UNIVERSITE IBN ZOHR
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

S5

Recherche Opérationnelle
Série2: Résolution par la méthode algébrique

Pr. O.Chadli

Rappel sur le principe de la résolution par la méthode algébrique

La méthode algébrique est une recherche systématique de programmes de base (points sommets) jusqu'à l'obtention d'un programme optimal. Il s'agit tout simplement d'un algorithme où chaque itération fait passer d'une solution extême vers une autre tout en faisant augmenter la valeur de la fonction économique. Pour ce faire, il s'agit:

1- De structurer le problème sous forme d'un système d'équations en introduisant les variables d'écart requises. Il s'agira bien sûr d'avoir précisé préalablement les variables (principales et d'écart) ainsi que la fonction économique.

2- De déterminer un programme de base qui servira de départ au cheminement vers la solution optimale (programme optimal).

3- D'expliciter la fonction économique et de déterminer si elle peut être améliorée: recherche de l'éventuelle variable (hors programme) admettant le plus grand coefficient positif. Dans la négative, le programme est optimal.

4- En introduisant cette variable dans le programme, on choisira la plus petite valeur positive obtenue à l'aide du système d'équations calculé lors de l'étape précédente. Celà induira également la variable sortante.

5- Pour déterminer un nouveau programme de base, on doit transformer le système d'équations ainsi que l'expression de la fonction économique en exprimant les variables dans le programme de base en fonction des variables hors programme (par substitution).

6- Retourner à 3) jusqu'à l'obtention du programme de base optimal.

7- Donner le programme optimal en précisant la valeur de toutes les variables ainsi que la valeur optimisée de la fonction économique.

Exercice 1 :
La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles de bureaux, M_1 et M_2. Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de

ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300 DH pour M_1 et de 200 DH pour M_2.

	M_1	M_2	Temps Libre
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

1- Trouver le programme de l'entreprise par la méthode algébrique.

2- Préciser les ateliers pour les quels il y a un temps mort.

Exercice 2 :
L'entreprise NewTech doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d'opération : l'usinage des pièces, l'assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l'entreprise fabrique trois produits que nous noterons P_1, P_2 et P_3. Les différentes phases d'opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d'heures. La main d'oeuvre actuelle limite le nombre d'heures disponibles aux valeurs suivantes:

Usinage:	100 heures
Assemblage:	120 heures
Finition:	200 heures

Le tableau suivant nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d'opération pour fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3.

	P_1	P_2	P_3
Usinage	1	2	1
Assemblage	3	4	2
Finition	2	6	4

Le département de compatibilité de l'entreprise a estimé aux valeurs suivantes la contribution au bénéfice de chaque produit:

Produit	DH/ unité
P_1	6
P_2	7
P_3	8

De plus, on suppose qu'il n'existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production.

1- Déterminer le programme de l'entreprise par la méthode algébrique.

2- Déterminer les ateliers pour lesquels il y a présence d'un temps mort.

Exercice 3 :
L'entreprise MarocMecanique fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 et pour réaliser ce projet utilise trois centres de fabrication. Les temps opératoires, en heure par unité, à chaque centre de fabrication sont les suivants:

	P_1	P_2	P_3	Temps disponible
Centre I	4	2	4	80 heures
Centre II	2	2	3	50 heures
Centre III	1	3	2	40 heures

La contribution unitaire de chaque produit au bénéfice est la suivante:

P_1	P_2	P_3
5 DH	3 DH	4 DH

1- Déterminer, à l'aide de la méthode algébrique, le programme de fabrication qui maximise les bénéfices.

3- Le centre II est-il pleinement utilisé?

Exercice 4 :
Trois espèces de crabes sont pêchées dans les eaux côtières de l'Alaska : le crabe royal (King crab), le crabe des neiges (Snow crab), le crabe Dungeness, en des lieux différents, mais proches. Des bateaux sont aménagés pour pouvoir pêcher indifféremment les trois sortes de crabes; pour un mois donné, dans la zone de Cook Inlet, la capacité totale de pêche des bateaux est de 1000 tonnes de crabes.

