qui à un élément x de J associe son unique antécédent appartenant à I . On peut résumer cette phrase par cette formule très importante pour les calculs

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \quad \forall x \in J \text{ et } \forall y \in I$$

La fonction f^{-1} s'appelle la réciproque de f .

Proposition :

Si f réalise une bijection de I sur J alors f^{-1} réalise une bijection de J sur I et sa réciproque est f ce que l'on peut traduire par : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition :

Si f réalise une bijection de I sur J et g réalise une bijection de J sur K alors $g \circ f$ réalise une bijection de I sur K et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème (théorème de bijection continue) :

Si f est continue et strictement monotone sur I , alors elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. En outre, sa réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$, strictement monotone et sa monotonie est celle de f .

Proposition (dérivabilité de la réciproque) :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ (c'est-à-dire que $x_0 = f^{-1}(y_0)$).

1. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
2. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est dérivable pas en y_0 et sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente horizontale en y_0 .

Remarque :

Par conséquent, pour calculer la dérivée de la réciproque en un point, il faut déjà commencer par rechercher l'antécédent de ce point! ■

8 Fonctions de classe C^k .

Définition :

Une fonction est dite de classe C^k sur un intervalle I si et seulement si f est k fois dérivable sur I et sa dérivée $k^{ième} f^{(k)}$ est continue sur I .

Une fonction f est de de classe C^∞ sur I si et seulement si elle est indéfiniment dérivable sur I . De façon équivalente, f est C^∞ sur I si et seulement si f est de classe C^k sur I quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Proposition (Opérations algébriques sur les fonctions C^k) :

Soient f, g deux fonctions de classe C^k sur un intervalle I et λ un nombre réel. Alors

1. $f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont de classe C^k sur I .
2. Si en outre g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est C^k sur I .

Proposition (Composition des fonctions C^k) :

Soient f une fonction C^k sur I et g une fonction C^k sur J , avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est C^k sur I .

Corollaire :

1. Si f est C^k sur I alors e^f est C^k sur I .
2. Si f est C^k sur I et $\forall x \in I, f(x) > 0$ alors $\sqrt[k]{f}$ est C^k sur I .
3. Si f est C^k sur I et $\forall x \in I, f(x) > 0$ alors f^α est C^k sur I pour tout réel $\alpha \geq 0$.
4. Si f est C^k sur I et $\forall x \in I, f(x) > 0$ alors $\ln f$ est C^k sur I .

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires alias le TVI) :

Si f est continue sur $[a; b]$ alors pour tout élément c de $[f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

Proposition (Existence d'extremas) :

Si f est continue sur un segment, alors f y possède un maximum et un minimum.

Théorème (Théorème de prolongement continue de la dérivée) :

Soit f une fonction continue sur I et de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. Si f' possède une limite réelle l en x_0 , alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$.

Théorème (Théorème de accroissements finis alias le TAF) :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

1. Supposons qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$\forall x, y \in [a, b], m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

2. Supposons qu'il existe un réel C tel que $\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq C$ alors

$$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

Définition :

On dit que f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall a, b \in I \text{ et } t \in [0; 1], f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

On dit que f est concave sur I si et seulement si

$$\forall a, b \in I \text{ et } t \in [0; 1], f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b).$$

Définition :

On dit que f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I .

Géométriquement, une fonction est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si quelques soient les points M, N dont les abscisses appartiennent à I , le segment $[MN]$ est situé au dessus (resp. en dessous) du graphe de \mathcal{C}_f .

Proposition :

Supposons que f soit dérivable sur I . Alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si f' est croissante (resp. décroissante) sur I .

Supposons que f soit de classe C^2 sur I . Alors f est convexe (resp. concave) ssi f'' est positive (resp. négative) sur I .

Définition :

On appelle point d'inflexion de \mathcal{C}_f tout point où la courbe \mathcal{C}_f traverse sa tangente en ce point.

Proposition :

Soit f une fonction de classe C^2 sur I . Si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe en x_0 alors le point de \mathcal{C}_f d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

9 Intégration

Définition :

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si : F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I .

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Proposition :

Soient F et G deux fonctions qui sont des primitives respectivement de f et de g . Soit λ un nombre réel.

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$.
2. λF est une primitive de λf .
3. $F \circ G$ est une primitive de $g' \times (f \circ g)$.

Proposition (Primitives de référence) :

fonctions	primitives	fonctions	primitives
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$f' f^\alpha$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
e^x	$e^x + C$	$f' e^f$	$e^f + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$. Par convention, $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ et donc on a : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

Remarque :

Géométriquement, l'intégrale $\int_a^b f$ représente l'aire algébrique sous la courbe C_f (les parties au dessus de l'axe des abscisses étant comptées positivement, alors que les parties sous l'axe des abscisses sont comptées négativement).

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .

En particulier, la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est C^1 sur I et $(\int_{x_0}^x f(t)dt)' = f(x)$.

Méthode :

1. Pour étudier une fonction du type $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$, il suffit de connaître le domaine de continuité de f et de sélectionner l'intervalle I contenant x_0 . Dans ce cas, la fonction F est définie sur I , elle s'annule en x_0 et est de classe C^1 sur I .

2. Si on doit étudier une fonction du type $H(x) = \int_{x_0}^{a(x)} f(t)dt$, où $x \mapsto a(x)$ est une fonction de classe C^1 .

On remarque que $H(x) = F(a(x))$ où F est la fonction précédente. On sait que la fonction F est continue sur l'intervalle I (qui a été déterminé précédemment). Pour que $H(x)$ ait un sens, on doit exiger que $a(x) \in I$ ce qui amène à résoudre des inéquations (par exemple, si $a(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [1, +\infty[$ alors $\frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$). On détermine ainsi un ensemble J sur lequel $a(x) \in I$ quel que soit x dans J (dans l'exemple, $J = [0, 1]$), la fonction H est définie sur J et elle est de classe C^1 sur J (comme composée de deux fonctions C^1).

3. Si on doit étudier une fonction du type $K(x) = \int_{b(x)}^{a(x)} f(t)dt$, on sélectionne un x_0 appartenant au domaine de continuité de f , puis on remarque que $K(x) = \int_{x_0}^{a(x)} f(t)dt - \int_{x_0}^{b(x)} f(t)dt = H(a(x)) - H(b(x))$. On utilise la question précédente pour étudier $x \mapsto H(a(x))$ et $x \mapsto H(b(x))$.

fin de la méthode

Définition :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ et soient $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ ses points de discontinuités.

Par définition, on appelle intégrale de a à b le nombre réel défini par : $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$.

Définition :

On dit qu'une fonction est intégrable sur un segment $[\alpha; \beta]$ si et seulement si f est continue ou continue par morceaux sur $[a; b]$.

Proposition (Relation de Chasles) :

Soit f une fonction intégrable sur un segment $[\alpha; \beta]$ et soit a, b, c trois éléments de $[\alpha; \beta]$ alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Par conséquent $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

Proposition (Linéarité de l'intégrale) :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un segment $[\alpha; \beta]$ et soit a, b trois éléments de $[\alpha; \beta]$ alors on a

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g, \quad \text{si } \lambda \text{ est une constante, } \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Proposition (Inégalités et intégrale) :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un segment $[\alpha; \beta]$ et soit a, b trois éléments de $[\alpha; \beta]$ tel que $b \leq a$

1. Si $\forall t \in [a; b], f(t) \geq g(t)$ alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. En particulier, si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$.
2. Inégalité triangulaire $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$
3. Si $f(t) \geq 0 \forall t \in [a; b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall t \in [a; b], f(t) = 0$
4. Inégalité de la moyenne S'il existe deux nombres réels m et M tels que

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in [a; b] \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Théorème (Intégration par partie) :

Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a; b]$ alors : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Théorème (changement de variable) :

Soient f une fonction intégrable sur $[a; b]$ et u une fonction C^1 sur $[a; b]$ telle que $u([a; b]) \subset [a; b]$ alors on a : $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$.

Remarque :

On a effectué le changement de variable $x = u(t)$, on n'oublie que $dx = u'(t)dt$ et on modifie les bornes d'intégration en conservant l'ordre. ■

Corollaire :

Soit f une fonction intégrable sur $[-a; a]$.

- Si f est paire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
- Si f est impaire sur $[-a; a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et n un nombre entier strictement positif. On appelle $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann de f sur $[a; b]$ le nombre réel défini par : $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ alors la suite $(S_n(f))_{n \geq 1}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$.

