Université Mohamed V–Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
www.fsjesr.ac.ma Économiques et Sociales, Rabat
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Printemps–Été 2006/2007

Semestre : $\boldsymbol{S}_2$

Professeure : Amale LAHLOU

Sections : A & B

Contrôle Final

Durée : 2 heures

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

N.B. :
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés ;
- Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
- La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (1 point).

Exercice 1 : [2 pts]

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+x} - \sqrt{\dfrac{1}{x}-x}}{x+|x|}$.

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 : [10 pts]

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
2. Soit un réel $x < 0$.
   (a) Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
   (b) Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
   (c) Comparer les trois termes x, $1 - e^{-x}$ et xe^{-x} ;
3. La fonction réelle h définie par $h(x) = (1+x)e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^n(1-n)$ telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :
   $$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} ;$$
   (b) Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : [4 pts]

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\ (1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

Exercice 4 : [4 pts]

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Bonne Chance

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Printemps–Été 2006/2007
Section : A & B
Semestre : S_2

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1

On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{x+|x|}.$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 :

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
2. Soit un réel $x < 0$.
   (a) Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
   (b) Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
   (c) Comparer les trois termes :
   $$x, \qquad 1-e^{-x} \qquad \text{et} \qquad xe^{-x}$$
3. La fonction réelle h définie par
   $$h(x) = (1+x)e^{-x}$$
   est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux :
   $$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1-n)$$
   telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :
   $$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} ;$$
   (b) Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculer la limite suivante :
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Exercice 3 :

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\ (1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Réponse

Exercice 1

Considérons la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{x+|x|}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que si $x < 0$, alors $x + |x| = 0$ et par conséquent $D_f \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour $x > 0$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x} - \sqrt{\frac{1}{x}-x}}{2x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff x>0,\quad \frac{1}{x}+x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}-x \geqslant 0 \\ &\iff x>0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}-x \geqslant 0 \\ &\iff x>0 \quad \text{et} \quad 1-x^2 \geqslant 0 \\ &\iff x>0 \quad \text{et} \quad (1-x)(1+x) \geqslant 0 \\ &\iff x>0 \quad \text{et} \quad 1-x \geqslant 0 \\ &\iff x \in]0,1] \end{aligned}$$

Ainsi, $D_f =]0,1]$.

2. Étudions la continuité à droite de l'origine.

La fonction f est continue sur l'intervalle $D_f =]0,1]$ puisque c'est la composée de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}-\sqrt{\frac{1}{x}-x}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}+x}{2x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+x}+\sqrt{\frac{1}{x}-x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+x}+\sqrt{\frac{1}{x}-x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+x}+\sqrt{\frac{1}{x}-x}} \\ &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc, la fonction f est prolongeable par continuité à droite au point d'abscisse 0 et son prolongement sur $[0,1]$ est donné par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}-\sqrt{\frac{1}{x}-x}}{2x} & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice 2</u>

Considérons la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

1. Montrons que l'équation $g(x) = 2-x$ admet une solution unique sur le segment $[-2\ln(2), -\ln(2)]$.

Posons la fonction :

$$f(x) = g(x) - 2 + x = e^{-x} - 2 + x.$$

Cette fonction est continue sur le segment $[-2\ln(2), -\ln(2)]$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(-2\ln(2)) = 2(1-\ln 2) > 0 \\ f(-\ln(2)) = -\ln(2) < 0 \end{cases}$$

Alors, d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins $c \in]-2\ln(2), -\ln(2)[$ tel que

$$f(c) = 0 \qquad \text{i.e.,} \qquad e^{-c} = 2 - c.$$

Ceci veut dire que l'équation

$$e^{-x} = 2 - x$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]-2\ln(2), -\ln(2)[$. Or,

$$f'(x) = 1 - e^{-x} < 0, \qquad \forall\, x < 0$$

et par suite f est strictement décroissante sur $[-2\ln(2), -\ln(2)]$. Ainsi, la solution trouvée de l'équation $e^{-x} = 2 - x$ est unique sur $]-2\ln(2), -\ln(2)[$.

