

Semestre : 2  
Module : Méthodes Quantitatives  
Elément : Mathématiques Economiques  
Enseignant : Mr BENMOUSSA

*Eléments du cours*

- Les Fonctions
- Les Intégrales simples
- Les Intégrales doubles
- Extrêmes de fonctions de deux variables

Numérisation & Conception  
**Mr Mohamed-Fadil ZIADI**

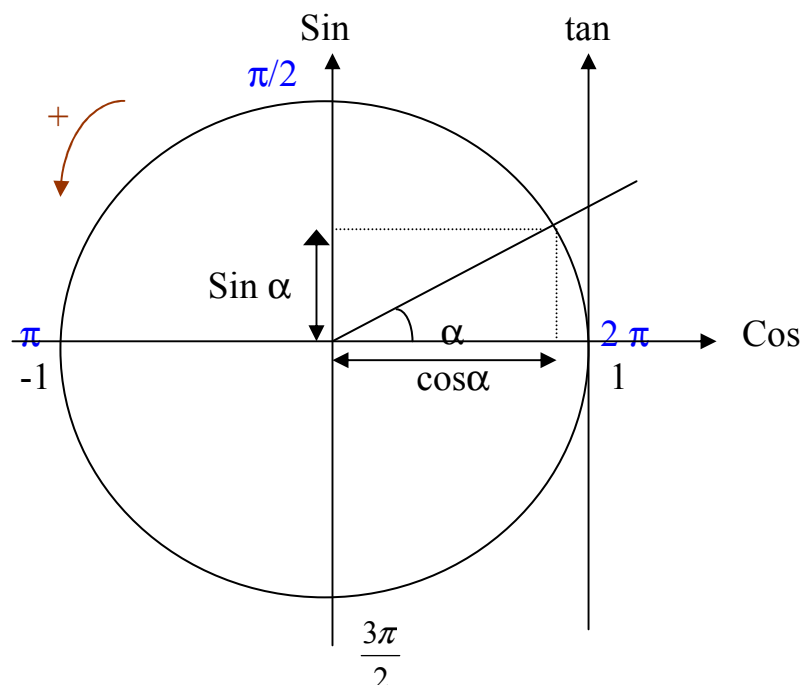


**PROGRAMME**

- I- Les Fonctions :
  - Fonctions trigonométriques.
  - Fonctions  $e^x$ .
  - Fonction  $\log x$ .
  - Elasticité.
  
- II- Les Intégrales simples :
  - Par parties.
  - Par changement de variables.
  - Fractions rationnelles.
  - Fractions irrationnelles.
  - Intégrales impropres.
  
- III- Les Intégrales doubles.
- IV- Extrêmes de fonctions de deux variables.

## Chapitre 1 : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

### I- Définition : cercle trigonométrique :



Rayon = 1.

$$R = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \\ -\infty < \operatorname{tg} \alpha < +\infty \end{cases}$$

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{Tg} \alpha$	0	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

$$-\alpha \quad \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

$$\pi - \alpha \quad \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

$$\pi + \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} + \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha. \end{array} \right.$$

## II- Formules trigonométriques:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

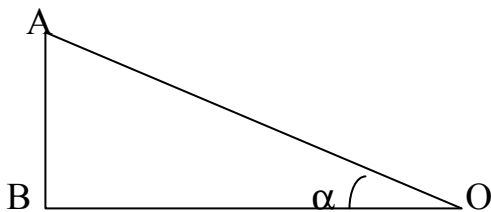
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Théorème de Pythagore :



$$OA^2 = AB^2 + OB^2$$

$$\Rightarrow 1^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

### III- Dérivées des fonctions trigonométriques :

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\cos(ax + b)$	$-a \cdot \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$	$a \cdot \cos(ax + b)$

### IV- Fonctions réciproques :

$$Y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$$

$$Y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

$$Y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y$$

### V- Etude de la fonction ( $y = \sin x$ ) :

#### 1- Domaine de définition :

$$D_f = \mathbb{R}.$$

#### 2- Parité :

Si  $f(-x) = f(x)$ .  $\Rightarrow$  la fonction est paire.

Si  $f(-x) = -f(x)$   $\Rightarrow$  la fonction est impaire.

Donc  $\sin(-x) = -\sin(x) \Rightarrow y$  est une fonction impaire.

#### 3- Périodicité :

Une fonction est périodique de période  $T$ .

$$\Leftrightarrow f(x + T) = f(x).$$

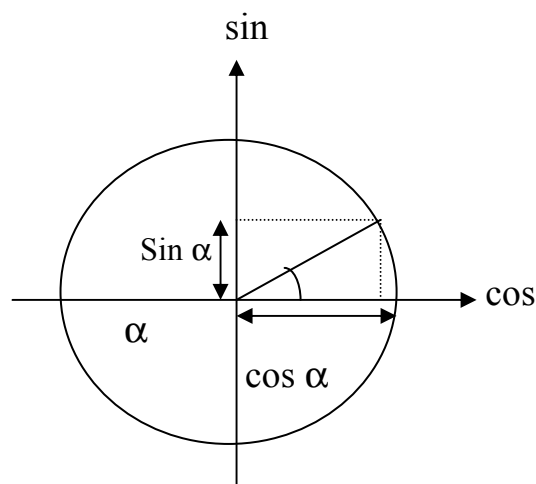
$$y = \sin(x)$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha.$$