10 Suites réelles

10.1 Généralités sur les suites

Définition :

On dit qu'une suite u converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, la distance de u_n à l n'excède pas ε dès que n est assez grand. On traduit cette phrase mathématiquement par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l s'appelle la limite de la suite u et se note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On dit qu'une suite u diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi pour tout nombre A , le terme u_n est supérieur (resp. inférieur) à A dès que n est assez grand. On traduit cette phrase mathématiquement par

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n > A \text{ (resp. } < A \text{)}.$$

Proposition :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Si la suite u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |l|$
3. Si la suite u tend vers $l \in \mathbb{R}$ alors pour tout nombre entier p , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+p} = l$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

Proposition :

Soit q un nombre réel. Alors la suite $(q^n)_{n \geq 0}$

1. converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$.
2. converge vers 1 si et seulement si $q = 1$.
3. diverge vers $+\infty$ si et seulement si $q > 1$
4. ne possède pas de limite si et seulement si $q \leq -1$.

Théorème (Opérations sur les limites) :

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites. On note $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. La notation F.I. signifie forme indéterminée

1. Addition :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$-\infty$	l'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
l	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

inverse :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$-\infty$	$l \neq 0$	$l = 0$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	0	$\frac{1}{l}$	F.I.	0

2. multiplication :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$l' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$-\infty$
$l = 0$	F.I.	0	0	0	F.I.
$l > 0$	$-\infty$	$l \times l'$	0	$l \times l'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

3. La division s'obtient par utilisation du cas de la multiplication et de l'inverse en remarquant que $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

Proposition (Limites et inégalités) :

- Si u est une suite positive et converge vers l alors $l \geq 0$.
- Soient u et v sont deux suites telles que $\forall n \geq 0, u_n \geq v_n$.
 - Si les suites u et v convergent vers l et l' alors $l \geq l'$.
 - Si la suite v tend vers $+\infty$ alors u tend vers $+\infty$.
 - Si la suite u tend vers $-\infty$ alors v tend vers $-\infty$.

Théorème (Théorème d'encadrement) :

Soient u, v, w trois suites telles que : $\forall n \geq 0, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Supposons que les suites u et w convergent vers une même limite l . Alors la suite v converge vers l .

Corollaire :

Soient u une suite convergente et v une suite tendant vers 0. Alors la suite $(u_n v_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.

Théorème (Suites monotones) :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Définition :

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si et seulement si

- la suite u est croissante
- la suite v est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème :

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

10.2 Comparaison des suites

Définition :

Soient u et v deux suites. On dit qu'au voisinage de l'infini

1. u est négligeable devant v et on l'écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si ($v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$)
2. u est équivalente à v et on l'écrit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si ($v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$).

Proposition :

Soient u et v deux suites : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Proposition :

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $u_n \rightarrow 0$.
- Soit l un nombre non-nul. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l$ si et seulement si $u_n \rightarrow l$
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n s_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n s_n$
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $s_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{u_n}{s_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{s_n}$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

Théorème :

Deux suites équivalentes u et v sont de même nature, c'est-à-dire

- u converge si et seulement si v converge et dans ce cas elles ont la même limite.
- u diverge vers $+\infty$ si et seulement si v diverge vers $+\infty$.
- u n'a pas de limite si et seulement si v n'a pas de limite..

Théorème :

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et si

1. la suite v tend vers 0 alors u tend vers 0.
2. $|u_n| \rightarrow +\infty$ alors $|v_n| \rightarrow +\infty$

Proposition :

(Table de références).

- $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^\beta)$ si et seulement si $0 < \alpha < \beta$
- $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{n^\beta})$ si et seulement si $0 < \beta < \alpha$
- $(\ln n)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^\beta) \quad \forall \alpha, \beta > 0.$
- $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(q^n)$ si $|q| > 1$ et $a > 0$
- $q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{n^\alpha})$ si $|q| < 1$ et $a > 0$
- Un polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré.

Remarque (Règles pour lever les indéterminations) :

Formes indéterminées du type $+\infty - (+\infty)$ Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$.

Formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$ Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur.

Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ (resp. $0 \times \infty$) Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur (resp. on factorise dans le premier facteur le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 et dans le second facteur le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$).

■

10.3 Plan d'études des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute la suite f désignera une fonction définie sur un intervalle I .

Définition (Intervalle stable) :

| On dit que J est un intervalle stable pour f si et seulement si $f(J) \subset J$.

Remarque :

Pour déterminer $f(I)$, on dresse le tableau de variation de f sur J puis on le compare à J . ■

Définition :

| Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.

Remarque :

En général, il est impossible de justifier l'existence de tous les termes des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. ■

Supposons que l'intervalle I soit un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$ (cela se démontre par récurrence en remarquant que si $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$).

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et u une suite convergeant vers l . Alors la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(l)$.

Par conséquent si la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l alors $l = f(l)$ et l est un point fixe de f . Si en outre, $u_n \in (a, b)$ alors $l \in [a, b]$.

Méthode : Considérons maintenant une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que I soit un intervalle stable pour f et $u_0 \in I$.

Premier cas : f est croissante et u_0 est explicite

Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0 donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

Supposons en outre que f est croissante sur l'intervalle I . On calcule alors explicitement $u_1 (= f(u_0))$ et on distingue les deux cas suivants :

- Si $u_0 \leq u_1$. On montre par récurrence que la suite u est croissante en remarquant que $u_n \leq u_{n+1}$ implique que $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

- Si $u_0 \geq u_1$. La suite (u_n) est alors décroissante et la preuve est semblable à la précédente.

Second cas f est décroissante et u_0 est explicite.

Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies par : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. Calculons a_{n+1}

$$a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$$

Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par : $a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$. Par définition $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n (= u_{2n}) \in I$ qui est un intervalle stable de $f \circ f$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur I ! On peut donc étudier la monotonie de la suite a à l'aide du premier cas en remplaçant la fonction f par la fonction $f \circ f$. De même, la suite b est définie par la relation $b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$ et on procède de même que pour a .

Troisième cas $f(x) - x$ est de signe constant sur I . Alors la suite u est croissante (resp. décroissante). Cela résulte du petit calcul suivant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Dans le premier cas et le second cas, on dispose d'une suite (u_n) qui est monotone et pour justifier la convergence, il suffit d'appliquer les théorèmes de convergence des suites monotones.

Le second cas est plus délicat. Les suites $(a_n)_n$ et (b_n) sont monotones et on essaie d'appliquer les théorèmes sur les suites monotones. On utilise ensuite le fait que la suite (u_n) converge si et seulement si les deux suites (a_n) et (b_n) convergent et que $\lim_n a_n = \lim_n b_n$.

Quatrième cas Application du TAF.

Supposons que les quatre hypothèses ci-dessous soient satisfaites :

- f soit de classe C^1 sur un intervalle stable $[a; b]$ (avec a, b deux nombres réels),
- f admet un unique point fixe α sur le segment $[a; b]$,
- il existe un nombre réel $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in [a; b]$, $|f'(x)| \leq k$.
- $u_0 \in [a; b]$.

Le premier et le quatrième point nous permettent d'affirmer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in [a; b]$. l'inégalité des accroissements finis nous fournit $\forall x, y \in [a; b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [a; b]$ et $\alpha \in [a; b]$, nous remplaçons x par u_n et y par α dans l'inégalité précédente, ce qui nous donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ puis on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$ ce qui nous fournit la convergence de la suite (u_n) vers α .

fin de la méthode

11 Séries numériques

Définition :

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On appelle série de terme général u_n la suite S définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et on la note traditionnellement $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Définition :

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge dans \mathbb{R} .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Définition :

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente. On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S et on l'appelle somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Lemme :

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors pour tout entier positif n_0 la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Lemme :

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Proposition (Operation sur les series) :

Soient λ est un nombre réel et $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes alors

1. la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. la série $\sum_{n \geq 0} \lambda u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition :

On dit la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Proposition :

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Remarque :

La réciproque est fausse en général, c'est-à-dire une série absolument convergente n'est pas nécessairement convergente. ■

Définition :

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ s'appelle série géométrique de raison q .

Proposition :

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} nq^n$, resp. $\sum_{n \geq 0} n^2 q^n$) est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}.$$

Définition :

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ s'appelle série associée à l'exponentielle.

Proposition :

Pour tout nombre réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

12 Fonctions numériques de deux variables réelles

12.1 Le plan \mathbb{R}^2

Rappelons pour commencer que \mathbb{R}^2 désigne l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des nombres réels. Traditionnellement, on représente graphiquement \mathbb{R}^2 sous la forme d'un plan muni du repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un élément (x, y) de \mathbb{R}^2 est associé au point M du plan de coordonnées (x, y) . D'autre part tout point M du plan est associé naturellement à son couple de coordonnées (x, y) qui est un élément de \mathbb{R}^2 .