2. Soit un réel $x < 0$.

(a). Appliquons le Théorème des Accroissements Finis (T.A.F.) à g sur $[x, 0]$.

La fonction g est continue sur $[x, 0]$ pour tout $x < 0$ et dérivable sur $]x, 0[$ avec, $g'(x) = -e^{-x}$.

D'après T.A.F., il existe au moins $c \in]x, 0[$ tel que :

$$g(0) - g(x) = (0 - x)g'(c)$$

i.e.,

$$1 - e^{-x} = xe^{-c}.$$

(b). Déterminons le(s) point(s) vérifiant le T.A.F. On a D'après la question (a) : $c \in]-2\ln(2), -\ln(2)[$ et

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} = xe^{-c} &\iff e^{-c} = \frac{1-e^{-x}}{x} \\ &\iff c = -\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) \end{aligned}$$

(c). Comparons les trois termes x, $1-e^{-x}$ et xe^{-x}. D'après la question (a), le point c vérifiant le T.A.F. est tel que :

$$\begin{aligned} x < c < 0 &\implies 1 < e^{-c} < e^{-x} \\ &\implies xe^{-x} < xe^{-c} < x \quad (\text{car } x < 0) \\ &\implies xe^{-x} < 1 - e^{-x} < x \end{aligned}$$

On remarque qu'on a l'égalité des trois termes au point 0. D'où,

$$\forall\, x \leqslant 0, \qquad xe^{-x} \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant x$$

3. Soit la fonction réelle h définie par :

$$h(x) = (1+x)e^{-x}.$$

(a). Par un raisonnement par récurrence, montrons qu'il existe deux suites réelles de termes généraux

$$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1-n)$$

telles que la dérivée d'ordre n de la fonction h s'écrit :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$$

<u>*Vérifiation :*</u> Pour $n = 0$

$$h^{(0)}(x) = (a_0 x + b_0)e^{-x} = (x+1)e^{-x} = h(x) \quad (\text{vraie})$$

<u>*Hypothèse de récurrence :*</u> On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} = \left((-1)^n x + (-1)^n(1-n)\right)e^{-x}$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= (a_{n+1}x + b_{n+1})e^{-x} \\ &= \left[(-1)^{n+1}x + (-1)^{n+1}(1-(n+1))\right] e^{-x} \\ &= \left[(-1)^{n+1}x + (-1)^n n\right] e^{-x} \end{aligned}$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = (-1)^{n+1} \\ b_n = (-1)^{n+1}(1-(n+1)) = (-1)^n n \end{array} \right.$$

En effet,

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \left[h^{(n)}(x)\right]' \\ &= a_n e^{-x} - (a_n x + b_n)e^{-x} \\ &= (-a_n x + a_n - b_n)e^{-x} \\ &= (a_{n+1}x + b_{n+1})e^{-x} \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = -a_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \\ b_{n+1} = a_n - b_n = (-1)^n - (-1)^n(1-n) = (-1)^n n \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = (-1)^n \\ b_n = (-1)^n(1-n) \end{array} \right.$$

(b). Calculons la valeur de $h^{(2007)}(0)$.

$$h^{(2007)}(0) = (-1)^{2007}(1-2007) = 2006$$

4. En utilisant la règle de l'Hospital, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x}$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

Posons le changement de variable $X = e^x$, ainsi si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)\right]'}{[x]'} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2 - X}{X^2 - X + 1} \\ &= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X^2}{X^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)}{x} = 2$$

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle $x \mapsto (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}$.

On sait que :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ e^{-x} + x &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \end{aligned}$$

Posons $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, quand $x \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= (1+X)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \\ &\quad - \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} \\ &\quad - \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4).$$

Exercice 4

Étudions localement la fonction définie par son Développement Limité au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right)$$

⇝ Si $2 \in D_f$ alors la fonction f est continue au point 2 et $f(2) = 1$.