$$\sin(\alpha + 4\pi) = \sin \alpha.$$

$$\sin(\alpha + k\pi) = \sin \alpha.$$

Donc dans ce cas  $T = 2\pi$

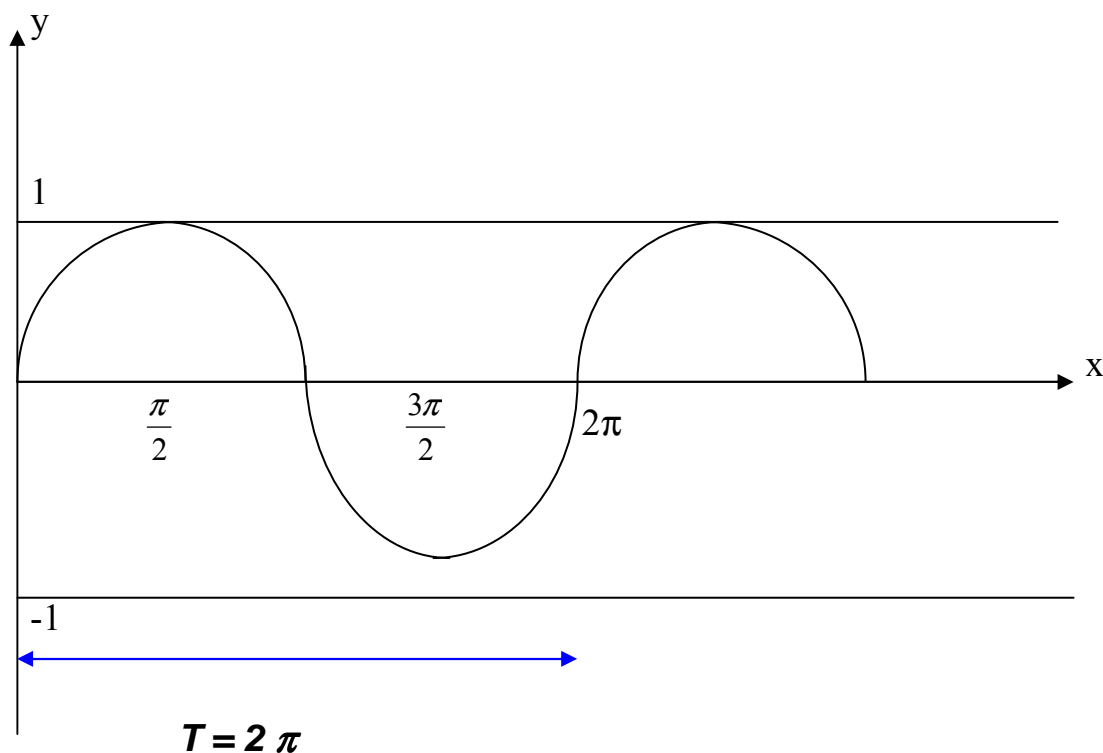


**4- Dérivée :**

$$y' = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 & \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x \leq 0 & \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

**5- Tableau de variation :**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
y'	+		-	+
y	0	1	-1	0

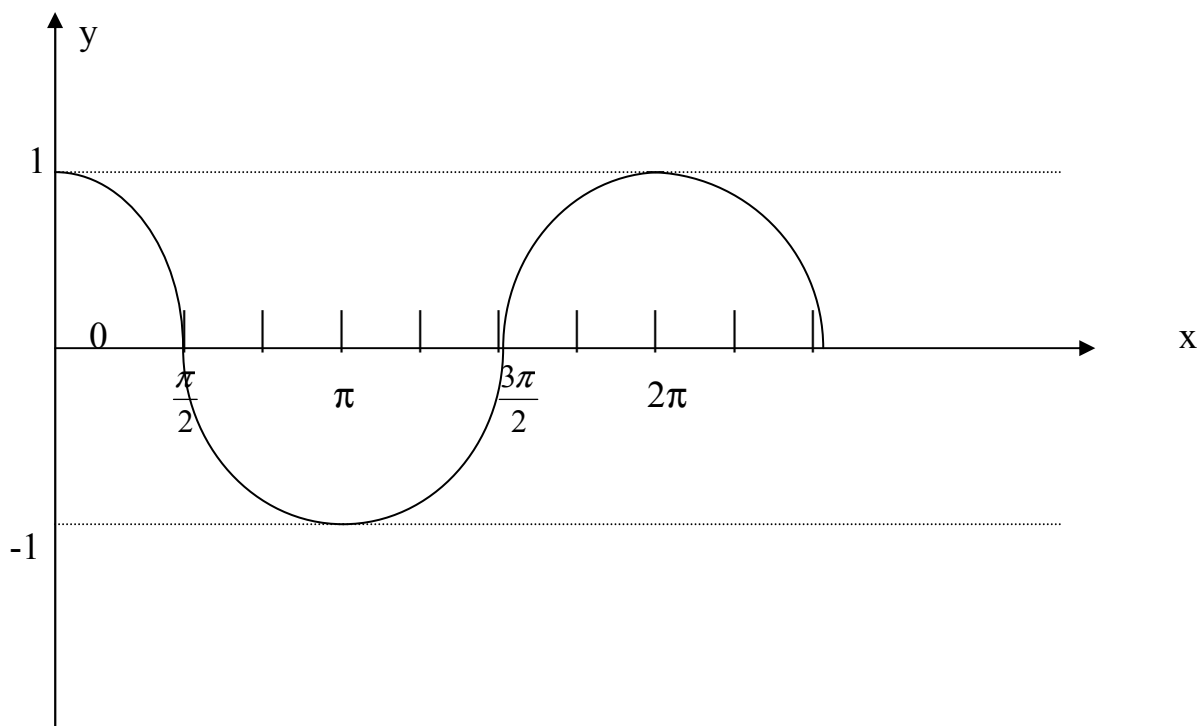
**6- La courbe :****VI- Etude de la fonction ( $y = \cos x$ ) :**

La dérivée de cette fonction est la suivante :

$$y' = -\sin x.$$

La table de variation se présente comme suit :

x	0	$\pi$	$2\pi$
$y'$		-	+
y	1	-1	1



## VII- Etude de la fonction ( $y = \operatorname{tg} x$ ) :

### 1- Période :

$\operatorname{Tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha$  est périodique et  $T = \pi$ .

### 2- Parité :

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \Rightarrow y = \operatorname{tg} x$  est impaire.