L'axe des abscisses se note traditionnellement (Ox) (il s'agit d'une droite) et l'axe des ordonnées (Oy) . L'équation de la droite (Ox) est l'ensemble des points $M(x, y)$ dont l'ordonnée est nulle donc

$$(0x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = 0\}$$

On dit que $y = 0$ est l'équation de la droite (Ox) . De façon analogue, la droite (Oy) a pour équation $x = 0$ i.e.

possède comme équation

$$(0y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 0\}$$

Plus généralement, toute droite du plan possède une équation du type

$$y = ax + b \text{ ou } x = c$$

ou de manière équivalente, l'équation de toute droite du plan est de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Si f désigne une fonction d'une variable réelle dont le domaine de définition est un ensemble I . La représentation graphique de f , qui est définie rappelons-le par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y = f(x)\}$.

On déduit naturellement trois nouveaux sous-ensembles remarquables

1. L'ensemble "au dessus" (resp. strictement "au dessus") du graphique de f est défini par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \geq f(x) \text{ (resp. } y > f(x))\}$$

2. L'ensemble "en dessous" (resp. strictement "en dessous") du graphique de f est défini par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \leq f(x) \text{ (resp. } y < f(x))\}$$

3. L'ensemble complémentaire du graphique de f ("tout sauf le graphe de f ") défini par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \neq f(x)\}$$

qui n'est que la réunion des ensembles "au dessus et en dessous" du graphique de f .

Un autre type sous-ensembles de \mathbb{R}^2 est fourni par les cercles. Par exemple, le cercle de centre l'origine (0,0) et de rayon r possède comme équation

$$C(O,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = r^2\}$$

Plus généralement, l'équation du cercle $C((a,b),r)$ de centre (a,b) et de rayon r est

$$C((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

12.2 Fonctions numériques de deux variables réelles

Définition :

On appelle fonction numérique de deux variables réelles la donnée d'un sous-ensemble Ω de \mathbb{R}^2 et d'une application qui à tout couple (x,y) de \mathbb{R}^2 associe un unique nombre réel $f(x,y)$.

Exemple : Les fonctions $f(x,y) = x + y$ et $g(x,y) = \exp(xy) + y^2 - 1$ sont des fonctions numériques de deux variables réelles

Définition :

Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'expression $f(x,y)$ existe

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(x+y)$. L'expression $f(x,y)$ est définie si et seulement si $x + y > 0 \Leftrightarrow y > -x$.

Définition :

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles. On appelle surface de niveau c l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $f(x,y) = c$ (f est constante sur la ligne de niveau)

Exemple : La surface de niveau c de la fonction $x + 3y$ est l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 2x + 3y = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = \frac{c}{3} - \frac{2x}{3}\}.$$

Il s'agit donc d'une droite. De la même façon, on constate que toutes les surfaces de niveau de cette fonction sont des droites du plan.

Exemple : La surface de niveau c de la fonction $x^2 + y^2$ est l'ensemble $N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 = c\}$. On remarque pour commencer que x^2 et y^2 sont toujours des nombres positifs donc $x^2 + y^2$ est toujours positif. Par conséquent,

1. si c est strictement négatif, l'ensemble N_c se réduit à l'ensemble vide.
2. si c est nul, on a $x^2 + y^2 = 0$ ce qui implique que $x = y = 0$ donc $N_c = \{(0,0)\}$
3. si c est strictement positif, l'ensemble N_c est un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon \sqrt{c} .

Définition des dérivées partielles d'ordre 1 :

Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction. On appelle, lorsqu'elle existe,

1. dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) , la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ au point $x = x_0$. On note cette dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
2. dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) , la dérivée de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ au point $y = y_0$. On note cette dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Remarque :

Une dérivée partielle par rapport à x consiste simplement à considérer que y est fixé et à dériver par rapport à x . On a la remarque duale pour y . ■

Exemple : Soit $f(x,y) = \exp(xy) + y^2 - 1$. Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que y est fixé, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \exp(xy)$. Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère maintenant que x est fixé, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \exp(xy) + 2y$.

Définition des dérivées partielles d'ordre 2 :

Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction. Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont les fonctions, lorsqu'elles existent : $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ (noté aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$), $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ (noté aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$), $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ (noté aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$), $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ (noté aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$).

Exemple : Soit $f(x,y) = \exp(xy) + y^2 - 1$.

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(y \exp(xy)) = y^2 \exp(xy)$.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x \exp(xy) + 2y) = x^2 \exp(xy) + 2$.
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(y \exp(xy)) = \exp(xy) + xy \exp(xy)$.
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x \exp(xy) + 2y) = \exp(xy) + xy \exp(xy)$.

Remarque :

Il est intéressant de noter que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ce résultat (appelé lemme de Schwarz) est valable pour une vaste classe de fonctions. Il montre qu'en général, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'ordre d'applications des dérivations. ■

Définition des dérivées partielles d'ordre r :

Soit $(x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction. Les dérivées partielles d'ordre r de f sont toutes les dérivées partielles du premier ordre de toutes les dérivées partielles de f d'ordre $(r-1)$.

Exemple : $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}f))))$ est une dérivée partielle d'ordre 5 de f tout comme $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}f))))$.

Le lemme de Schwarz montre que l'ordre d'application des dérivations n'est pas important donc $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}f)))) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}f))))$. On note alors cette valeur commune $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}$ (le ∂^5 signifiant dérivée partielle d'ordre 5, ∂x^3 signifiant que l'on a dérivée 3 fois par rapport à x et ∂y^2 2 fois par rapport à y , l'ordre n'ayant pas d'importance).

13 Systèmes d'équations linéaires

Définition :

1. Soient p et n deux nombres entiers non-nuls. On appelle système d'équations linéaires de p équations à n inconnues (appelé aussi système $p \times n$) un système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des nombres réels et x_1, \dots, x_n sont les inconnues. Le nombre $a_{i,j}$ s'appelle le coefficient de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans $i^{\text{ème}}$ équation (L_i) . Si $n = p$, on dit que le système (S) est carré d'ordre n .

2. On dit que le système (S) est homogène (ou sans second membre) si et seulement si $b_1 = \dots = b_p = 0$. Dans ce cas, la p -liste $(0; \dots; 0)$ est solution de (S) .
3. On appelle système homogène à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.
4. Résoudre ce système, c'est déterminer toutes les p -listes (x_1, \dots, x_n) de réels vérifiant simultanément les p équations L_1, \dots, L_p .
5. On dit que deux systèmes (S) et (S') sont équivalents si et seulement si ils ont les mêmes solutions

Définition :

On dit qu'un système (S) de taille $p \times n$ est triangulaire si et seulement il est de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + \dots + a_{3,n}x_n = b_3 & (L_3) \\ \vdots \\ a_{p,p}x_p + \dots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

Définition Opérations élémentaires :

Soit (S) un système $n \times p$. On appelle opération élémentaire l'une des trois opérations suivantes :

1. L'échange de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ème}}$ colonne L_j se note $L_i \longleftrightarrow L_j$
2. Soit λ un nombre réel **non-nul**. Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par la ligne λL_i se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (on a multiplié la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par λ).
3. Soit λ un nombre réel **quelconque**. Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ se note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (on a multiplié la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j par λ et on a ajouté le résultat à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Proposition :

Tout système obtenu à partir de S en transformant l'une des ses équations par une transformation élémentaire est équivalent à (S) .

Méthode du pivot de Gauss :

Soit (S) un système $n \times p$ de la forme $(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$

1. L'un au moins des coefficients de x_1 est non-nul. On en choisit un, que l'on appellera premier pivot, et supposons qu'il se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i . On effectue l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_i$ (on met la $i^{\text{ème}}$

ligne en première position). Dorénavant, le système est de la forme

$$(S_1) : \begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} & (L_1) \\ a_{2,1}^{(1)}x_1 + a_{2,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,1}^{(1)}x_1 + a_{p,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{p,n}^{(1)}x_n = b_p^{(1)} & (L_p) \end{cases}$$

où $a_{1,1}^{(1)} \neq 0$. Ensuite on effectue les opérations élémentaires suivantes : $\forall i \in \{2; \dots; p\} \quad L_i \leftarrow L_i + \frac{\lambda}{a_{i,1}} L_1$ qui nous permettent d'obtenir le système (S_2) équivalent à (S) donné par

$$(S_2) : \begin{cases} a_{1,1}^{(1)}x_1 + a_{1,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1,n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} & (L_1) \\ a_{2,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2,n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} & (L_2) \\ \vdots \\ a_{p,2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{p,n}^{(2)}x_n = b_p^{(2)} & (L_p) \end{cases} \quad (S'_2)$$

2. On ne s'occupe plus de la première ligne, sélectionne une variable intervenant dans (S'_2) et on applique le procédé précédent au système (S'_2) . En itérant ce processus en éliminant une à une les inconnues, on aboutit à un système (S') triangulaire équivalent à (S) de la forme

$$(S') : \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,n}x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_p \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{équations principales} \\ \text{équations auxiliaires} \end{matrix}$$

où r est un entier pas nécessairement égal à p (ce provient du fait que des inconnues ont pu disparaître lors du pivot de Gauss sans que l'on se soit intéressé à leurs disparitions). et où tous les pivots $a'_{i,i}$ sont non nuls. On dit que que les inconnues x_1, \dots, x_r sont les inconnues principales et x_{r+1}, \dots, x_n sont les inconnues auxiliaires.

fin de la méthode

Théorème :

Soit (S) système $p \times n$. Le pivot de Gauss montre que (S) est équivalent à un système de la forme

$$(S') : \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,n}x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_p \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{équations principales} \\ \text{équations auxiliaires} \end{matrix}$$

où tous les nombres $a'_{1,1}, \dots, a'_{r,r}$ sont non nuls. Alors le système (S) admet des solutions si et seulement si toutes les équations auxiliaires de (S') sont vérifiées.