⇝ Si $0 \notin D_f$ alors la fonction f est prolongeable par continuité au point 2 et son prolongement est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & x \in D_f \\ 1 & x = 2 \end{array} \right.$$

(Dans ce cas, on notera dans toute la suite le prolongement de f par tout simplement f au lieu de $\tilde{f}$).

⇝ On peut déterminer un équivalent de f au voisinage de 2 :

$$f(x) - 1 \sim_2 \frac{1}{6}(x-2)^2.$$

⇝ L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donnée par $y = 1$.

⇝ Comme

$$\lim_{x\to 2}(f(x) - y) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o\left((x-2)^3\right) = 0^+$$

alors la courbe représentative de f est au dessus de la tangente $y = 1$ au point $(0, 1)$.

$\rightsquigarrow$ f est trois fois dérivable au point 2 et on a :

$$f'(2) = 0$$

$$\frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{6} \iff f''(2) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f''(3)}{3!} = -\frac{1}{6} \iff f''(3) = -1$$

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ alors le point $(2, 1)$ est un point critique de f,

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ et le premier exposant de l'équivalence susmentionnée est paire $((x-2)^2)$, alors f présente un extremum en ce point et comme en plus le coefficient de cet exposant est $\frac{1}{6} > 0$, alors la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$,

$\rightsquigarrow$ Comme la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$ alors f est convexe au voisinage de ce point.

Université Mohamed V–Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Automne–Hiver 2008-2009

Semestre : S_1

Professeure : Amale LAHLOU
www.amalelahlou.net

Section : B

Contrôle Final

Mercredi, 07 Janvier 2009
Durée : 2 heures

Module 3 : Introduction aux Sciences Économiques
Matière : Instruments d'Analyse Économique

N.B. :
- Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
- La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (2 points).

Exercice 1 : [3 points]

Soient p et q deux propositions simples. En utilisant les règles logiques, simplifier la proposition composée :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Exercice 2 : [3 points]

Via un raisonnement par récurrence, montrer que $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : [2 points]

La relation binaire suivante est-elle une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$?

$$a, b \in \mathbb{N} \qquad a\,\mathcal{R}\,b \iff \exists n \in \mathbb{N} \qquad a - b = 3n.$$

Exercice 4 : [6 points]

Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par : $\quad I_m = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\} \qquad$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Écrire en extension l'intervalle I_m ;
2. Expliciter les intervalles I_{-1}, I_0, I_1 et I_2 ;
3. En déduire l'ensemble $I_2 \cap \mathbb{N}$;
4. Déterminer les valeurs de m pour que $I_m \subseteq [-3, 2]$;
5. Existe-il m tel que $I_m \cap [-3, 2] = \emptyset$.

Exercice 5 : [6 points]

Soit le polynôme : $\quad P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$

1. Calculer $P(-1)$ et $P(1)$, puis conclure ;
2. Déterminer $Q(x)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$;
3. Vérifier que 2 est racine de $Q(x)$, puis factoriser $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés ;
4. En déduire une factorisation en éléments simples de $P(x)$.

Bonne Chance

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Automne–Hiver 2008-2009
Section : B
Semestre : S_1

Module 3 : Introduction aux Sciences économiques
Matière : Instruments d'Analyse Économique

Professeure Amale LAHLOU
www.amalelahlou.net

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1 : Soient p et q deux propositions simples. En utilisant les règles logiques, simplifier la proposition composée :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Exercice 2 : Via un raisonnement par récurrence, montrer que $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : La relation binaire suivante est-elle une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$?

$$a, b \in \mathbb{N} \qquad a\,\mathcal{R}\,b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad a - b = 3n.$$

Exercice 4 : Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par : $I_m = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Écrire en extension l'intervalle I_m ;
2. Expliciter les intervalles I_{-1}, I_0, I_1 et I_2 ;
3. En déduire l'ensemble $I_2 \cap \mathbb{N}$;
4. Déterminer les valeurs de m pour que $I_m \subseteq [-3, 2]$;
5. Existe-il m tel que $I_m \cap [-3, 2] = \emptyset$.

