



Professeure : Amale LAHLOU

Sections : A & B

Contrôle Final

Durée : 2 heures

Module 6 : Méthodes Quantitatives I

Matière : Mathématiques I

-
- N.B. :
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés ;
 - Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
 - La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (1 point).
-

Exercice 1 : [2 pts]

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{x + |x|}$.

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f ;
2. la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 : [10 pts]

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur $[-2 \ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
2. Soit un réel $x < 0$.
 - (a) Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
 - (b) Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
 - (c) Comparer les trois termes x , $1 - e^{-x}$ et xe^{-x} ;
3. La fonction réelle h définie par $h(x) = (1 + x)e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^n(1 - n)$ telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} ;$$

- (b) Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
4. En utilisant la règle de l'HOSPITAL, calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x}$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 : [4 pts]

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned}e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\(1+u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2)\end{aligned}$$

Exercice 4 : [4 pts]

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Bonne Chance



Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1

On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{x + |x|}.$$

- Déterminer D_f , le domaine de définition de f ;
- la fonction f est-elle prolongeable par continuité à l'origine ? Si oui, donner son prolongement sur $D_f \cup \{0\}$.

Exercice 2 :

On considère la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

- Montrer que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur $[-2 \ln(2), -\ln(2)]$ (on a $\ln(2) \simeq 0.7$) ;
- Soit un réel $x < 0$.
 - Appliquer le Théorème des Accroissements Finis à g sur $[x, 0]$;
 - Déterminer le(s) point(s) le vérifiant ;
 - Comparer les trois termes :

$$x, \quad 1 - e^{-x} \quad \text{et} \quad xe^{-x}$$

- La fonction réelle h définie par

$$h(x) = (1 + x)e^{-x}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Par un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux suites réelles de termes généraux :

$$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1 - n)$$

telles que la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction h s'écrit :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} ;$$

- Quelle est la valeur de $g^{(2007)}(0)$?
- En utilisant la règle de l'HOSPITAL, calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x}$$

Exercice 3 :

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle définie par :

$$f(x) = (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}.$$

Indication : Au voisinage de l'origine,

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4) \\ (1 + u)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Soit une fonction réelle f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Étant donné son Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x - 2)^2 - \frac{1}{6}(x - 2)^3 + o((x - 2)^3)$$

étudier localement la fonction f en ce point :

- ✓ f est-elle continue ou prolongeable par continuité au point 2 (on notera aussi par f son prolongement) ?
- ✓ Déterminer un équivalent de f au voisinage du point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 2,
- ✓ Déterminer les 3 premières dérivées de f au point 2,
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle un extremum local au point d'abscisse 2 ?
- ✓ $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle un point d'inflexion au point d'abscisse 2 ?
- ✓ Étudier la convexité de f au voisinage du point d'abscisse 2.

Réponse

Exercice 1

Considérons la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{x + |x|}.$$

- Déterminons le domaine de définition de f .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que si $x < 0$, alors $x + |x| = 0$ et par conséquent $D_f \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour $x > 0$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{2x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 x \in D_f &\iff x > 0, \quad \frac{1}{x} + x \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - x \geq 0 \\
 &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} - x \geq 0 \\
 &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad 1 - x^2 \geq 0 \\
 &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad (1 - x)(1 + x) \geq 0 \\
 &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad 1 - x \geq 0 \\
 &\iff x \in]0, 1]
 \end{aligned}$$

Ainsi, $D_f =]0, 1]$.

2. Étudions la continuité à droite de l'origine.

La fonction f est continue sur l'intervalle $D_f =]0, 1]$ puisque c'est la composée de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} + x}{2x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + x} + \sqrt{\frac{1}{x} - x}} \\
 &= 0 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

donc, la fonction f est prolongeable par continuité à droite au point d'abscisse 0 et son prolongement sur $[0, 1]$ est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{2x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Considérons la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

1. Montrons que l'équation $g(x) = 2 - x$ admet une solution unique sur le segment $[-2 \ln(2), -\ln(2)]$.

Posons la fonction :

$$f(x) = g(x) - 2 + x = e^{-x} - 2 + x.$$

Cette fonction est continue sur le segment $[-2 \ln(2), -\ln(2)]$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(-2 \ln(2)) &= 2(1 - \ln 2) > 0 \\ f(-\ln(2)) &= -\ln(2) < 0 \end{cases}$$