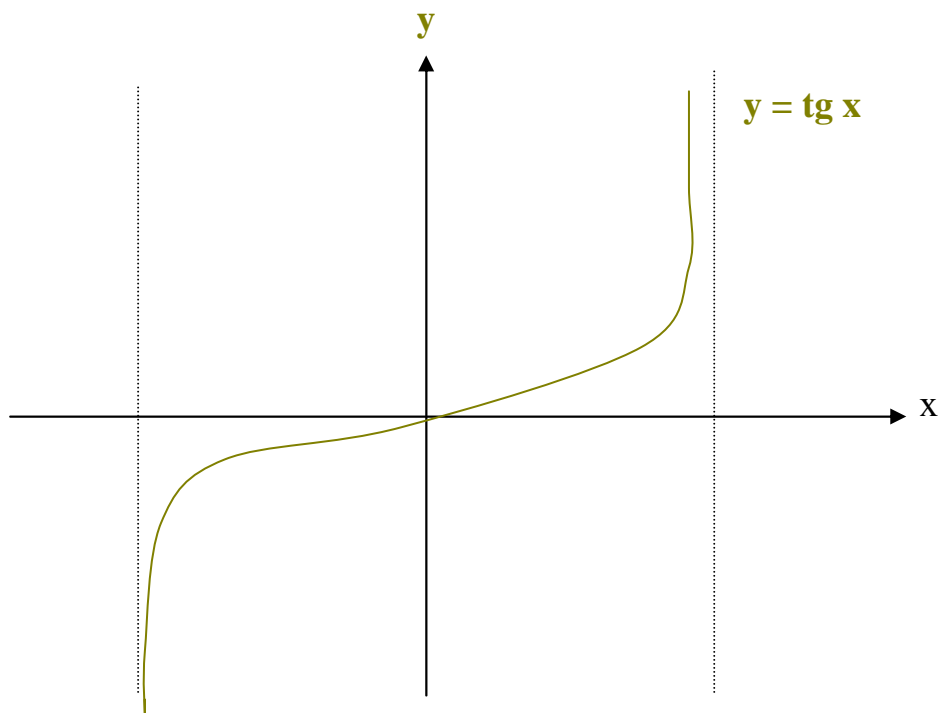
### 3- Dérivée :

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0.$$

### 4- Le tableau de variation :

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$y'$	+	
$y$	$-\infty \rightarrow +\infty$	

### 5- La courbe :



**Remarque : les asymptotes :**

### VIII- Exercices :

1/ Calculer le  $(\sin x)$  et la  $(\operatorname{tg} x)$ , sachant que  $\cos x = 1 - \sqrt{2}$ .

2/ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

a-  $2 \sin 3x = 1$ .

b-  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution :

1- On sait que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

On sait aussi que :  $\cos x = 1 - \sqrt{2}$ .



$$\Rightarrow \cos^2 x = (1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2.$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - (1 - 2\sqrt{2} + 2).$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)} = \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1} \times \sqrt{2}$$

•  $\text{tg} = ?$

On sait que  $1 + \text{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

$$\Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

$$\Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{1}{(1 - \sqrt{2})^2} - 1 = \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{(1 - \sqrt{2})^2}.$$

$$\Rightarrow \text{tg}^2 x = - \frac{2}{(1 - \sqrt{2})}.$$

$$\Rightarrow \text{tg}^2 x = \pm \sqrt{\frac{-2}{(1 - \sqrt{2})}} = \pm \sqrt{\frac{2}{(\sqrt{2} - 1)}}.$$

$$2- a- 2 \sin(3x) = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Observation: } \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} * x = \alpha + 2k\pi. \\ * x = (\pi - \alpha) + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} * x = \alpha + 2k\pi. \\ * x = -\alpha + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \\ 3x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi. \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b- } \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

### ☛ Consequences:

Il existe quatre solutions :

- $x_1 = \frac{\pi}{12}.$
- $x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi.$
- $x_3 = -\frac{\pi}{12}.$
- $x_4 = -\frac{\pi}{12} + \pi.$

## Chapitre 2 : FONCTION « $y = e^x$ »

### I- Définition :

$$e^0 = 1$$

$$e = 2,718.$$

### II- Propriétés :

$$1- y' = e^x.$$

$$2- e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$3- e^{a \cdot b} = (e^a)^b$$

$$4- \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

### III- Etude de la fonction $f(x) = e^x$ :

$$1- e^x \text{ est strictement croissante.}$$

$$2- D_f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$$

$$3- \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

### ☛ Exercice:

$$1- \text{Simplifier les expressions suivantes:}$$

$$a- e^x \cdot e^{-2x}$$

$$b- (e^{2x})^2 \cdot (e^{-3x})^4.$$

$$c- (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2.$$

$$2- \text{Soit la fonction : } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

$$a- \text{Calculer } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$3- \text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{3x} \right).$$

### ☛ Solution:

$$1- a- e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}.$$

$$b- (e^{2x})^2 \cdot (e^{-3x})^4 = e^{4x} \cdot e^{-12x} = e^{-8x}.$$

$$c- (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4.$$

2- On considère que :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$\lim_{-\infty} f(x) = -1.$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \frac{e^x}{e^x} \left[ \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 1.$$

Car on sait que  $\lim_{+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

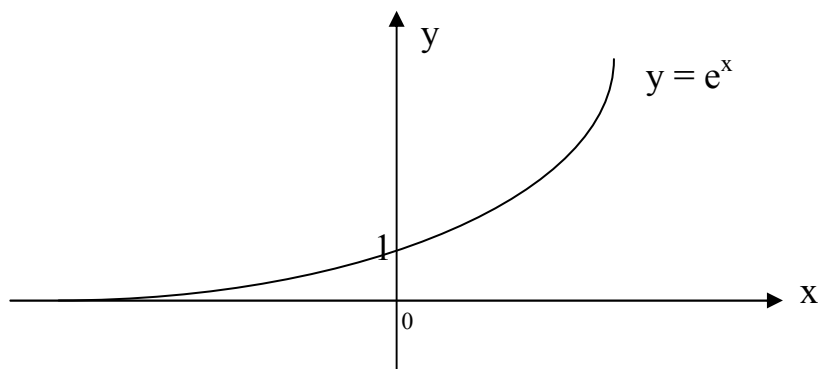
$$\begin{aligned} 3- \lim_0 \frac{e^x - 1}{3x} &= \frac{1}{3} \lim_0 \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

#### IV- Tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		+	
y	0	1	$+\infty$

Car on sait que :  $y' = e^x \neq 0.$

☛ La courbe :



#### V- Autres limites :

$$\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{-\infty} x e^x = 0.$$

## VI- Equations et inéquations:

\*  $e^a = e^b \Rightarrow a = b.$

\*  $e^a > e^b \Rightarrow a > b.$  Car  $e^x$  est strictement croissante.