Exercice 5 : Soit le polynôme :

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. Calculer $P(-1)$ et $P(1)$, puis conclure ;
2. Déterminer $Q(x)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$;
3. Vérifier que 2 est racine de $Q(x)$, puis factoriser $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés ;
4. En déduire une factorisation en éléments simples de $P(x)$.

Réponse

Solution 1 : Simplifions l'expression suivante :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

$$\begin{aligned}
& (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \\
\equiv\ & [(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \text{ (car } \vee \text{ associative)} \\
\equiv\ & [p \wedge (\bar{q} \vee q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \text{ (} \wedge \text{ distributive par rapport à } \vee \text{)} \\
\equiv\ & (p \wedge \theta) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \text{ (car } \bar{q} \vee q = \theta \text{ tautologie)} \\
\equiv\ & p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \ \text{ (car } p \wedge \theta = p, \theta \text{ neutre pour } \wedge \text{)} \\
\equiv\ & (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \ \text{ (} \vee \text{ distributive par rapport à } \wedge \text{)} \\
\equiv\ & \theta \wedge (p \vee \bar{q}) \ \text{ (car } p \vee \bar{p} = \theta \text{)} \\
\equiv\ & p \vee \bar{q} \ \text{ (car } \theta \text{ neutre pour } \wedge \text{)}
\end{aligned}$$

D'où, la proposition

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv p \vee \bar{q}.$$

■

Solution 2 : Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n - 1 \text{ est divisible par 3.}$$

c'est-à-dire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad 4^n - 1 = 3k.$$

Vérification : Pour $n = 0$ on a $4^0 - 1 = 0 = 3(0)$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supossons que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est-à-dire,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \quad 4^n - 1 = 3k.$$

Démonstration : Montrons que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$, c'est-à-dire,

$$\exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \quad 4^{n+1} - 1 = 3k'.$$

$$\begin{aligned}
4^{n+1} - 1 &= 4.4^n - 1 \\
&= 4(3k+1) - 1 \\
&= 3(4k) + 3 \\
&= 3(4k+1) \\
&= 3k'
\end{aligned}$$

avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3. ■

Solution 3 : Soit la relation binaire :

$$a, b \in \mathbb{N} \qquad a\,\mathcal{R}\,b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \qquad a - b = 3n.$$

$\mathcal{R}$ n'est pas une relation symétrique dans $\mathbb{N}$ est par suite, elle n'est pas une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$. En effet, si pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a\,\mathcal{R}\,b$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = 3n$, et par suite $b - a = 3(-n)$.Ce qui implique qu'on a pas $b\,\mathcal{R}\,a$ puisque $(-n) \notin \mathbb{N}$. ■

Solution 4 Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par :

$$I_m = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\} \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Écrivons en extension l'intervalle I_m :

$$\begin{array}{rcl} I_m & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad |x-1| \leq m^2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad -m^2 \leq x-1 \leq m^2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} / \quad 1-m^2 \leq x \leq 1+m^2\} \\ & = & [1-m^2, 1+m^2]. \end{array}$$

2. Explicitons les intervalles I_{-1}, I_0, I_1 et I_2 :

$$\begin{array}{rcccl} I_{-1} & = & [1-1, 1+1] & = & [0,2] \\ I_0 & = & [1-0, 1+0] & = & \{1\} \\ I_1 & = & [1-1, 1+1] & = & [0,2] \\ I_2 & = & [1-4, 1+4] & = & [-3,5] \end{array}$$

3. $I_2 \cap \mathbb{N} = [-3,5] \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5\}$.