Alors, d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins un $c \in]-2 \ln(2), -\ln(2)[$ tel que

$$f(c) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad e^{-c} = 2 - c.$$

Ceci veut dire que l'équation

$$e^{-x} = 2 - x$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]-2 \ln(2), -\ln(2)[$. Or,

$$f'(x) = 1 - e^{-x} < 0, \quad \forall x < 0$$

et par suite f est strictement décroissante sur $[-2 \ln(2), -\ln(2)]$. Ainsi, la solution trouvée de l'équation $e^{-x} = 2 - x$ est unique sur $]-2 \ln(2), -\ln(2)[$.

2. Soit un réel $x < 0$.

(a). Appliquons le Théorème des Accroissements Finis (T.A.F.) à g sur $[x, 0]$.

La fonction g est continue sur $[x, 0]$ pour tout $x < 0$ et dérivable sur $]x, 0[$ avec, $g'(x) = -e^{-x}$.

D'après T.A.F., il existe au moins $c \in]x, 0[$ tel que :

$$g(0) - g(x) = (0 - x)g'(c)$$

i.e.,

$$1 - e^{-x} = xe^{-c}.$$

(b). Déterminons le(s) point(s) vérifiant le T.A.F. On a D'après la question (a) : $c \in]-2 \ln(2), -\ln(2)[$ et

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-x} = xe^{-c} &\iff e^{-c} = \frac{1 - e^{-x}}{x} \\
 &\iff c = -\ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)
 \end{aligned}$$

(c). Comparons les trois termes x , $1 - e^{-x}$ et xe^{-x} . D'après la question (a), le point c vérifiant le T.A.F. est tel que :

$$\begin{aligned}
 x < c < 0 &\implies 1 < e^{-c} < e^{-x} \\
 &\implies xe^{-x} < xe^{-c} < x \quad (\text{car } x < 0) \\
 &\implies xe^{-x} < 1 - e^{-x} < x
 \end{aligned}$$

On remarque qu'on a l'égalité des trois termes au point 0. D'où,

$$\forall x \leq 0, \quad xe^{-x} \leq 1 - e^{-x} \leq x$$

3. Soit la fonction réelle h définie par :

$$h(x) = (1 + x)e^{-x}.$$

(a). Par un raisonnement par récurrence, montrons qu'il existe deux suites réelles de termes généraux

$$a_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad b_n = (-1)^n(1 - n)$$

telles que la dérivée d'ordre n de la fonction h s'écrit :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$$

Vérification : Pour $n = 0$

$$h^{(0)}(x) = (a_0 x + b_0)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} = h(x) \quad (\text{vraie})$$

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x} = ((-1)^n x + (-1)^n(1 - n))e^{-x}$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= (a_{n+1}x + b_{n+1})e^{-x} \\ &= [(-1)^{n+1}x + (-1)^{n+1}(1 - (n+1))]e^{-x} \\ &= [(-1)^{n+1}x + (-1)^nn]e^{-x} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{cases} a_{n+1} = (-1)^{n+1} \\ b_n = (-1)^{n+1}(1 - (n+1)) = (-1)^nn \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= [h^{(n)}(x)]' \\ &= a_n e^{-x} - (a_n x + b_n) e^{-x} \\ &= (-a_n x + a_n - b_n) e^{-x} \\ &= (a_{n+1} x + b_{n+1}) e^{-x} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \\ b_{n+1} = a_n - b_n = (-1)^n - (-1)^n(1 - n) = (-1)^nn \end{cases}$$

Conclusion :

$$h^{(n)}(x) = (a_n x + b_n) e^{-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n \\ b_n = (-1)^n(1 - n) \end{cases}$$

(b). Calculons la valeur de $h^{(2007)}(0)$.

$$h^{(2007)}(0) = (-1)^{2007}(1 - 2007) = 2006$$

4. En utilisant la règle de l'HOSPITAL, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x}$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(e^{2x} - e^x + 1)]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

Posons le changement de variable $X = e^x$, ainsi si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(e^{2x} - e^x + 1)]'}{[x]'} &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X^2 - X}{X^2 - X + 1} \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X^2}{X^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x} = 2$$

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité au voisinage de l'origine et à l'ordre 4 de la fonction réelle $x \mapsto (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}}$.