A l'arrivée des bateaux au port, un tri doit être effectué sur la cargaison ce tri tient compte, suivant la période de bataille, de la taille des carapaces des crabes, de leur qualité, etc... Aussi, après ce tri, ne peut-on utiliser en moyenne que 80% de la quantité totale de crabes royal pêchée, 95% de celle de crabe des neiges et 90% de celle du crabe Dungeness. Les crabes éliminés sont perdus. Intervient alors un conditionnement: différents points sont situés sur la côte, celui attribué à la zone Cook Inlet pouvant conditionner au maximum 900 tonnes de crabes au total pour le mois considéré.

Le crabe royal est le plus demandé, mais afin de respecter un certain équilibre entre les espèces, il a été établi que la différence entre la quantité pêchée de crabe royal et le tonnage global des deux autres espèces doit être inférieure à 100 tonnes.

Les pêcheurs connaissent les sites où ils peuvent attraper telle ou telle sorte de crabe (qui ne se mélangent pas: en un lieu donné, on ne rencontre pas simultanément des espèces différentes).

Le bénéfice réalisé est: 12.5 unités monétaires (u.m.) par tonne de crabes royal pêchée et conditionnée, 8.42 u.m. par tonne pour la seconde espèce et 7.78 u.m. par tonne pour la troisième.

1- Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire

2- Etablir, en utilisant la méthode algébrique, le plan de pêche qui maximise le bénéfice.

Exercice 5 :
La compagnie "XXY" vient de perdre un contrat de production d'affiches de prix pour des stations-service. Elle se retrouve avec des ressources excédentaires qu'elle doit absolument utiliser à d'autres fins. Ces ressources sont 300 kg de revêtement intérieur pour boîtes fortes et 120 kg de carton fin. De plus, elle dispose de 10 heures de travail par jour. Elle peut utiliser ces ressources pour fabriquer des emballages de carton, des tubes et des boîtes. La fabrication de 100 emballages de carton requiert 150 kg de revêtement intérieur, 30 kg de carton fin et 2 heures de travail. La fabrication de 600 tubes requiert 50 kg de revêtement intérieur, 30 kg de carton fin et 2 heures de travail. Enfin, la fabrication de 100 boîtes requiert 60 kg de revêtement intérieur, 40 kg de carton fin et 5 heures de travail. Le profit est de 10 DH par boîte, de 1 DH par tube et de 4 DH par emballage.

1- Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire

2- Comment la compagnie doit-elle utiliser ses ressources pour maximiser son profit ? (Utilisez la méthode algébrique)

$\boxed{\textbf{Problème}}$: Etude de cas (possibilité d'avoir un sujet similaire en examen!!)

Partie I. La société PRIMA S. A. fabrique et vend notamment deux produits P_1 et P_2 dont les prix de vente respectifs sont de 400 DH et 300 DH hors taxe au tarif en vigueur. Le marché de ces deux produits est essentiellement régional et porte sur 1 500 unités de chacun des deux produits fabriqués et vendus mensuellement. La fabrication est assurée dans trois ateliers successifs ont les capacités globales mensuelles, exprimées en heures machines, sont résumées dans le tableau ci-après, lequel fait également ressortir les temps d'utilisation des machines, exprimés dans la même unité, nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun des produits P_1 et P_2:

	P_1	P_2	Capacité globale mensuelle des ateliers
Atelier 1	2h 1/2	4h	12000 h/machines
Atelier 2	3h	3h	9600 h/machines
Atelier 3	1h 1/2	1h	4200 h/machines

L'entreprise n'a pas fait de sous-traitance à ce jour.