## VII- Exercices :

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 1).$

2- Etudier le sens de variation de la fonction :  $f(x) = (x - 2)e^x.$

### ☛ Solution :

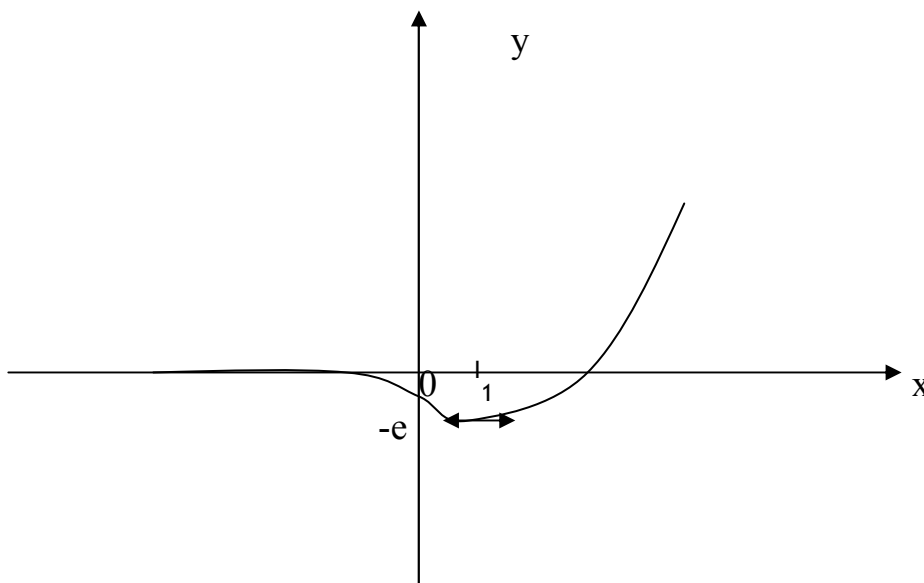
1-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$

2-  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[.$

On sait qu'au règle générale :  $(f.g)' = f'.g + f.g'$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x - 2)e^x = e^x(1 + x - 2) \\ &= e^x(x - 1). \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0		$+\infty$



## Chapitre 3 : FONCTIONS LOGARITHMES.

### I- Définition :

On appelle logarithmes de base « a » :

$$y = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Cas particulier : quand  $a = e \Rightarrow y = \log x$  (c'est le logarithme népérien).

$$y = \log x = \int_1^x \frac{1}{x} dx. \quad x > 0.$$

$$\text{Pour: } x = 1 \Rightarrow \log 1 = 0 = \int_1^1 \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Pour : } x = 0^+ \Rightarrow \log x = -\infty.$$

### 1- Dérivée :

$$y = \log x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.$$

### 2- Propriétés:

$$* \log(a.b) = \log a + \log b.$$

$$* \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

$$* \log \frac{1}{a} = -\log a.$$

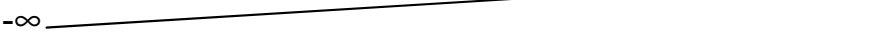
$$* \log a^n = n. \log a$$

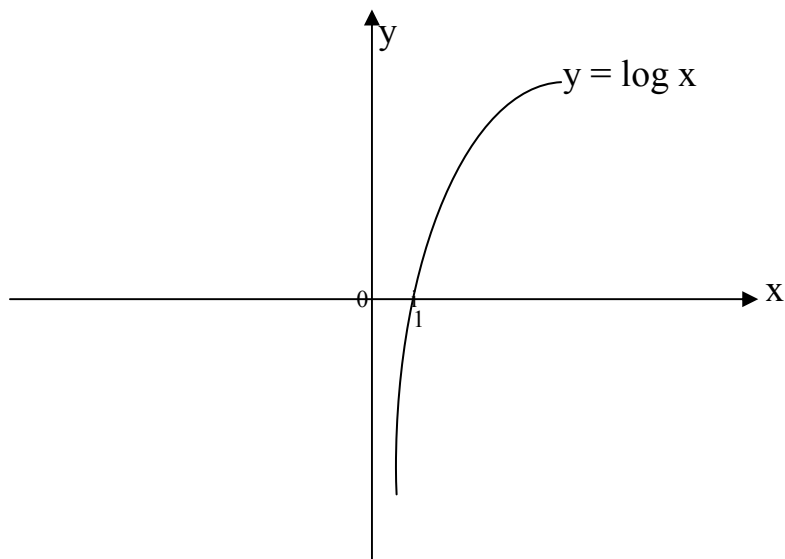
### II- Etudier la fonction $y = \log x$ :

$$* D_f = ]0, +\infty[$$

$$* y' = \frac{1}{x} \neq 0.$$

x	$0^+$	1	$+\infty$
$y'$		+	
y	$-\infty$	0	$+\infty$





### ☛ Exercices :

Etude des fonctions :

a-  $y = 3 \log x + 2$ .

b-  $y = \log (x - 2)$ .