On sait que :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ e^{-x} + x &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \end{aligned}$$

Posons $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, quand $x \rightarrow 0$ alors $X \rightarrow 0$ et

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= (1 + X)^{\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) \\ &\quad - \frac{1}{9} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} \\ &\quad - \frac{1}{9} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12} \right)^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(e^{-x} + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{72} + o(x^4).$$

Exercice 4

Étudions localement la fonction définie par son Développement Limité au voisinage du point d'abscisse 2 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

$\rightsquigarrow$ Si $2 \in D_f$ alors la fonction f est continue au point 2 et $f(2) = 1$.

$\rightsquigarrow$ Si $0 \notin D_f$ alors la fonction f est prolongeable par continuité au point 2 et son prolongement est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

(Dans ce cas, on notera dans toute la suite le prolongement de f par tout simplement f au lieu de $\tilde{f}$).

$\rightsquigarrow$ On peut déterminer un équivalent de f au voisinage de 2 :

$$f(x) - 1 \sim_2 \frac{1}{6}(x-2)^2.$$

$\rightsquigarrow$ L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est donnée par $y = 1$.

$\rightsquigarrow$ Comme

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{6}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = 0^+$$

alors la courbe représentative de f est au dessus de la tangente $y = 1$ au point $(0, 1)$.

$\rightsquigarrow f$ est trois fois dérivable au point 2 et on a :

$$f'(2) = 0$$

$$\frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{6} \iff f''(2) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f''(3)}{3!} = -\frac{1}{6} \iff f''(3) = -1$$

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ alors le point $(2, 1)$ est un point critique de f ,

$\rightsquigarrow$ Comme $f'(2) = 0$ et le premier exposant de l'équivalence susmentionnée est paire $((x-2)^2)$, alors f présente un extremum en ce point et comme en plus le coefficient de cet exposant est $\frac{1}{6} > 0$, alors la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$,

$\rightsquigarrow$ Comme la courbe représentative de f présente un minimum relatif au point $(2, 1)$ alors f est convexe au voisinage de ce point.



www.fsjesr.ac.ma

Université Mohamed V-Agdal

Faculté des Sciences Juridiques,

Économiques et Sociales, Rabat

Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Automne-Hiver 2008-2009

Semestre : **S₁**

Professeure : Amale LAHLOU

www.amalelahlou.net

Section : B

Contrôle Final

Mercredi, 07 Janvier 2009

Durée : 2 heures

Module 3 : Introduction aux Sciences Économiques

Matière : Instruments d'Analyse Économique

- N.B. :
- Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
 - La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (2 points).

Exercice 1 : [3 points]

Soient p et q deux propositions simples. En utilisant les règles logiques, simplifier la proposition composée :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Exercice 2 : [3 points]

Via un raisonnement par récurrence, montrer que $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : [2 points]

La relation binaire suivante est-elle une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$?

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a - b = 3n.$$

Exercice 4 : [6 points]

Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par : $I_m = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq m^2\}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Écrire en extension l'intervalle I_m ;
2. Expliciter les intervalles I_{-1} , I_0 , I_1 et I_2 ;
3. En déduire l'ensemble $I_2 \cap \mathbb{N}$;
4. Déterminer les valeurs de m pour que $I_m \subseteq [-3, 2]$;
5. Existe-il m tel que $I_m \cap [-3, 2] = \emptyset$.

Exercice 5 : [6 points]

Soit le polynôme : $P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12$.

1. Calculer $P(-1)$ et $P(1)$, puis conclure ;
2. Déterminer $Q(x)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$;
3. Vérifier que 2 est racine de $Q(x)$, puis factoriser $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés ;
4. ~~Exercice à ne pas traiter~~ Déterminer la factorisation en éléments simples de $P(x)$.