La société envisage une extension de son réseau de distribution. Elle projette de procéder à l'installation d'une structure de fabrication supplémentaire autonome destinée à accroître sensiblement les capacités de production-vente existantes des deux produits P_1 et P_2. Les nouvelles installations auraient la même structure de base, les caractéristiques se trouvant toutefois modifiées en terme de capacité des ateliers et de temps d'utilisation des machines:

	P_1	P_2	Capacité globale mensuelle des ateliers
Atelier 4	2h	3h	10000 h/machines
Atelier 5	2h1/4	2h1/4	9000 h/machines
Atelier 6	1h 1/4	0h3/4	4000 h/machines

Travail à faire:

L'entreprise désirant connaître les programmes de fabrication conduisant à maximiser son chiffre d'affaires, ainsi que les capacités de production utilisées et résiduelles, vous êtes chargé d'en mener l'étude générale. On désignera par x les quantités de produit P_1 et par y les quantités de produit P_2 liées aux programmes de fabrication étudiés.

1- Déterminer le programme de fabrication de l'unité de fabrication existante par la Méthode graphique-On le désignera par Programme I.

  a- Etablir le graphe (Domaine des solutions admissibles);

  b- Présenter le résultat de l'étude dans un tableau de synthèse faisant ressortir pour les sommets du graphe:

  - Les quantités de produits P_1 et P_2 fabriquées;
  - Les chiffres d'affaires par produit, le chiffre d'affaires global mensuel correspondant.

2- Déterminer le programme de fabrication de l'unité de fabrication nouvelle (Méthode graphique). On le désignera par Programme II.

  a- Etablir le graphe;

b- Présenter le résultat de l'étude dans un tableau de synthèse identique à celui visé à la question 1)-b);

c- Contrôler le programme de fabrication II par la méthode de Dantzig (simplexe).

3- Prèsenter sous la forme d'un tableau unique ou de plusieurs tableaux synoptiques, pour chacun des programmes I et II ci-dessus, ainsi que pour la production actuelle de 1 500 unités de chacun des produits P_1 et P_2:

- les programmes en quantités (x, y);
- les coefficients techniques d'atelier;
- les capacités utilisées dans chaque atelier et pour l'ensemble de l'unité de production,
- les capacités résiduelles par atelier et pour l'ensemble de l'unité de production, mettant en évidence la sous-activité de l'atelier ou de l'unité de fabrication.

Partie II. L'analyse des coûts et prix de revient des produits P_1 et P_2, pour l'unité de fabrication existante, est résumée comme suit:

	P_1	P_2
Quantités fabriquées et vendues mensuellement	1500 unités	1 500 unités
Coût variable unitaire	200 DH	160 DH
Coût fixe global annuel	3300000 DH	1650000 DH

L'analyse corrélative des coûts et prix de revient prévisionnels pour l'unité de fabrication supplémentaire a fait ressortir la structure des coûts suivante associée au programme II :

	P_1	P_2
Quantités fabriquées et vendues mensuellement	2000 unités	2000 unités
Coût variable unitaire	120 DH	140 DH
Coût fixe global annuel	2860000 DH	1 100 000 DH

Travail à faire:

1- En tenant compte d'une activité de onze mois, l'entreprise étant fermée au mois d'août pour cause de congés, ainsi que de l'impôt sur les sociétés au taux actuel de 50%, étudier le résultat analytique d'exploitation par produit et global pour un exercice social, associé :

a- aux conditions d'activité actuelles,

b- aux conditions d'activité liées au programme I,

c- aux conditions d'activité liées au programme II.

Présenter l'étude sous la forme d'un tableau.
Chiffrer les variations de résultat net associées aux programmes I et II.

2- En vue ce compléter votre étude, la direction vous demande en dernier lieu de rechercher les programmes de fabrication conduisant à une maximisation de la marge sur coût variable globale mensuelle:

a- pour l'unité de fabrication existante - programme III,

b- pour la nouvelle unité de fabrication - programme IV.

Utiliser les conclusions antérieures.

3- A l'intention de la direction générale, à partir des résultats obtenus précédemment (questions I et II), présenter et justifier en quelques lignes des propositions de choix économiques qui devront être faites en matière de production.