### Solutions :

a-  $D_f = ]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3}{x}.$$

x	$0^+$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

b-  $D_f = ]2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2}$$

x	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

### III- Limites :

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^-$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0^-$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

### IV- Exercices:

1- Etude de la fonction :  $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

Et tracer le graphique.

2- Etude de la fonction :  $y = x \log x - 3x$ .

3- Etude de la fonction :  $y = (x-2) e^{-\frac{1}{x}}$ .

#### ☛ Solution :

1- Etude de la fonction :  $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

$$* D_f = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \quad \text{car on a } (x \neq 0).$$

$$* y' = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= (2x - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{On a: } y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{on sait que } e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ donc : } e^{\frac{1}{x}} \neq 0.$$

Donc le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$y'$	-	-	+	
y	$+\infty$ ↘ 0	$+\infty$ ↘ $\frac{1}{4}e^2$	↗ $+\infty$	

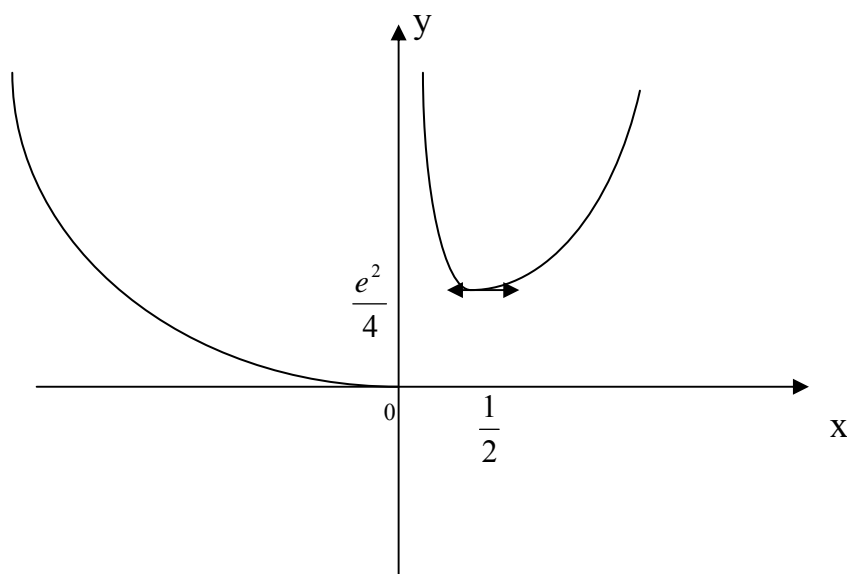


$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}) = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}) = 1$$



2- Etude de la fonction :  $y = x \log x - 3x$ .

$$* D_f = ]0, +\infty[.$$

$$* y' = (x \log x)' - (3x)' = \log x + x (\log x)' - 3$$

$$y' = \log x - 2.$$

$$\text{On a : } y' = 0 \Leftrightarrow \log x - 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = e^2.$$

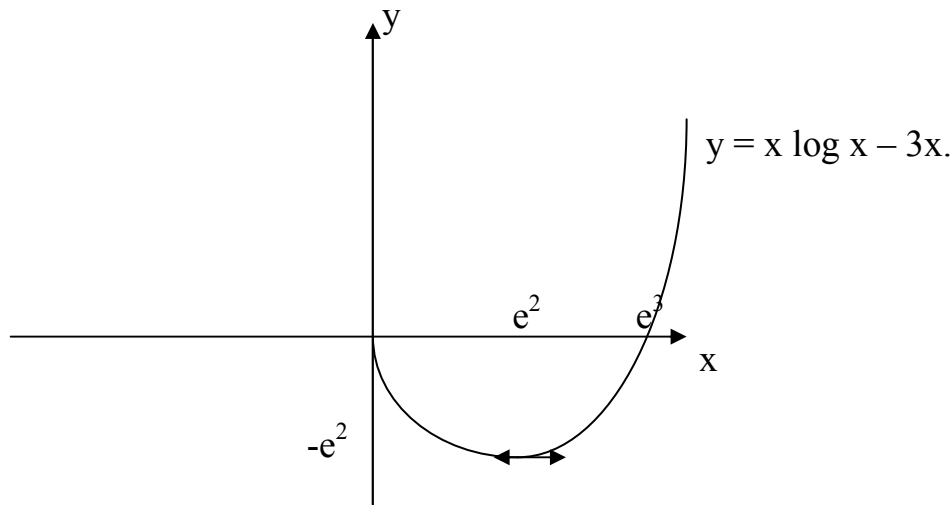
\* Tableau de variation :

x	0	$e^2$	$+\infty$
$y'$	-	0	+
y	$+\infty$	$e^{-2}$	$+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\log x - 3) = +\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x - 3x = 0$$

\* Représentation graphique:



3- Etude de la fonction :  $y = (x - 2) e^{\frac{1}{x}}$  :

\*  $D_f = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} * f'(x) &= e^{\frac{1}{x}} + (x - 2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}} + \frac{x-2}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \left( 1 + \frac{x-2}{x^2} \right) \\ &= e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

On a  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x^2} \right) = 0$

On sait que  $e^{\frac{1}{x}} \neq 0$  et  $x^2 \neq 0$ .

Donc  $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 9 = 3^2$ .

$x_1 = 1$  et  $x_2 = -2$ .

\* Tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	-		+
y	$-\infty$	$\nearrow -4\sqrt{2}$	$\searrow -\infty$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) e^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) e^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

\* Asymptotes obliques:

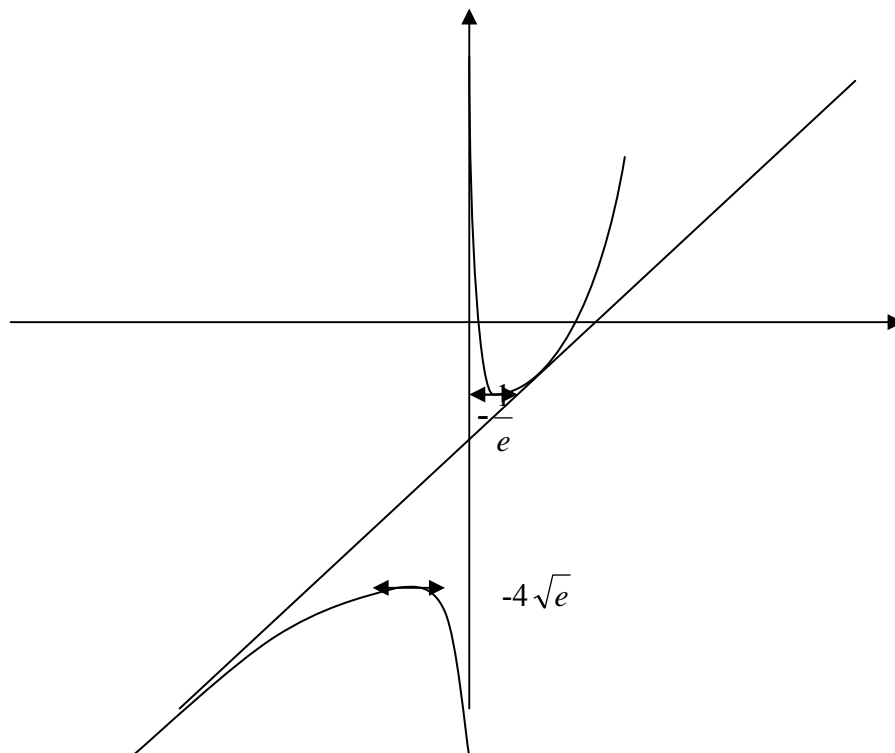
$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}. \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x. \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} - 2 e^{\frac{1}{x}} - x. \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x [e^{\frac{1}{x}} - 1] - 2 e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

On met:  $X = -\frac{1}{x}$ .

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{X} [e^X - 1] - 2 e^X = -3.$

\* Représentation graphique :



## Chapitre 4 : INTEGRALES

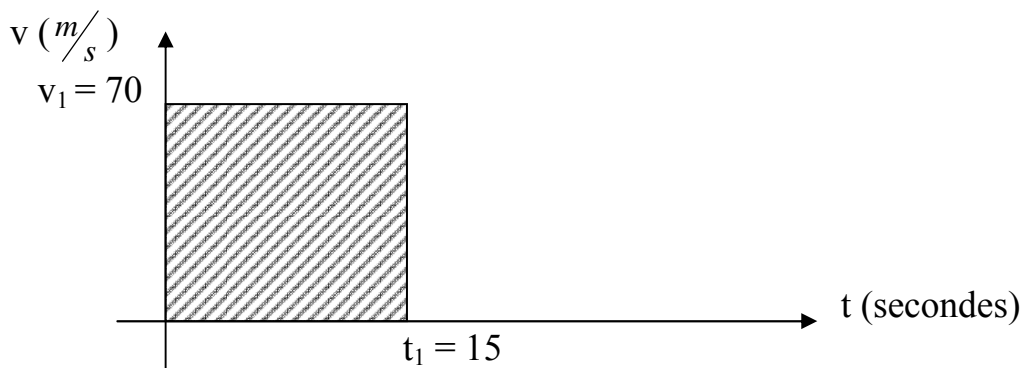
### I- Principes :

#### 1- 1<sup>er</sup> cas :

Un train roule à la vitesse de  $v = 70 \text{ m/s}$  Durant un temps de  $t = 15$  secondes.

Quelle est la distance parcourue par le train ?

On sait que :  $d = v.t$  donc :  $d = 70 * 15 = 1050 \text{ m}$ .



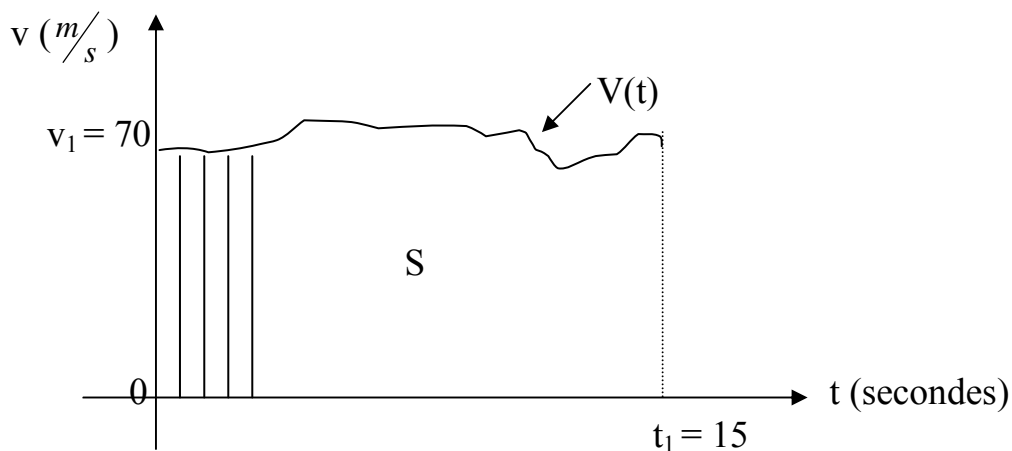
$d = v.t = \text{aire du rectangle hachuré.}$

#### 2- 2<sup>ème</sup> cas :

La vitesse du train n'est pas constante et varie en fonction du temps « t », donc  $v = v(t)$ .

On sait que :  $d = v.t$ .

Donc :  $d(t) = v(t) . t$ .