Bonne Chance



Module 3 : Introduction aux Sciences économiques
Matière : Instruments d'Analyse Économique

Professeure Amale LAHLOU
www.amalelahlou.net

Corrigé du Contrôle Final

Énoncé

Exercice 1 : Soient p et q deux propositions simples. En utilisant les règles logiques, simplifier la proposition composée :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Exercice 2 : Via un raisonnement par récurrence, montrer que $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : La relation binaire suivante est-elle une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$?

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a - b = 3n.$$

Exercice 4 : Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par : $I_m = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq m^2\}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Écrire en extension l'intervalle I_m ;
2. Expliciter les intervalles I_{-1} , I_0 , I_1 et I_2 ;
3. En déduire l'ensemble $I_2 \cap \mathbb{N}$;
4. Déterminer les valeurs de m pour que $I_m \subseteq [-3, 2]$;
5. Existe-il m tel que $I_m \cap [-3, 2] = \emptyset$.

Exercice 5 : Soit le polynôme :

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. Calculer $P(-1)$ et $P(1)$, puis conclure ;
2. Déterminer $Q(x)$ le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$;
3. Vérifier que 2 est racine de $Q(x)$, puis factoriser $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés ;
4. En déduire une factorisation en éléments simples de $P(x)$.

Réponse

Solution 1 : Simplifions l'expression suivante :

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

$$\begin{aligned} & (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \\ \equiv & [(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad (\text{car } \vee \text{ associative}) \\ \equiv & [p \wedge (\bar{q} \vee q)] \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad (\wedge \text{ distributive par rapport à } \vee) \\ \equiv & (p \wedge \theta) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad (\text{car } \bar{q} \vee q = \theta \text{ tautologie}) \\ \equiv & p \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad (\text{car } p \wedge \theta = p, \theta \text{ neutre pour } \wedge) \\ \equiv & (p \vee \bar{p}) \wedge (p \vee \bar{q}) \quad (\vee \text{ distributive par rapport à } \wedge) \\ \equiv & \theta \wedge (p \vee \bar{q}) \quad (\text{car } p \vee \bar{p} = \theta) \\ \equiv & p \vee \bar{q} \quad (\text{car } \theta \text{ neutre pour } \wedge) \end{aligned}$$

D'où, la proposition

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv p \vee \bar{q}.$$

■

Solution 2 : Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3.$$

c'est-à-dire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad 4^n - 1 = 3k.$$

Vérification : Pour $n = 0$ on a $4^0 - 1 = 0 = 3(0)$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n , c'est-à-dire,

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 4^n - 1 = 3k.$$

Démonstration : Montrons que la propriété est vraie à l'ordre $(n + 1)$, c'est-à-dire,

$$\exists k' \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 4^{n+1} - 1 = 3k'.$$

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \cdot 4^n - 1 \\ &= 4(3k + 1) - 1 \\ &= 3(4k) + 3 \\ &= 3(4k + 1) \\ &= 3k' \end{aligned}$$

avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{Z}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3. ■

Solution 3 : Soit la relation binaire :

$$a, b \in \mathbb{N} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad a - b = 3n.$$

$\mathcal{R}$ n'est pas une relation symétrique dans $\mathbb{N}$ est par suite, elle n'est pas une relation d'équivalence dans $\mathbb{N}$. En effet, si pour $a, b \in \mathbb{N}$, $a \mathcal{R} b$ alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = 3n$, et par suite $b - a = 3(-n)$. Ce qui implique qu'on a pas $b \mathcal{R} a$ puisque $(-n) \notin \mathbb{N}$. ■

Solution 4 Soit l'intervalle I_m de $\mathbb{R}$ défini par :

$$I_m = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq m^2\} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Écrivons en extension l'intervalle I_m :

$$\begin{aligned} I_m &= \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| \leq m^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -m^2 \leq x - 1 \leq m^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 1 - m^2 \leq x \leq 1 + m^2\} \\ &= [1 - m^2, 1 + m^2]. \end{aligned}$$

2. Explicitons les intervalles I_{-1} , I_0 , I_1 et I_2 :

$$\begin{aligned} I_{-1} &= [1 - 1, 1 + 1] = [0, 2] \\ I_0 &= [1 - 0, 1 + 0] = \{1\} \\ I_1 &= [1 - 1, 1 + 1] = [0, 2] \\ I_2 &= [1 - 4, 1 + 4] = [-3, 5] \end{aligned}$$