Méthode : Supposons que (S) admet des solutions donc les équations auxiliaires de (S') sont nécessairement vérifiées. Ainsi (S) est équivalent au système

$$(S') : \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 & (L_1) \\ \vdots \\ a'_{r,r}x_r + \dots + a'_{r,n}x_n = b'_r & (L_r) \end{cases}$$

avec $\forall i \in \{1; \dots; r\}, \quad a'_{i,i} \neq 0$.

1. Puisque $a'_{r,r} \neq 0$, on peut donc exprimer x_r en fonction de x_{r+1}, \dots, x_n .

2. On substitue x_r dans (L_{r-1}) et puisque $a'_{r,r} \neq 0$, on exprime x_{r-1} en fonction de x_{r+1}, \dots, x_n .
3. On itère le processus et on obtient au final que (S) est équivalent à un système (S'') de la forme

$$(S'') \begin{cases} x_1 = a''_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1,n}x_n + b''_1 \\ x_2 = a''_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{2,n}x_n + b''_2 \\ \vdots \\ x_r = a''_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{r,n}x_n + b''_r \end{cases}$$

et les variables x_{r+1}, \dots, x_n peuvent prendre toutes les valeurs réelles possibles et imaginables.

Ainsi l'ensemble des solutions du systèmes (S) est $\left\{ \begin{pmatrix} a''_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{1,n}x_n + b''_1 \\ \vdots \\ a''_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a''_{r,n}x_n + b''_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ fin de la méthode

Définition :

On dit qu'un système carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si il possède une unique n -liste solution.

Théorème :

1. Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si le pivot de Gauss fait apparaître n pivots successifs non-nuls.
2. Par conséquent, un système (S) carré d'ordre n et homogène est de Cramer si et seulement si il possède comme unique solution la n -liste $(0; \dots; 0)$.
3. Un système carré et triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Théorème :

Un système est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

14 Matrices

14.1 Généralités sur les matrices

Définition :

1. Soient n, p deux nombres entiers non-nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes tout tableau rectangulaires de nombres réels comportant n lignes et p colonnes
2. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$ et on écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

4. Un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) s'appelle une matrice ligne (resp. colonne).
5. La matrice nulle de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on note $0_{n,p}$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Définition (Addition de deux matrices) :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle somme de A et B l'élément de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté $A + B$ défini par $A + B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \quad \forall i \in \{1; \dots; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; \dots; p\}$$

Définition (multiplication d'une matrice par un réel) :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel. On appelle produit de A par λ l'élément de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ noté λA défini par $\lambda A = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} \quad \forall i \in \{1; \dots; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; \dots; p\}$$

Définition (produit de deux matrices) :

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$ un élément de $\mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{R})$. On appelle produit de A par B l'élément de $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ noté $A \times B$ (ou AB) défini par $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ où

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,p}b_{p,j} \quad \forall i \in \{1; \dots; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; \dots; m\}$$

Remarque :

Il est important que l'ordre d'écriture du produit est important. On peut s'en rappeler en utilisant le schéma suivant

$$i^{\text{ème}} \text{ ligne} \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \times \underbrace{\left(\begin{array}{c} \vdots \\ b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p,j} \\ \vdots \end{array} \right)}_{j^{\text{ème}} \text{ colonne}} = \left(\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{i,j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \right\} \text{ coefficient } c_{i,j}$$

Définition :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposé de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée ${}^t A = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ définie par

$$c_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i \in \{1; \dots; p\} \text{ et } \forall j \in \{1; \dots; n\}$$

En d'autres termes, ${}^t A$ est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes avec les colonnes

Proposition (Addition des matrices) :

Soient A, B, C trois éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, & (A + B) + C &= A + (B + C), & 0_{n,p} + A &= A + 0_{n,p} = A \\ A + (-A) &= (-A) + A = 0_{n,p}, & A + B = C &\Leftrightarrow A = C - B, & A + C = B + C &\Leftrightarrow A = C \end{aligned}$$

Proposition (multiplication des matrices) :

Soient $A \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{R}), B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ, μ deux nombres réels

$$1A = A, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B, \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$$

Proposition (Transposition) :

1. Soient A, B deux éléments de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel.

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad {}^t({}^tA) = A$$

2. Si $A \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

14.2 Matrices carrés

Définition :

1. Une matrice carré d'ordre n est un élément de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices carré d'ordre n se note aussi $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ se note 0_n .

2. On appelle diagonale d'une matrice carré $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ les n nombres $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$.

3. Une matrice diagonale d'ordre n est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

4. La matrice appelé identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et noté I_n est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Une matrice scalaire est une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix})$$

7. On dit qu'une matrice A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$

Définition :

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. On pose : $A^0 = I_n$ et si $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$

Proposition :

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et n, m deux entiers positifs. Alors on a $A^n A^m = A^{n+m}$

Remarque :

Par contre, en général $(AB)^k \neq A^k B^k$. Cela résulte que, dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $AB \neq BA$ ■

Définition (matrices commutantes) :

Soient A et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B commutent (ou A et B sont permutables) si et seulement si : $AB = BA$

Proposition :

Soient A, B, C trois éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$I_n A = A I_n = A, \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA$$

Théorème Formule du binôme :

Soient A et B deux matrices qui commutent. Alors pour tout entier p , on a :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k}.$$

14.3 Matrices inversibles

Définition :

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

Si A est inversible, alors la matrice B est appelé inverse de A et on la note A^{-1} . L'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

Lemme :

Si A est inversible, alors son inverse est unique. En particulier,

- A est inversible si et seulement si il existe B telle que $AB = I_n$. Dans ce cas, $B = A^{-1}$.
- A est inversible si et seulement si il existe B telle que $BA = I_n$. Dans ce cas, $B = A^{-1}$.

Ce lemme est très utile dans la pratique puisqu'il nécessite que la vérification d'une égalité et non de deux comme la définition de l'inversibilité l'exige.

Méthode (Inversibilité et inverses de certaines matrices) : Soit A une matrice telle que $A^{2004} + A^{2003} + 2I = 0$. Alors

$$A^{2004} + A^{2003} = -2I \Leftrightarrow A(A^{2003} + A^{2002}) = -2I \Leftrightarrow A\left(\frac{A^{2003} + A^{2002}}{-2}\right) = I.$$

La matrice $B = \frac{A^{2003} + A^{2002}}{-2} = -\frac{1}{2}(A^{2003} + A^{2002})$ vérifie $AB = I$ donc on peut affirmer que A est inversible et son inverse est B c'est-à-dire $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^{2003} + A^{2002})$. **fin de la méthode**

Remarque :

Ce raisonnement est valable car A satisfait à une équation polynôme possédant un coefficient constant non nul, c'est-à-dire que la matrice I intervient dans l'équation. Par exemple, si $A^2 + 2A = 0$, on en déduit que $A(A + 2I) = 0$. De cette dernière égalité, on ne peut aboutir à une équation du type $AB = I$ donc on ne peut conclure et il faudra procéder d'une autre manière. ■

Proposition :

Soient A, B deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1.
 - I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$
 - Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$
 - Si A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 - Si $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$ et $AB = 0_n$ alors A et $B \notin GL_n(\mathbb{R})$
2. Supposons en outre que $C \in GL_n(\mathbb{R})$
 - Si $AC = BC$ alors $A = B$
 - Si $CA = CB$ alors $A = B$
 - Si $AC = B$ alors $A = BC^{-1}$
 - Si $CA = B$ alors $A = C^{-1}B$

14.4 Systèmes linéaires et matrices

Soit (S) un système $p \times n$ de la forme $(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie

par $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ ainsi que $X \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ définies par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

Lemme (équivalence entre système linéaire et équation matricielle) :

(x_1, \dots, x_n) est solution du système (S) si et seulement $AX = B$.