4. Déterminer les valeurs de m pour que :

$$I_m \subseteq [-3,2]$$

$$\begin{array}{rcl} I_m \subseteq [-3,2] & \Leftrightarrow & -3 \leq 1-m^2 \text{ et } 1+m^2 \leq 2 \\ & \Leftrightarrow & m^2 \leq 4 \text{ et } m^2 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & m^2 \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & |m| \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & -1 \leq m \leq 1 \\ & \Leftrightarrow & m \in [-1,1]. \end{array}$$

5. Il n'existe aucune valeur de m telle que

$$I_m \cap [-3,2] = \emptyset.$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} I_m \cap [-3,2] = \emptyset & \Leftrightarrow & 1+m^2 < -3 \text{ ou bien } 2 < 1-m^2 \\ & \Leftrightarrow & m^2 < -4 \text{ ou bien } m^2 < -1 \end{array}$$

et dans les deux cas c'est impossible. ■

Solution 5 : Soit le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. On a :

$$\begin{array}{rcccl} P(-1) & = & -1-1+9+13-8-12 & = & 0 \\ P(1) & = & 1-1-9+13+8-12 & = & 0 \end{array}$$

$P(x)$ est divisible par $(x+1)$ et par $(x-1)$. Donc, $P(x)$ est divisible par $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$.

2. Déterminons $Q(x)$, le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par (x^2-1) :

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ \hline -x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 8x - 12 & \\ x^4 - x^2 & \\ \hline -8x^3 + 12x^2 + 8x - 12 & \\ 8x^3 - 8x & \\ \hline 12x^2 - 12 & \\ -12x^2 + 12 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Donc,

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Ainsi,

$$P(x) = (x^2-1)(x^3 - x^2 - 8x + 12).$$

3.

$$Q(2) = 2^3 - 2^2 - 8(2) + 12 = 0$$

Donc, 2 est bien une racine de $Q(x)$.

Factorisons $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés : on remarque que $\deg(Q(x) = 3$ et et $Q(x)$ est divisible par $(x-2)$. Autrement dit,

$$\exists Q_1(x) \in \mathbb{R}[X], \quad Q_1(x) = ax^2+bx+c \, (a,b,c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0)$$

tel que,

$$Q(x) = (x-2)Q_1(x).$$

Ainsi,

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(ax^2+bx+c).$$

De façon directe, on peut montrer que

$$a = 1 \quad \text{et} \quad c = -6.$$

Reste à déterminer b.

$$\begin{array}{rcl} x^3 - x^2 - 8x + 12 & = & (x-2)(ax^2+bx+c) \\ & = & (x-2)(x^2+bx-6) \\ & = & x^3 + (b-2)x^2 - (6+2b)x + 12 \end{array}$$

Par identification des coefficients des deux polynômes, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} b-2 = -1 \\ 6+2b = 8 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad b = 1.$$

Ainsi, $Q_1(x) = x^2 + x - 6$ et par suite,

$$Q(x) = (x-2)(x^2+x-6).$$

En calculant le discriminant de $Q_1(x) = 0$ ($\Delta = 5^2$), on trouve que $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ sont deux racines de $Q_1(x)$. D'où,

$$Q_1(x) = (x-2)(x+3)$$

et par suite,

$$Q(x) = (x-2)(x+3)(x-2) = (x-2)^2(x+3).$$

4. On déduit que :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x^2-1)Q(x) \\ & = & (x-1)(x+1)(x-2)^2(x+3). ■ \end{array}$$

Université Mohamed V–Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Printemps–Été 2006/2007

Semestre : $\boldsymbol{S}_2$

Professeure : Amale LAHLOU

Sections : A & B

Contrôle de Rattrapage

Durée : 1 heure et demi

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

N.B. :
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés ;
- Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
- La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (1 point).