3. $I_2 \cap \mathbb{N} = [-3, 5] \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Déterminer les valeurs de m pour que :

$$\begin{aligned} I_m &\subseteq [-3, 2] \\ I_m \subseteq [-3, 2] &\Leftrightarrow -3 \leq 1 - m^2 \text{ et } 1 + m^2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow m^2 \leq 4 \text{ et } m^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow m^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |m| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1 \\ &\Leftrightarrow m \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

5. Il n'existe aucune valeur de m telle que

$$I_m \cap [-3, 2] = \emptyset.$$

En effet,

$$\begin{aligned} I_m \cap [-3, 2] = \emptyset &\Leftrightarrow 1 + m^2 < -3 \text{ ou bien } 2 < 1 - m^2 \\ &\Leftrightarrow m^2 < -4 \text{ ou bien } m^2 < -1 \end{aligned}$$

et dans les deux cas c'est impossible. ■

Solution 5 : Soit le polynôme

$$P(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12.$$

1. On a :

$$\begin{aligned} P(-1) &= -1 - 1 + 9 + 13 - 8 - 12 = 0 \\ P(1) &= 1 - 1 - 9 + 13 + 8 - 12 = 0 \end{aligned}$$

$P(x)$ est divisible par $(x + 1)$ et par $(x - 1)$. Donc, $P(x)$ est divisible par $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$.

2. Déterminons $Q(x)$, le quotient de la division Euclidienne de $P(x)$ par $(x^2 - 1)$:

$x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12$	$x^2 - 1$	
$-x^5 + x^3$	$x^3 - x^2 - 8x + 12$	
$-x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 8x - 12$		
$x^4 - x^2$		
$-8x^3 + 12x^2 + 8x - 12$		
$8x^3 - 8x$		
$12x^2 - 12$		
$-12x^2 + 12$		
0		

Donc,

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

Ainsi,

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^3 - x^2 - 8x + 12).$$

3.

$$Q(2) = 2^3 - 2^2 - 8(2) + 12 = 0$$

Donc, 2 est bien une racine de $Q(x)$.

Factorisons $Q(x)$ via la méthode des coefficients indéterminés : on remarque que $\deg(Q(x)) = 3$ et $Q(x)$ est divisible par $(x - 2)$. Autrement dit,

$$\exists Q_1(x) \in \mathbb{R}[X], \quad Q_1(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0)$$

tel que,

$$Q(x) = (x - 2)Q_1(x).$$

Ainsi,

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

De façon directe, on peut montrer que

$$a = 1 \quad \text{et} \quad c = -6.$$

Reste à déterminer b .

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 8x + 12 &= (x - 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= (x - 2)(x^2 + bx - 6) \\ &= x^3 + (b - 2)x^2 - (6 + 2b)x + 12 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des deux polynômes, on trouve :

$$\begin{cases} b - 2 = -1 \\ 6 + 2b = 8 \end{cases} \implies b = 1.$$

Ainsi, $Q_1(x) = x^2 + x - 6$ et par suite,

$$Q(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6).$$

En calculant le discriminant de $Q_1(x) = 0$ ($\Delta = 5^2$), on trouve que $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$ sont deux racines de $Q_1(x)$. D'où,

$$Q_1(x) = (x - 2)(x + 3)$$

et par suite,

$$Q(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 2) = (x - 2)^2(x + 3).$$

4. On déduit que :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)Q(x) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 2)^2(x + 3). \blacksquare \end{aligned}$$



www.fsjesr.ac.ma

Université Mohamed V-Agdal

Faculté des Sciences Juridiques,

Économiques et Sociales, Rabat

Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Session : Printemps-Été 2006/2007

Semestre : **S₂**

Professeure : Amale LAHLOU

Sections : A & B

Contrôle de Rattrapage

Durée : 1 heure et demi

Module 6 : Méthodes Quantitatives I

Matière : Mathématiques I

-
- N.B. :
- Les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés ;
 - Toute réponse doit être justifiée, faute de quoi elle ne sera pas comptée ;
 - La clarté de la rédaction est un élément important dans l'appréciation des copies (1 point).
-

Exercice 1 : [5 pts]

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f ;
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ;
3. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2 : [6 pts]

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1. Déterminer les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f ;
2. En déduire le domaine de convexité de f .