Remarque :

La détermination d'une solution (x_1, \dots, x_n) du système (S) est équivalent à la détermination de la matrice colonne X donc la résolution du système (S) est équivalente à la résolution de l'équation $AX = B$. ■

Définition :

La matrice A est appelée la matrice du système (S) .

Théorème :

1. (S) est un système de Cramer si et seulement si la matrice A de (S) est inversible.
2. Par conséquent, une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les termes de sa diagonale sont non-nuls.
3. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non-nuls.

Remarque :

Puisqu'un système de Cramer est nécessairement carré, on en déduit qu'une matrice A inversible est nécessairement carrée. La réciproque est bien entendue fausse. ■

Méthode pour déterminer l'inversibilité d'une matrice : Soit A une matrice carré de taille n . Pour que A soit inversible, il est nécessaire et suffisant que le système $AX = 0$ soit de Cramer. Puisqu'il est homogène, il est équivalent de dire qu'il admet comme unique solution la matrice $X = 0$. En particulier, pour déterminer l'inversibilité de la matrice A , il suffit de rendre triangulaire, par la méthode du pivot de Gauss, le système $AX = 0$ puis de vérifier si tous les coefficients diagonaux de ce système triangulaire sont non nuls ou non. Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, le système $AX = 0$ est de Cramer et A est inversible, si au moins un coefficient diagonal est nul, alors le système $AX = 0$ n'est pas de Cramer donc A n'est pas inversible.

fin de la méthode

Méthode pour calculer l'inverse d'une matrice inversible : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Pour expliciter son inverse, on considère le système $AX = B$. D'un point de vue théorique, sa solution est $X = A^{-1}B$ (par multiplication à gauche par A^{-1}). D'un point de vue pratique, si l'on considère deux matrices X et B de

la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système $n \times n$ correspondant à l'équation matricielle $AX = B$ est de

Cramer, donc on peut expliciter, à l'aide de la méthode de notre cher Gauss, les inconnues x_1, \dots, x_n en fonction de b_1, \dots, b_n ce qui nous fournit une matrice H telle que $X = HB$. Or $X = A^{-1}B$ et X et B étant quelconques,

on en déduit que $H = A^{-1}$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. L'équation $AX = B$

correspond au système $\begin{cases} 2x + y = a \\ 5x + 3y = b \end{cases}$. La méthode de Gauss nous fournit les solutions $\begin{cases} x = 3a - b \\ y = -5a + 2b \end{cases}$ donc

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'affirmer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. **fin de la méthode**

Remarque :

Il est indispensable dans la méthode précédente, de conserver l'ordre initial des variables. Si l'on reprend l'exemple précédent, on peut dire que les solutions du système $AX = B$ sont $\begin{cases} x = 3a - b \\ y = 2b - 5a \end{cases}$. Les variables étaient ordonnées initialement en x puis y et a puis b alors que dans les solutions données ci-dessus, elles sont ordonnées en x puis y et b puis a et non a puis b . En particulier, on ne peut dire que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ (cela découle tout simplement de la relation faisant passer d'un système à une équation matricielle qui est basée sur l'alignement correct des variables, les a sous les a , les b sous les b , les x sous les x , etc.). ■

15 Dénombrement

Définition :

Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-parties de E .

Définition :

Soient A et B deux sous-ensembles de E .

- $A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- $A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\}$. L'ensemble $A \setminus B$ se note encore $\mathcal{C}_A B$. Dans le cas particulier où $A = E$, $E \setminus A$ se note également $\mathcal{C}A$ ou \bar{A} .
- si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont disjoints.

Définition d'une partition :

Soient E et I deux ensembles. Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . On dit que la famille $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de E si et seulement si $(E = \bigcup_{i \in I} E_i \text{ et } \forall i, j \in I, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j)$.

Définition :

Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F . Cet ensemble se prononce E croix F .

Plus généralement, si E_1, E_2, \dots, E_n sont n ensembles, on note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'ensemble formé des n -uplets de la forme (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$.

Si, en outre $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, alors l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est noté conventionnellement E^n .

Définition :

Soit A un ensemble comportant un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de A le nombre d'éléments de A et on le note $\text{card}(A)$ ou $|A|$ voire encore $\#A$.

Proposition :

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E . Alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ et $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ si et seulement si $A = E$

Théorème :

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E .

1. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$
2. $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$
3. $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$
4. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Théorème Crible de Poincarre :

1. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de partie d'un ensemble finie E . Alors on a

$$\begin{aligned} \text{card}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \text{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^n \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

2. En particulier, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ $\text{card}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \text{card}(A_i)$.

Exemple : Pour comprendre la formule du crible de Poincarre, nous allons l'expliciter pour $n = 3$

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^3 \text{card}(A_i) - \text{card}(A_1 \cap A_2) - \text{card}(A_1 \cap A_3) - \text{card}(A_2 \cap A_3) + \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Proposition :

Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est un ensemble fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \text{card}(F)$.
Plus généralement si E_1, \dots, E_n sont des ensembles finis alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \dots \text{card}(E_n)$$

En particulier, si E est un ensemble fini alors E^n est un ensemble fini et $\text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$

Définition d'une p -liste :

Soit E un ensemble. On appelle p -liste d'un ensemble E , tout élément de E^p c'est-à-dire tout p -uplet de la forme (e_1, \dots, e_p) où $e_i \in E \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Remarque :

Bien entendu, l'ordre des éléments est important dans une liste car $(2,1) \neq (1,2)$. ■

Proposition (dénombrement des p -listes d'un ensemble à n éléments) :

Le nombre de p -listes d'un ensemble E à n éléments est n^p .

Définition d'un arrangement :

Un p -arrangement d'un ensemble E est une p -liste de E constituée d'éléments deux à deux distincts.

Proposition (nombre d'arrangements d'ordre p d'un ensemble à n éléments) :

Soit E un ensemble à n éléments. Si A_n^p désigne le nombre de p -arrangements de E alors

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définition d'une permutation :

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout n -arrangement de E .

Proposition (nombre de permutations d'un ensemble) :

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E .

Définition d'une combinaison :

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle combinaison à p éléments de E toute partie de E à p éléments.

Exemple : Si $E = \{1; \dots; 10\}$ alors $\{2; 5; 7\}$ et $\{1; 8; 10\}$ sont des combinaisons à 3 éléments de E .

Proposition (nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments) :

Soit E un ensemble à n éléments. Si C_n^p (ou encore $\binom{n}{p}$) désigne le nombre de combinaisons à p éléments de E alors

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Proposition :

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{0; \dots; n\}$, on a $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

Proposition (le triangle de Pascal) :

Pour tous n et p deux nombres entiers positifs tels que $p \leq n$, on a : $C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}$.

On peut se souvenir de cette formule en utilisant le schéma suivant :

$\binom{n}{p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	\dots	p	$p+1$	\dots	n	$n+1$
$n=0$	1											
$n=1$	1	1										
$n=2$	1	2	1									
$n=3$	1	3	3	1								
$n=4$	1	4	6	4	1							
$n=5$	1	5	10	10	5	1						
\vdots	\vdots	\vdots				\ddots	\ddots					
n	1	n						$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$		1	
$n+1$	1	$n+1$	\dots					\dots	$\binom{n+1}{p+1}$		$n+1$	1

Théorème (Formule du binôme de Newton) :

Soient a, b deux nombres réels et n un entier. Alors on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Théorème (nombre de parties d'un ensemble à n éléments) :

Si E est un ensemble à n éléments alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

16 Probabilités sur un ensemble fini

16.1 Généralités

Définition :

On appelle expérience (ou épreuve) aléatoire toute expérience dont le résultat est ne peut être déterminé à priori. Les résultats potentiels d'une expérience aléatoire sont appelés des évènements. Un évènement qui n'est jamais réalisé s'appelle évènement impossible et un évènement qui se réalise toujours est un évènement certain.

Définition :

Soit Ω un ensemble fini et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que \mathcal{A} est une tribu (ou σ -algèbre) de Ω ssi

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ ("l'évènement certain est possible")
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ ("si un évènement peut se réaliser, son contraire aussi")
3. $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}, A_1 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{A}$ ("si deux évènements peuvent se réaliser alors l'un ou l'autre peut se réaliser"). Dans ce cas, on dit que le couple (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable. Les éléments de \mathcal{A} sont appelés évènements.
Si en outre, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ les singletons $\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$) sont appelés les évènements élémentaires.

Exemple : Si Ω est un ensemble fini alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω

Définition :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) toute application P de \mathcal{A} dans $[0; 1]$ telle que

$$P(\Omega) = 1 \text{ et } \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ tels que } A \cap B = \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est appelé espace probabilisé fini et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A . Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable si et seulement si $P(A) = 0$.