Exercice 1 : [5 pts]

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ;
3. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2 : [6 pts]

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

1. Déterminer les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f ;
2. En déduire le domaine de convexité de f.

Exercice 3 : [3 pts]

Déterminer le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

en effectuant dans une étape intermédiaire la division selon les puissances croissantes à un ordre bien déterminé.

Exercice 4 : [6 pts]

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Déterminer le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1 ;
2. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, au voisinage de l'infini ;
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

Bonne Chance

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques, Économiques et Sociales, Rabat
www.fsjesr.ac.ma
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Printemps–Été 2006/2007
Section : A & B
Semestre : S_2

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle de Rattrapage

Énoncé

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f ;
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ;
3. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

1. Déterminer les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f ;
2. En déduire le domaine de convexité de f.

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

en effectuant dans une étape intermédiaire la division selon les puissances croissantes à un ordre bien déterminé.

Exercice 4

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Déterminer le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1,
2. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f, au voisinage de l'infini,
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

Réponse

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminons le domaine de définition de f.

La fonction f est la composée de deux fonctions : $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ qui n'est définie que si $1+x \neq 0$ (i.e., $x \neq -1$) et la fonction $X \mapsto \ln(X)$ qui est bien définie pour tout $X > 0$. Alors,

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, / \quad x \neq -1 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}.$$

Étudions le signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	$\mid$	$+$	$\emptyset$	$-$	
$1+x$		$-$	$\emptyset$	$+$	$\mid$	$+$	
$\frac{1-x}{1+x}$		$-$	$\|$	$+$	$\emptyset$	$-$	

on constate donc que :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, +1[.$$

Par suite,

$$D_f =]-1, +1[.$$

2. Montrons que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

D'une part, la fonction f est continue sur son domaine de définition puisque c'est la composée de fonctions continues sur $]-1,1[$ et d'autre part, f est strictement décroissante sur cet intervalle ; en effet, par un calcul simple on montre que :

$$f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0.$$

D'où, la fonction f est bijective de $]-1,1[$ vers $f(]-1,1[)$. Or,

$$\begin{aligned} f(]-1,1[) &= \left]\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right[\\ &=]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

3. Déterminons la fonction réciproque de f.

Comme f est bijective de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$, alors sa fonction réciproque f^{-1} existe et est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &\iff e^y = \frac{1-x}{1+x} \\ &\iff x = \frac{1-e^y}{1+e^y} \\ &\iff x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Soit donc,

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{1-e^y}{1+e^y} \end{array}$$

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$$

1 Déterminons les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons tout d'abord les points critiques de f, i.e., les racines de l'équation

$$f'(x) = 0$$

on parle de la condtion nécessaire du premier ordre.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{e^x(2e^x-1)}{e^{2x}-e^x+1} = 0 \\ &\iff 2e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = -\ln(2) \end{aligned}$$

Calculons $f(-\ln(2))$:

$$\begin{aligned} f(-\ln(2)) &= \ln\left(e^{-2\ln(2)} - e^{-\ln(2)} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc le point $\left(-\ln(2), \frac{3}{4}\right)$ est un point critique de f et c'est le seul.

Appliquons maintenant les conditions suffisantes du second ordre : tout calcul fait on obtient,

$$f''(x) = \frac{e^x\left(-e^{2x} + 4e^x - 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}$$

Étudions le signe de $f''(x)$: posons $X = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff -e^{2x} + 4e^x - 1 = 0 \\ &\iff -X^2 + 4X - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta' = 3$, donc l'équation $-X^2 + 4X - 1 = 0$ admet deux racines à savoir $2-\sqrt{3} > 0$ et $2+\sqrt{3} > 0$. D'où, les racines de l'équation $f''(x) = 0$ sont $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$