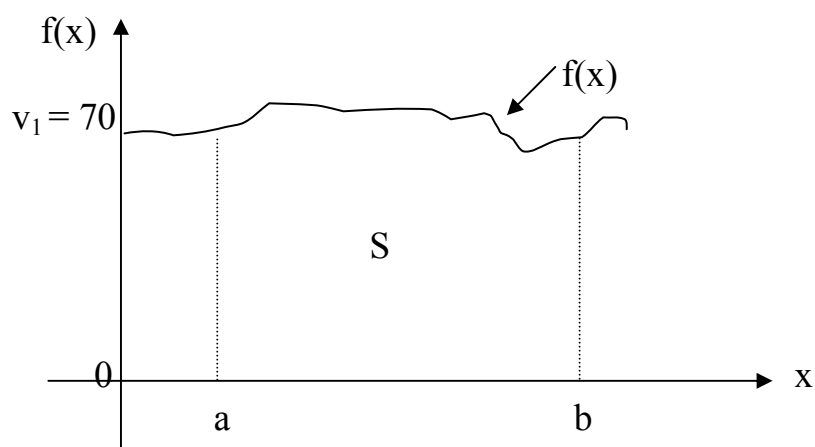


$$d = \sum_{i=0}^{15} d_i = \int_0^{15} f(t) dt = S.$$

C'est la somme des aires des petits rectangles.

## II- Intégrale d'une fonction sur un intervalle :

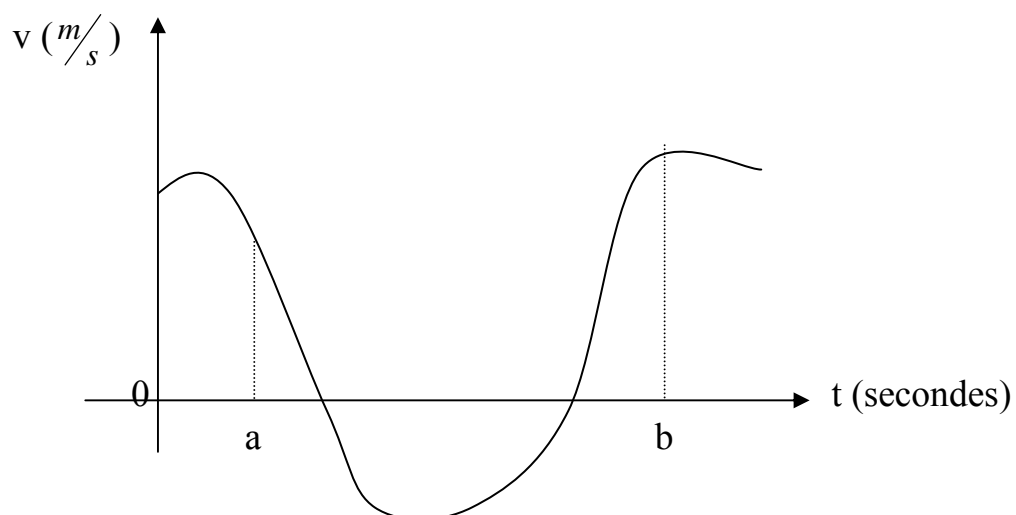
### 1- Définition :



$$I = \int_a^b f(x) dx = \text{aire } S.$$

### ☛ Remarque:

L'intégrale (aire) peut être positif ou négatif.



**2- Propriétés :**

Si « f » est constante  $\Rightarrow I = \int_a^b kf(x) dx$ .

$$I = k(b - a).$$

**3- Valeur moyenne d'une fonction f(x) :**

$$M = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

**III- Propriétés générales d'une intégrale :****1- Théorème :**

Toute fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$  admet un intégrale.

**2- Propriétés :**

$$* \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$* \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$* \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

$$* \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

$$* \int_a^b f(f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$* \text{ Si } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x).$$

**IV- Primitives d'une fonction :****1- Théorème :**

Soit  $f(x)$  une fonction continue sur  $I = [a, b]$ .

L'application :  $F : x \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $I$ , et la dérivée de  $F(x)$  est  $F'(x) = f(x)$ .

**2- Propriétés :**

Toute fonction  $f(x)$  continue sur  $I$  possède plusieurs primitives.

Si «  $f$  » admet une primitive «  $F$  » sur  $I$ , alors «  $G = F + k$  » est aussi primitive de «  $f$  ».

Avec «  $k$  » constante.

L'intervalle « $I$ »	Fonction « $f$ »	Primitive « $F$ »
$\mathbb{R}$	$a$	$ax + b$
$\mathbb{R}$	$x$	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$\mathbb{R}$	$x^n ; n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\mathbb{R}_*^+$ ou $\mathbb{R}_*^-$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\mathbb{R}_*^+$ ou $\mathbb{R}_*^-$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\mathbb{R}_*^+$	$x^r ; r \in (\mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	Arctan $x + c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{(\cos)^2}$	$\tan x + c$
$]k\pi ; \pi + k\pi[$	$1 + \cotan^2 x = \frac{1}{(\sin)^2}$	$-\cotan x + c$
« $u$ » est dérivable sur $I$ et strictement positive sur $I$	$u' \times u^n ; n \in (\mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
« $u$ » est dérivable sur $I$ et strictement positive sur $I$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
« $u$ » est dérivable sur $I$	$\frac{u'}{1+u^2}$	Arctan ( $u$ ) + $c$
« $v$ » est dérivable et ne s'annule pas sur $I$	$\frac{v'}{v^2}$	$-\frac{1}{v} + c$
« $u$ et $v$ » sont dérivables sur $I$	$u' + v'$	$u + v + c$
« $u$ et $v$ » sont dérivables sur $I$	$u'v + uv'$	$u.v + c$
« $u$ et $v$ » sont dérivables sur $I$ et $v \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c$
« $v$ » est dérivable sur $I$ et « $u$ » est dérivable sur $v(I)$	$u'(v(x)) \times v'(x)$	$(u \circ v)_{(x)} + c$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax + b) ; a \neq 0$	$(\frac{1}{a}) \sin(ax + b) + c$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax + b) ; a \neq 0$	$-(\frac{1}{a}) \cos(ax + b) + c$