Proposition :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé fini et soient A, B deux évènements. Alors on a

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A), \quad P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

En outre, si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

Proposition (Crible de Poincaré) :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé fini et soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de partie d'un ensemble finie E . Alors on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) &= \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

En particulier, si $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$: $P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i)$

Proposition (Caractérisation des probabilités) :

Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$.

1. Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ alors on a $\sum_{k=1}^n P(\{\omega_k\}) = 1$
2. Soit p_1, \dots, p_n positifs tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que

$$\forall k \in \{1; \dots; n\} \quad P(\{\omega_k\}) = p_k$$

Dans ce cas, si $A = \{y_1; \dots; y_s\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors $P(A) = \sum_{k=1}^s P(\{y_k\})$.

Définition :

1. On dit que deux évènements sont équiprobables si et seulement si ils ont la même probabilité
2. Une probabilité est dite uniforme si et seulement si tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Théorème :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini tel que la probabilité P soit uniforme. Alors on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Traditionnellement, on traduit cette formule par

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise lors de l'expérience}}{\text{nombre de cas possibles de résultats de l'expérience}}$$

16.2 Probabilités conditionnelles**Théorème :**

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé fini et A un évènement de probabilité non-nulle. Alors l'application P_A définie sur \mathcal{A} par

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \forall B \in \mathcal{A}$$

définit une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) . On l'appelle probabilité conditionnelle relativement à A ou probabilité sachant A . $P_A(B)$ est également notée $P(B/A)$ même si $P_A(B)$ est désormais la notation du programme.

Méthode : En général, pour calculer une probabilité conditionnelle $P_A(B)$, il est indispensable de considérer que l'évènement A est réalisé. On interprète dès lors l'évènement B en tenant compte de cette réalisation.

Par exemple, On pioche sans remise 3 boules dans une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On souhaite calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches et une noire sachant que la première boule tirée est noire. Cela signifie que l'on a déjà pioché une boule et que cette boule est noire. L'urne contient donc 4 boules blanches et 2 boules noires. Ce fait étant acquis, on souhaite maintenant avoir au final deux boules blanches et une boule noire. Puisque l'on a une boule noire déjà, il suffit de piocher deux boules blanches dans l'urne contenant 4 boules blanches et 2 boules noires. La probabilité conditionnelle est donc $\frac{C_4^2}{C_6^2}$ (deux blanches

parmi 4 en piochant deux boules parmi 6). Par contre, le calcul $\frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3}$ correspond à obtenir deux blanches et une noire dans l'urne initiale sans exiger la moindre condition (en particulier, d'avoir la boule noire à la première pioche). **fin de la méthode**

Corollaire :

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$, Si $C \subset B$ alors $P_A(C) \leq P_A(B)$, $P_A(C \cup B) = P_A(C) + P_A(B) - P_A(C \cap B)$.

La formule du crible de Poincaré reste vraie en remplaçant P par P_A .

Proposition (probabilités composées) :

Soient A_1, \dots, A_n une famille d'évènements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Définition :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable fini et soit A_1, \dots, A_n une famille de parties de \mathcal{A} . On dit que cette famille est un système complet d'évènements si et seulement si (A_1, \dots, A_n) est une partition de Ω c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

Théorème (Formule des probabilités totales) :

Soit A_1, \dots, A_n un système complet d'événements et B un événement, alors on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Méthode : Lorsque l'on doit calculer une probabilité qui semble compliquée car "le calcul dépend" de l'urne où l'on pioche, du nombre de piles obtenus, etc., il est indispensable d'utiliser la formule des probabilités totales en utilisant comme système complet les différentes contraintes auquel on est confronté (par exemple, A_k : "piocher dans l'urne n° k ", A_k = "obtenir k piles", etc.) **fin de la méthode**

Théorème (Formule de Bayes) :

Soit A_1, \dots, A_n un système complet d'événements et B un événement, alors $\forall k \in \{1; \dots; n\}$ on a

$$P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)}{P(B)} \text{ et } P(B) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Définition de deux événements indépendants :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé fini. On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Proposition :

Si A et B sont indépendants pour la probabilité P alors A et \bar{B} (resp. \bar{A} et B , resp. \bar{A} et \bar{B}) le sont aussi.

Définition de n événements indépendants :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé fini et A_1, \dots, A_n n événements.

1. On dit que A_1, \dots, A_n sont deux à deux indépendants pour la probabilité P si et seulement si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i \neq j \in \{1; \dots; n\}$$

2. On dit que A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si et seulement si pour tout ensemble d'indices $I \subset \{1; \dots; n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Proposition :

A_1, \dots, A_n n événements mutuellement indépendants pour la probabilité P . Si l'on pose $\forall i \in \{1; \dots; n\}$, $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i alors les événements B_1, \dots, B_n sont mutuellement indépendants pour la probabilité P

17 Variables et vecteurs aléatoires finies

17.1 Généralités

Définition :

Une variable aléatoire réelle finie (var.finie) X sur un espace probabilisable fini (Ω, \mathcal{A}) est une application de Ω dans \mathbb{R} telle que pour tout intervalle I de \mathbb{R} $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{A}$. Traditionnellement on note

- $(X = x)$ pour $(X \in \{x\})$
- $(a < X \leq b)$ pour $(X \in]a; b])$
- $(X \leq x)$ pour $(X \in]-\infty; x])$

Définition :

Un vecteur aléatoire fini X sur un espace probabilsable fini (Ω, \mathcal{A}) est une application de Ω dans \mathbb{R}^n $X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases}$ telles que les n applications X_i soient var finies définies sur (Ω, \mathcal{A}) .
On note $X = (X_1, \dots, X_n)$ et si $n = 2$, le vecteur (X_1, X_2) est appelé couple de vecteurs aléatoires.

Proposition :

Soient X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}) et λ un nombre réel. Alors $X + Y$, λX , XY , $\sup(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des var finies sur (Ω, \mathcal{A}) .

Définition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}) . On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique réelle F_X définie par : $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$

Proposition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}) et F_X sa fonction de répartition.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in [0; 1]$
2. La fonction F_X est croissante.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Définition de la loi d'une variable finie :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) la donnée de $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ ainsi que de toutes les probabilités $p_k = P(X = x_k)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Théorème :

Un ensemble $\{x_1; \dots; x_n\}$ ainsi qu'une famille de réels (p_1, \dots, p_n) définissent une loi de probabilité si et seulement si

$$p_k \geq 0 \forall k \in \{1; \dots; n\} \text{ et } \sum_{k=1}^n p_k = 1$$

Proposition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) dont la loi de probabilité est $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket P(X = x_k) = p_k$. Alors,

1. $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = P(X \geq x) - P(X > x)$.
2. $\forall x < x_1, F_X(x) = 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, pour $x_i \leq x < x_{i+1}$, $F_X(x) = \sum_{k=1}^i p_k$ et $\forall x > x_n, F_X(x) = 1$.
3. Réciproquement, $p_1 = F_X(x_1), \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, p_k = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$

Définition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une fonction numérique d'une variable réelle. On note $f(X)$ l'application définie par $f(X) : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{cases}$

Proposition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) telle que $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$, f une fonction numérique et $Y = f(X)$.
 Y est une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) telle que

1. $Y(\Omega) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$
2. pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = \sum_{i \text{ tel que } f(x_i)=y} P(X = x_i)$

Proposition :

Soit X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_m\}$.
 Soit $Z = g(X, Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y .
 Alors $Z(\Omega) = \{g(x_k, y_l), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } l \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ et } \forall z \in \mathbb{R} \text{ on a}$

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } g(x_k, y_l)=z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

En particulier, si $Z = X + Y$

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } x_k + y_l = z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

et si $Z = XY$

$$P(Z = z) = \sum_{k \text{ et } l \text{ tel que } x_k y_l = z} P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

17.2 Moments d'une var finie**Définition de l'espérance d'une variable finie :**

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_k x_k p_k$

Proposition (Espérance d'une fonction de X) :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une fonction numérique alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)p_k$.

En particulier, $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$

Proposition (linéarité de l'espérance) :

1. Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et a, b deux nombres réels alors on a $E(aX + b) = aE(X) + b$. En particulier, $E(aX) = aE(X)$.
2. Si X et Y sont deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) alors $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
3. Soient X_1, \dots, X_n n var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Alors on a la formule : $E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$

Définition :

1. On dit que X est centrée si $E(X) = 0$
2. La variable $X - E(X)$ est appelée var centrée associée à X

Proposition :

Soient X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_m\}$. Soit $Z = g(X, Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y . Alors on a

$$E(Z) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m g(x_k, y_l) P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

En particulier

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m x_k y_l P((X = x_k) \cap (Y = y_l))$$

Définition de la variance et de l'écart-type :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle

1. moment d'ordre 2 de X le nombre $m_2(X) = E(X^2)$
2. variance de X le nombre $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$
3. écart-type de X le nombre $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Définition de la covariance de deux variables finies :

Soient X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle covariance de X et Y le nombre

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proposition :

Soient X, Y, Z trois var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et a, b deux nombres réels. Alors on a :

1. $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$
2. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$.
3. $\text{cov}(aX + bY, Z) = a \text{cov}(X, Z) + b \text{cov}(Y, Z)$
4. $\text{cov}(X, aY + bZ) = a \text{cov}(X, Y) + b \text{cov}(X, Z)$

Définition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$.

Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la var $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée var réduite associée à X .

Proposition :

1. Soient X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) alors on a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y), \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{cov}(X, Y)$$

2. Plus généralement, soient X_1, \dots, X_n n var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Alors on a la formule

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Définition :

Soit X, Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le nombre

$$\mu(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition :

1. $\mu(aX + b, cY + d) = \begin{cases} \mu(X, Y) & \text{si } ac > 0 \\ -\mu(X, Y) & \text{si } ac < 0 \end{cases}$
2. On a toujours $|\mu(X, Y)| \leq 1$
3. $|\mu(X, Y)| = 1$ ssi il existe deux nombres réels a et b tel que

$$P(Y = aX + b) = 1$$

($Y = aX + b$ au sens du calcul des probabilité mais pas nécessairement au sens des applications)

17.3 Couple de variables aléatoires

Définition de la loi d'un couple de variables finies :

Soient (X, Y) un couple de var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que

$$X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_m\}.$$

On appelle loi du couple (X, Y) (ou loi de (X, Y) ou loi conjointe de X et Y) la donnée

1. de l'ensemble des valeurs possibles du couple (X, Y) c'est-dire des couples (x_k, y_l) , $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$
2. de toutes les probabilités $p_{k,l} = P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)]$ $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

Définition des lois marginales d'un couple :

Les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) .

La loi de la var X (resp. Y) s'appelle la loi marginale de X (resp. Y) du couple (X, Y) .

Proposition (recomposition des lois marginales à partir de la loi de couple) :

Pour tout couple (X, Y) , on a

loi de X

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\forall k \in \{1; \dots; n\} \quad p(X = x_k) = \sum_{l=1}^m P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)].$$

loi de Y

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad p(Y = y) = \sum_{k=1}^n P[(X = x_k) \cap (Y = y)].$$

ou encore

$$\forall l \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad p(Y = y_l) = \sum_{k=1}^n P[(X = x_k) \cap (Y = y_l)].$$

17.4 Indépendances de deux variables

Définition indépendance de deux variables finies :

Soient X et Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_m\}$.
On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall k \in \{1; \dots; n\}$ et $\forall l \in \{1; \dots; m\}$ on a

$$P((X = x_k) \cap (Y = y_l)) = P(X = x_k)P(Y = y_l)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \quad P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$$

Proposition :

Soient X et Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et soient A, B deux intervalles de \mathbb{R} . Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition :

Soient X et Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et soient f, g deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux var définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes.

Proposition (Indépendance et covariance) :

Soient X et Y deux var finies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes alors : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

En particulier, $\text{cov}(X, Y) = 0$ et par conséquent

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y), \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes alors

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

18 Lois discrètes finies usuelles

Définition :

On dit qu'une var suit la loi uniforme sur $\llbracket n, m \rrbracket$ si et seulement si $X(\Omega) = \llbracket n, m \rrbracket$ et tous les évènements $P(X = k)$ $k \in \llbracket n, m \rrbracket$ sont équiprobables, c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket n, m \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{m - n + 1}$ (il y a $m - n + 1$ entiers entre n et m).

Définition des variables de Bernoulli :

Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu'une var finie X sur (Ω, \mathcal{A}, P) suit le schéma de Bernoulli de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{B}(1, p)$) si et seulement si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \text{ avec } P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

Méthode : Soit \mathcal{E} une épreuve aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évènement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire \bar{A} avec la probabilité $1 - p$. Dans ce cas, si X est le nombre de fois où est réalisé A alors $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ **fin de la méthode**

Proposition :

Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

Définition de la loi binômiale :

Soit n un entier naturel et $p \in [0; 1]$. On dit qu'une var finie X sur (Ω, \mathcal{A}, P) suit le schéma de Bernoulli de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) si et seulement si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Méthode : Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évènement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire \bar{A} avec la probabilité $1-p$. Si on effectue n fois l'expérience \mathcal{E} dans des conditions identiques (p est constant et les expériences étant deux à deux indépendantes) et si X est le nombre de fois où est réalisé A alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ **fin de la méthode**

Théorème :

La somme de n variables de Bernoulli deux à deux indépendantes de même espérance p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Proposition :

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Méthode : Soit X_k la variable de Bernoulli qui compte le nombre de fois où est réalisé A à la $k^{\text{ème}}$ épreuve E alors $X_k \sim \mathcal{B}(1, p)$

Par hypothèse si $k \neq l$ alors X_k et X_l sont deux var indépendantes. La variable X s'écrit encore $X = \sum_{k=1}^n X_k$. Par conséquent, $E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n p = np$ et l'indépendance des variables montre que $V(X) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n p(1-p) = np(1-p)$ **fin de la méthode**

Proposition :

1. Soient X_1 et X_2 deux var indépendantes qui suivent respectivement les lois de Bernoulli $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ alors $X_1 + X_2$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$
2. Plus généralement si X_1, \dots, X_k sont k var mutuellement indépendantes qui suivent respectivement les lois de Bernoulli $\mathcal{B}(n_1, p), \dots, \mathcal{B}(n_k, p)$ alors $X_1 + \dots + X_k$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n_1 + \dots + n_k, p)$

Définition de la loi hypergéométrique :

Soient N et M deux entiers tel que $M \leq N$. On dit qu'une var finie X sur (Ω, \mathcal{A}, P) suit la loi hypergéométrique de paramètre $n, M, \frac{M}{N}$ (noté $X \sim \mathcal{H}(n, M, \frac{M}{N})$) si et seulement si

$$X(\Omega) = \{\max(0, n - N + M), \min(M, n)\} \text{ et } P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \forall k \in X(\Omega)$$

Méthode : Soit E un ensemble constitué de deux types d'éléments : M sont de type 1 et $N - M$ sont de type 2. On effectue n tirage sans remise dans E (donc $n \leq N$). Soit X la var égale au nombre d'éléments de type 1 piochés : l'évènement $(X = k)$ signifie que l'on choisit k éléments parmi les M type 1, les $n - k$ autres éléments sont sélectionnés parmi les $N - M$ éléments de type 2 et l'on a sélectionné en tout n éléments dans une population totale de N éléments. Dès lors, X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, \frac{M}{N})$. **fin de la méthode**

Proposition :

Si X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, M, \frac{M}{N})$ alors $E(X) = n \frac{M}{N}$.

Remarque :

$\frac{M}{N}$ représente la probabilité de choisir un élément de type 1 parmi tous les éléments de E . Bien qu'il n'y ait pas remise, l'espérance de X est identique à l'espérance de la variable similaire où l'on effectuerait les pioches

avec remise, c'est-à-dire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n, \frac{M}{N})$.

On ne doit pas retenir la formule donnant les valeurs possibles de X mais seulement la redécouvrir sur chaque exemple concret. ■

(Chapter head:)Espace probabilisé et var discrète infinie

19 Probabilités sur un ensemble discret dénombrable

Définition :

Soit Ω un ensemble (non-nécessairement fini) et \mathcal{A} une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que \mathcal{A} est une tribu (ou σ -algèbre) de Ω si et seulement si : $\Omega \in \mathcal{A}$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \in \mathcal{A}$, Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Dans ce cas, on dit que le couple (Ω, \mathcal{A}) est un espace probabilisable. Les éléments de \mathcal{A} sont appelés évènements.

Si en outre, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ les singletons $\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$) sont appelés les évènements élémentaires.

Remarque :

N'avoir en tête comme type de tribu que l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ d'un ensemble Ω avec Ω de la forme \mathbb{N} . ■

Définition :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Soit I un ensemble fini d'entiers ou $I = \mathbb{N}$ et soit $(A_n)_{n \in I}$ une famille de partie de \mathcal{A} . On dit que cette famille est un système complet d'évènements si et seulement si : $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\Omega = \bigcup_{n \in I} A_n$.

Définition :

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) toute application P de \mathcal{A} dans $[0; 1]$ telle que : $P(\Omega) = 1$ et pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partie de \mathcal{A} deux à deux disjointes,

on ait $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est appelé espace probabilisé fini et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A . Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable si et seulement si $P(A) = 0$. Une propriété \mathcal{P} est dite presque sûrement vraie ssi l'ensemble $A_{\mathcal{P}} = \{\omega \in \Omega \text{ tel } \omega \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$ a une probabilité égale à 1.