Exercice 3 : [3 pts]

Déterminer le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

en effectuant dans une étape intermédiaire la division selon les puissances croissantes à un ordre bien déterminé.

Exercice 4 : [6 pts]

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Déterminer le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1 ;
2. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f , au voisinage de l'infini ;
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

Bonne Chance



Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé du Contrôle de Rattrapage

Énoncé

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f ;
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ;
3. Déterminer sa fonction réciproque.

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1. Déterminer les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f ;
2. En déduire le domaine de convexité de f .

Exercice 3

Déterminer le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

en effectuant dans une étape intermédiaire la division selon les puissances croissantes à un ordre bien déterminé.

Exercice 4

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}.$$

1. Déterminer le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1,
2. Déterminer les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f , au voisinage de l'infini,
3. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses asymptotes.

Réponse

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminons le domaine de définition de f .

La fonction f est la composée de deux fonctions : $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ qui n'est définie que si $1+x \neq 0$ (i.e., $x \neq -1$) et la fonction $X \mapsto \ln(X)$ qui est bien définie pour tout $X > 0$. Alors,

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}, / \quad x \neq -1 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\}.$$

Étudions le signe de $\frac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{1-x}{1+x}$	+		+	-
$\frac{1-x}{1+x}$	-		+	+
$\frac{1-x}{1+x}$	-		+	-

on constate donc que :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, +1[.$$

Par suite,

$$D_f =]-1, +1[.$$

2. Montrons que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

D'une part, la fonction f est continue sur son domaine de définition puisque c'est la composée de fonctions continues sur $] -1, 1[$ et d'autre part, f est strictement décroissante sur cet intervalle ; en effet, par un calcul simple on montre que :

$$f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0.$$

D'où, la fonction f est bijective de $] -1, 1[$ vers $f(]-1, 1[)$. Or,

$$\begin{aligned} f(]-1, 1[) &= \left] \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right[\\ &=] -\infty, +\infty[\end{aligned}$$

3. Déterminons la fonction réciproque de f .

Comme f est bijective de $] -1, 1[$ vers $\mathbb{R}$, alors sa fonction réciproque f^{-1} existe et est définie de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$. Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &\Leftrightarrow e^y = \frac{1-x}{1+x} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y} \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Soit donc,

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}$$

Exercice 2

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

1 Déterminons les éventuels points extremums et points d'inflexion de la fonction f .

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons tout d'abord les points critiques de f , i.e., les racines de l'équation

$$f'(x) = 0$$

on parle de la condition nécessaire du premier ordre.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1} = 0 \\ &\iff 2e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = -\ln(2) \end{aligned}$$

Calculons $f(-\ln(2))$:

$$\begin{aligned} f(-\ln(2)) &= \ln(e^{-2\ln(2)} - e^{-\ln(2)} + 1) \\ &= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc le point $(-\ln(2), \frac{3}{4})$ est un point critique de f et c'est le seul.

Appliquons maintenant les conditions suffisantes du second ordre : tout calcul fait on obtient,

$$f''(x) = \frac{e^x(-e^{2x} + 4e^x - 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$

Étudions le signe de $f''(x)$: posons $X = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff -e^{2x} + 4e^x - 1 = 0 \\ &\iff -X^2 + 4X - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta' = 3$, donc l'équation $-X^2 + 4X - 1 = 0$ admet deux racines à savoir $2 - \sqrt{3} > 0$ et $2 + \sqrt{3} > 0$. D'où, les racines de l'équation $f''(x) = 0$ sont $\ln(2 - \sqrt{3})$ et $\ln(2 + \sqrt{3})$