**V- Intégration par partie :**

$$\int U'V = U.V - \int U.V'.$$

**☛ Exemples :**

Calculer les intégrales suivantes :

$$1- \quad I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos x \cdot dx.$$

$$\text{On pose:} \quad \begin{cases} V = x \\ U' = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} V' = 1 \\ U = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= [x \cdot \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \cdot dx \\ &= [x \cdot \sin x]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi} \\ &= (\pi \cdot \sin \pi - 0) + (\cos \pi - \cos 0). \\ I &= -2. \end{aligned}$$

$$2- \quad I = \int (x^2 + \frac{2}{x}) \, dx.$$

$$I = \int x^2 \, dx + \int \frac{2}{x} \, dx.$$

$$I = \frac{x^3}{3} + 2 \log x + k.$$

$$3- \quad I = \int_2^4 x \sqrt{x^2 + 4} \, dx.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_2^4 2x(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + 4}{\frac{1}{2} + 1} \right)^{\frac{1}{2} + 1} dx = \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Car on sait que: } \int U' U^m = \frac{U^{m+1}}{m+1}.$$

$$4- \quad I = \int 5x^3 \sqrt{x^4 + 1} \, dx.$$

$$I = \int 5x^3 (x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$



$$= \frac{5}{4} \frac{(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{15}{16} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

5-  $I = \int_1^e \log x \, dx.$

On pose :  $\begin{cases} U' = 1 \\ V = \log x \end{cases} \quad \begin{cases} U = x \\ V' = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$I = [x \log x]_1^e - \int_1^e dx = [x \log x - x]_1^e.$$

$$I = 1.$$

6-  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \, dx.$

On sait que :  $\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b).$

Donc:  $I = [-\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4})] = -\frac{1}{2} [\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{4}].$

On sait que :  $\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4}.$

Donc :  $I = -\frac{1}{2} [-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

7-  $I = \int_0^1 (2t - 4)e^t \, dt.$

On pose :  $\begin{cases} U = (2t - 4) \\ V' = e^t \end{cases} \quad \begin{cases} U' = 2 \\ V = e^t. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 (2t - 4)e^t \, dt = [e^t (2t - 4)]_0^1 - \int_0^1 2e^t \, dt.$$

$$= [e(-2) - (-4)] - 2[e^t]_0^1.$$

$$= -4e + 6.$$

$$8- \quad I = \int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx.$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} V = \log x \\ U' = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} V' = \frac{1}{x} \\ U = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[ -\frac{1}{x} \cdot \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx. \\ &= \left[ -\frac{1}{e} \cdot \text{Log } e + 1 \cdot \log 1 \right] - \left[ \frac{1}{e} - 1 \right]. \\ &= -\frac{2}{e} + 1. \end{aligned}$$

$$9- \quad I = \int_0^{\pi} 2t \sin t \, dt.$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} V = 2t \\ U' = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} V' = 2 \\ U = -\cos t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= -[2t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2 \cos t \, dt. \\ &= -[2 \pi \cos \pi - 0] + 2 [\sin t]_0^{\pi}. \\ &= 2 \pi. \end{aligned}$$

## VI- Décomposition :

$$\text{Décomposition de : } R(x) = \frac{1+x}{(x+4)^2(x-1)}.$$

$$R(x) = \frac{1+x}{(x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x-1)}.$$

$$* \text{ Calculer B : } B = \frac{3}{5}$$

$$* \text{ Calculer C : } C = \frac{2}{25}$$

$$* \text{ Calculer A : } A = -\frac{2}{25}$$

### 3- Lorsque $d^\circ P(x) \geq d^\circ Q(x)$ :

La méthode des calculs est la division euclidienne.

P(x)	Q(x)
	p(x)
r(x)	

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \quad \text{avec } d^{\circ} r(x) < d^{\circ} Q(x).$$

☛ Exemple :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4}{x(x+1)^2} . \quad \text{On a } d^{\circ} P(x) > d^{\circ} Q(x).$$

$$x(x+1)^2 = x(x^2 + 2x + 1).$$

$$= x^3 + 2x^2 + x.$$

$x^4$	$x^3 + 2x^2 + x$
$x^4 + 2x^3 + x^2$	
$-2x^3 - x^2$	$x - 2$
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	
$3x^2 + 2x$	

$$\frac{x^4}{x(x+1)^2} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + x} = (x - 2) + \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2 + x} .$$

$$= (x - 2) + \frac{3x + 2}{(x+1)^2} .$$

Calcul de  $I = \int \frac{x^4}{x(x+1)^2} dx.$

$$I = \int x - 2 \, dx + \int \frac{3x + 2}{(x+1)^2} \, dx.$$

On pose:  $I_1 = \int x - 2 \, dx.$

$$I_2 = \int \frac{3x + 2}{(x+1)^2} dx.$$

$$I_2 = \int \frac{3x + 2}{(x+1)^2} dx. = 3 \int \frac{x}{(x+1)^2} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2} dx.$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 1} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \left[ \int \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \right] + \int \frac{2}{(x+1)^2} dx. \\
&= \frac{3}{2} \left[ \log(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] - \frac{2}{x+1}.
\end{aligned}$$

Donc :  $I + I_1 + I_2$ .

### ☛ Exercice :

Calculer :  $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx$

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

\* Calculer A :

$$A = [R(x) \times (x+1)]_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

\* Calculer B :

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2}{x^3} &= \frac{Ax}{x} + \frac{Bx^2}{x^2} = A + B = 0 \\
\Rightarrow B &= -A = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

\* Calculer C :

$$\text{On donne à } x=0. \text{ Donc } 1 = A + \frac{C}{1} \Rightarrow A + C = 1.$$

$$\Rightarrow C = 1 - A.$$

$$\Rightarrow C = \frac{3}{2}.$$

$$I = \int \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)} dx + \int \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)}{(x^2+1)} dx.$$

$$I = -\frac{1}{2} \log|x+1| + I_2$$

$$I_2 = \int \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)}{(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+3}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} dx.$$

$$= \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{3}{2} \text{artang } x.$$

$$I = -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{3}{2} \text{artang } x.$$