Proposition :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soient A, B deux évènements. Alors on a

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si A et B sont incompatibles (c'est-à-dire disjoints) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. Plus généralement, si A_1, \dots, A_n sont n évènements deux à deux incompatibles (=disjoints) alors $P(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
6. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
8. La formule du crible rest valable

Proposition :

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé

1. Soient I un ensemble fini d'entiers ou $I = \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'évènements alors on a $\sum_{n \in I} P(A_n) = 1$
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements de \mathcal{A} (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$), la suite $P(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$
3. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements de \mathcal{A} (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$), la suite $P(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$

Théorème (Formule des probabilités totales) :

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements de Ω et si B est un évènement, alors on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)$$

20 Variables et vecteurs aléatoires discrets dénombrables

20.1 Généralités

Définition d'une variable aléatoire discrète infinie :

Une variable aléatoire réelle discrète infinie (var discrète infinie) X sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est une application de Ω dans \mathbb{R} telle que

1. pour tout intervalle I de \mathbb{R} $\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{A}$
2. Il existe une suite de nombres réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque :

Dans la pratique, vous n'aurez jamais à vérifier la première condition. ■

Définition :

Un vecteur aléatoire réel discret infini X sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est une application de Ω dans \mathbb{R}^n

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases}$$

telles que les n applications X_i soient var discrètes infinies définies sur (Ω, \mathcal{A}) .

On note $X = (X_1, \dots, X_n)$ et si $n = 2$, le vecteur (X_1, X_2) est appelé couple de vecteurs aléatoires

Proposition :

Soient X, Y deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}) et λ un nombre réel. Alors $X + Y, \lambda X, XY, \sup(X, Y), \min(X, Y)$ sont des var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}) .

Définition loi d'une var discrète infinie :

Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) telle que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) la donnée de l'ensemble $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et des probabilités $p_n = P(X = x_n)$

Théorème :

Un ensemble $\{(x_n, p_n), n \in \mathbb{N}\}$ définit une loi de probabilité si et seulement si

1. $p_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
2. la série $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Remarque :

Ce théorème justifie que l'on a pas à s'occuper de la convergence des séries intervenants dans le cas discret infini puisqu'elle sont toutes convergente! ■

20.2 Moments d'une var discrète infinie**Définition de l'espérance d'une var discrète infinie :**

Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) de loi $\{(x_n, p_n), n \in \mathbb{N}\}$.

On dit X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_n p_n$ converge.

Dans ce cas, on appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$$

Proposition (linéarité de l'espérance) :

1. Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une espérance et a, b deux nombres réels.
Alors la var discrète infinie $aX + b$ possède une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.
2. Si X et Y sont deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une espérance.
alors la var discrète infinie $X - Y$ possède une espérance et $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
3. Soient X_1, \dots, X_n n var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une espérance.
Alors la var discrète infinie $\sum_{k=1}^n X_k$ possède une espérance et $E(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$.

Définition :

On dit que X est centrée si $E(X) = 0$. La variable $X - E(X)$ est appelée var centrée associée à X .

Définition de la variance :

Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X possède une variance si et seulement si $(X - E(X))^2$ possède une espérance.

Proposition (Caractérisation de l'existence de la variance) :

Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Alors X possède une variance si et seulement si X et X^2 possède une espérance.

Remarque :

Pour justifier l'existence de la variance, on n'utilise jamais la définition! Par contre, on utilise systématiquement cette caractérisation! Arf. ■

Définition :

Soit X une var discrète infinie sur (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance. On appelle

1. moment d'ordre 2 de X le nombre $m_2(X) = E(X^2)$
2. variance de X le nombre $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$.
3. écart-type de X le nombre $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Proposition :

Soit X, Y deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance.

Alors la var $(X - E(X))(Y - E(Y))$ possède une espérance. Dans ce cas, on appelle covariance de X et Y le nombre

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Proposition :

Soient X, Y, Z trois var discrètes infinies (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance et a, b deux nombres réels. Alors on a

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$
3. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$
4. $\text{cov}(aX + bY, Z) = a \text{cov}(X, Z) + b \text{cov}(Y, Z)$
5. $\text{cov}(X, aY + bZ) = a \text{cov}(X, Y) + b \text{cov}(X, Z)$

Définition :

Soit X une var finie sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X est réduite si $\sigma(X) = 1$.

Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la var $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée var réduite associée à X .

Proposition :

1. Soient X, Y deux var discrètes infinies (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance.
Alors $X + Y$ et $X - Y$ possèdent une variance et on a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y), \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{cov}(X, Y)$$

2. Plus généralement, soient X_1, \dots, X_n n var discrètes infinies (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance.

Alors $\sum_{k=1}^n X_k$ possédant une variance et on a la formule

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Définition :

Soit X, Y deux var discrètes infinies (Ω, \mathcal{A}, P) possédant une variance. On appelle coefficient de

corrélacion linéaire de X et Y le nombre $\mu(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Proposition :

1. $\mu(aX + b, cY + d) = \begin{cases} \mu(X, Y) & \text{si } ac > 0 \\ -\mu(X, Y) & \text{si } ac < 0 \end{cases}$
2. On a toujours $|\mu(X, Y)| \leq 1$
3. $|\mu(X, Y)| = 1$ ssi il existe deux nombres réels a et b tel que

$$P(Y = aX + b) = 1$$

($Y = aX + b$ au sens du calcul des probabilité mais pas nécessairement au sens des applications)

20.3 Loi d'un vecteur aléatoires discrets finis

Définition de la loi d'un couple de var discrètes infinies :

Soient (X, Y) un couple de var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

On appelle loi du couple (X, Y) (ou loi de (X, Y) ou loi conjointe de X et Y) la donnée de l'ensemble des valeurs possibles du couple (X, Y) c'est-à-dire de l'ensemble $\{(x_n, y_m), n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ ainsi que de toutes les probabilités $p_{n,m} = P[(X = x_n) \cap (Y = y_m)], n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}$.

Théorème :

Un ensemble $\{(x_n, y_m), n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$ et une famille de nombres réels $(p_{n,m})_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}$ définissent une loi de probabilité si et seulement si

$$1. p_{n,m} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}$$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = 1$$

($\forall m \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} p_{n,m}$ doit converger puis, si on pose $d_m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m}$, la série

$\sum_{m \geq 0} d_m$ converge et $\sum_{m=0}^{+\infty} d_m = 1$.)

ou encore de façon équivalente

($\forall n \geq 0$, la série $\sum_{m \geq 0} p_{n,m}$ puis, si on pose $d_n = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m}$, la série $\sum_{n \geq 0} d_n$ converge

et $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = 1$.)

Définition :

Les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) . La loi de la var X (resp. Y) s'appelle la loi marginale de X (resp. Y) du couple (X, Y) . Traditionnellement on note $P(X = x_n) = p_{n\bullet}$ et $P(Y = y_m) = p_{\bullet m}$

Proposition (Reconstitution des lois marginales à partir de la loi conjointe) :

Pour tout couple (X, Y) , on a

loi de X

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = x_i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]$$

loi de Y

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p(Y = y_j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)].$$

20.4 Indépendances de deux var

Définition :

Soient X et Y deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On dit que X et Y sont indépendantes ssi $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall m \in \mathbb{N}$ on a

$$P((X = x_n) \cap (Y = y_m)) = P(X = x_n)P(Y = y_m)$$

Proposition :

Soient X et Y deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et soient A, B deux intervalles de \mathbb{R} . Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition (Indépendance et covariance) :

Soient X et Y deux var discrètes infinies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes possédant une variance alors : $E(XY) = E(X)E(Y)$. En particulier, $\text{cov}(X, Y) = 0$ et par conséquent

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y), \quad V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes possédants une variance alors

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

21 Lois discrètes infinies usuelles

Définition de la loi géométrique :

Soit $p \in]0; 1[$. On dit qu'une var X suit la loi géométrique de paramètre p (noté $X \sim \mathcal{G}(p)$) si et seulement si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^\times$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$

Méthode : Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire qui n'a comme aboutissement qu'un évènement A avec une probabilité p ou que l'évènement contraire \bar{A} avec la probabilité $1 - p$.

Si X désigne le nombre de fois où l'on a répété l'expérience \mathcal{E} (dans des conditions identiques i.e p est constant et les épreuves sont indépendantes) pour que l'évènement A se réalise alors $X \sim \mathcal{G}(p)$

On dit que X est le temps d'attente du premier évènement A ou encore X est le nombre d'expérience pour obtenir l'évènement A pour la première fois (la bouteille à moitié vide ou à moitié pleine). **fin de la méthode**

Définition de la loi de Poisson :

Soit λ un nombre réel strictement positif. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) si et seulement si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

Proposition :

Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Soit X_1 et X_2 deux var indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.