Calculons $f(\ln(2 - \sqrt{3}))$ et $f(\ln(2 + \sqrt{3}))$:

$$\begin{aligned} f(\ln(2 - \sqrt{3})) &= \ln(e^{2\ln(2 - \sqrt{3})} - e^{\ln(2 - \sqrt{3})} + 1) \\ &= \ln((2 - \sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3}) + 1) \\ &= \ln(3(2 - \sqrt{3})) \\ &= \ln(3) + \ln(2 - \sqrt{3}) \\ f(\ln(2 + \sqrt{3})) &= \ln(e^{2\ln(2 + \sqrt{3})} - e^{\ln(2 + \sqrt{3})} + 1) \\ &= \ln((2 + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) + 1) \\ &= \ln(3(2 + \sqrt{3})) \\ &= \ln(3) + \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Dressons le tableau de variation de f'' :

x	$-\ln(2)$	$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$	
$f''(x)$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$	-
$f(x)$	concave		convexe		concave

$\rightsquigarrow$ Comme $f''(-\ln(2)) < 0$ alors, la fonction f présente un maximum relatif au point $(-\ln(2), \frac{3}{4})$.

$\rightsquigarrow$ Comme l'équation $f''(x) = 0$ admet deux racines à savoir :

$$\ln(2 - \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \ln(2 + \sqrt{3})$$

et en plus f'' change de signe de part et d'autre de ces points alors les points $(\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(3) + \ln(2 - \sqrt{3}))$ et $(\ln(2 + \sqrt{3}), \ln(3) + \ln(2 + \sqrt{3}))$ sont deux points d'inflexion de f .

2. Déterminons le domaine de convexité de f .

$\rightsquigarrow$ Si $x \in]-\infty, \ln(2 - \sqrt{3})] \cup [\ln(2 + \sqrt{3}), +\infty[$ alors f est concave,

$\rightsquigarrow$ Si $x \in [\ln(2 - \sqrt{3}), \ln(2 + \sqrt{3})]$ alors f est convexe.

Exercice 3

Déterminons le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 1, de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1 + x^2}$$

Posons le changement de variable $x = 1 + h$, quand $x \rightarrow 1$ alors $h \rightarrow 0$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{1 + x^2} \\ &= \frac{\ln(1 + h)}{1 + (1 + h)^2} \\ &= \frac{\ln(1 + h)}{2 + 2h + h^2} \end{aligned}$$

Or le Développement Limité, à l'ordre 2 et au voisinage de 0, de $\ln(1 + h)$ est donné par :

$$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Comme la valuation du dénominateur est nulle, on peut effectuer la division selon les puissances croissantes de $h - \frac{h^2}{2}$ par $2 + 2h + h^2$ à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{r|l} h & -\frac{h^2}{2} \\ \hline -h & -h^2 & -\frac{h^3}{2} \\ \hline & -\frac{3h^2}{2} & -\frac{h^3}{2} \\ & \vdots & \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 + 2h + h^2 \\ \hline \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{4} \end{array}$$

Il vient donc,

$$\frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} = \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{4} + o(h^2)$$

En remplaçant h par $(x-1)$ on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Exercice 4

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-1}}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminons le Développement Généralisé de f au voisinage de l'infini et à l'ordre 1.

Posons $x = \frac{1}{h}$, si $x \rightarrow \infty$ alors $h \rightarrow 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{h} - 2\right) \exp\left(\frac{h}{1-h}\right) \end{aligned}$$

on sait qu'au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-h} &= 1 + h + o(h) \\ \frac{h}{1-h} &= h + h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Posons $X = h + h^2 + o(h^2)$, quand $h \rightarrow 0$ alors $X \rightarrow 0$ et

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= e^X \\ &= 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2) \\ &= 1 + h + h^2 + \frac{1}{2}(h + h^2)^2 + o(h^2) \\ &= 1 + h + h^2 + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) \\ &= 1 + h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h} - 2\right) \exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= \left(\frac{1}{h} - 2\right) \left(1 + h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h} - 1 - \frac{h}{2} + o(h) \end{aligned}$$

En remplaçant h par $\frac{1}{x}$ il vient,

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Déterminons les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini.

La droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de l'infini puisque,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0.$$

3. Précisons la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote $y = x - 1$.

$\leadsto$ au voisinage de $-\infty$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^+.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

$\leadsto$ au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^-.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.