Calculons $f(\ln(2-\sqrt{3}))$ et $f(\ln(2+\sqrt{3}))$:

$$\begin{aligned} f(\ln(2-\sqrt{3})) &= \ln\left(e^{2\ln(2-\sqrt{3}))} - e^{\ln(2-\sqrt{3})} + 1\right) \\ &= \ln\left((2-\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3}) + 1\right) \\ &= \ln\left(3(2-\sqrt{3})\right) \\ &= \ln(3) + \ln(2-\sqrt{3}) \\ f(\ln(2+\sqrt{3})) &= \ln\left(e^{2\ln(2+\sqrt{3}))} - e^{\ln(2+\sqrt{3})} + 1\right) \\ &= \ln\left((2+\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3}) + 1\right) \\ &= \ln\left(3(2+\sqrt{3})\right) \\ &= \ln(3) + \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Dressons le tableau de variation de f'' :

x	$-\ln(2)$	$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{(3)}$	
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	**concave**		**convexe**		**concave**

⇝ Comme $f''(-\ln(2)) < 0$ alors, la fonction f présente un maximum relatif au point $\left(-\ln(2), \frac{3}{4}\right)$.

⇝ Comme l'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines à savoir :

$$\ln(2-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2+\sqrt{3})$$

et en plus f'' change de signe de part et d'autre de ces points alors les points $\left(\ln(2-\sqrt{3}), \ln(3) + \ln(2-\sqrt{3})\right)$ et $\left(\ln(2+\sqrt{3}), \ln(3) + \ln(2+\sqrt{3})\right)$ sont deux points d'inflexion de f.

2. Déterminons le domaine de convexité de f.

⇝ Si $x \in]-\infty, \ln(2-\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}), +\infty[$ alors f est concave,

⇝ Si $x \in [\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$ alors f est convexe.

Exercice 3

Déterminons le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Posons le changement de variable $x = 1+h$, quand $x \to 1$ alors $h \to 0$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{1+x^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} \end{aligned}$$

Or le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 0, de $\ln(1+h)$ est donné par :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Comme la valuation du dénominateur est nulle, on peut effectuer la division selon les puissances croissantes de $h-\dfrac{h^2}{2}$ par $2+2h+h^2$ à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{ccc|l}
h & -\frac{h^2}{2} & & 2+2h+h^2 \\ \cline{4-4}
-h & -h^2 & -\frac{h^3}{2} & \frac{h}{2}-\frac{3h^2}{4} \\ \cline{1-3}
 & -\frac{3h^2}{2} & -\frac{h^3}{2} & \\
 & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Il vient donc,

$$\frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2}=\frac{h}{2}-\frac{3h^2}{4}+o(h^2)$$

En remplaçant h par $(x-1)$ on obtient :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{4}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$$

Exercice 4

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x)=(x-2)e^{\frac{1}{x-1}}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminons le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1.

Posons $x=\frac{1}{h}$, si $x\to\infty$ alors $h\to 0$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{h}-2\right)\exp\left(\frac{h}{1-h}\right)
\end{aligned}$$

on sait qu'au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-h} &= 1+h+o(h)\\
\frac{h}{1-h} &= h+h^2+o(h^2)
\end{aligned}$$

Posons $X=h+h^2+o(h^2)$, quand $h\to 0$ alors $X\to 0$ et

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= e^X\\
&= 1+X+\frac{1}{2}X^2+o(X^2)\\
&= 1+h+h^2+\frac{1}{2}(h+h^2)^2+o(h^2)\\
&= 1+h+h^2+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\\
&= 1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2)
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h}-2\right)\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= \left(\frac{1}{h}-2\right)\left(1+h+\frac{3}{2}h^2+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}-1-\frac{h}{2}+o(h)
\end{aligned}$$

En remplaçant h par $\frac{1}{x}$ il vient,

$$f(x)=x-1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Déterminons les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini.

La droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini puisque,

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)=0.$$

3. Précisons la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y=x-1$.

⇝ au voisinage de $-\infty$ on a :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0^+.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

⇝ au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0^-.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.