(comptabilité et gestion d'entreprises, extrait de l'étude de cas)

UNIVERSITE IBN ZOHR
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

S5

Recherche Opérationnelle
Corrigé de la série 2: Résolution par la méthode algébrique

Pr. O.Chadli

Exercice 1

1- Notons par x_1 et x_2 respectivement les quantités des bureaux du modèle M_1 et M_2 fabriqués par la société. Notons par (I) le programme canonique et par (I') le programme standard. Les programmes (I) et (I') sont donnés par:

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [300\ x_1 + 200\ x_2] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme canonique}$$

$$(\mathrm{I'}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [300\ x_1 + 200\ x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}$$

Les variables x_3, x_4 et x_5 représentent les variables d'écarts. Notons la fonction économique par Z:

$$Z = 300\ x_1 + 200\ x_2.$$

La méthode algébrique consiste à suivre "géométriquement" le cheminement le long des côtés du domaine des solutions admissibles du programme (I), puisque les valeurs des couples (x_1, x_2) correspondant aux différentes solutions du programme canonique (I) sont égales à celles correspondant aux solutions du programme standard (I'). La solution de base (extrême) de départ du programme standard correspond au sommet $(\mathcal{O})$ pour le programme canonique: c'est la "solution nulle" $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, qui consiste à ne rien produire $(Z = 0)$.
La solution de base de départ $(\mathcal{O})$ pour le programme standard est donc :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 20,\ x_4 = 22,\ x_5 = 12.$$

On a donc,

Variables hors-base : $x_1,\ x_2$;
Variables dans la base : $x_3,\ x_4,\ x_5$.

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $Z = 0$.
<u>**Première itération :**</u>

Soit (S_0) le système formé par les contraintes et par la fonction économique, désignée par z :

$$(S_0) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 22 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ 300x_1 + 200x_2 - z = 0 \end{cases}$$

a- Sélection de la variable entrante:

La fonction économique, exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base de la solution de départ, s'écrit :

$$z = 300\ x_1 + 200\ x_2$$

Le coefficient 300 (resp 200) représente l'accroissement de z lorsqu'on porte de la valeur 0 à la valeur 1 la variable hors-base x_1 (resp. x_2). Le critère de sélection en question conduit à choisir la variable correspondant au plus grand accroissement de z dans ces conditions: ici, la sélection portera donc sur x_1 "qui, par unité, rapporte le plus".
La variable entrante est donc x_1.

b- Sélection de la variable sortante:

Considérons le système $(S_0)'$ équivalent à (S_0) obtenu en exprimant les variables dans la base x_3, x_4, x_5 et la fonction économique z exclusivement en fonction des variables hors-base:

$$(S_0)' \quad \begin{cases} x_3 = 20 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 22 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \\ z = 300x_1 + 200x_2 \end{cases}$$

Faisant $x_2 = 0$ dans $(S_0)'$, on obtient (en négligeant la dernière équation) :

$$(T_0) \quad \begin{cases} x_3 = 20 - x_1 \\ x_4 = 22 - 2x_1 \\ x_5 = 12 - x_1 \end{cases}$$

Cherchons maintenant jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_1 de façon compatible avec les contraintes. Ces contraintes (autres que celles de signes) sont satisfaites dès l'instant où l'on a :

$$x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Donc, d'après (T_0), la variable entrante x_1 peut prendre toute valeur positive telle que:

$$(U_0) \quad \begin{cases} 20 - 1 \cdot x_1 \geq 0 \\ 22 - 2 \cdot x_1 \geq 0 \\ 12 - 1 \cdot x_1 \geq 0 \end{cases} \iff (U_0)' \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{20}{1} = 20 \\ \\ x_1 \leq \frac{22}{2} = 11 \\ \\ x_1 \leq \frac{12}{1} = 12 \end{cases}$$

La valeur maximale de x_1 est donc égale à la plus grande solution du système d'inéquations (U_0) : c'est le plus petit rapport figurant dans $(U_0)'$:

$$x_1 = \min\{\frac{20}{1}, \frac{22}{2}, \frac{12}{1}\} = 11$$

On constate alors que, pour une telle valeur de x_1, on a, d'après (T_0) :

$$x_4 = 0.$$

Il en résulte que x_4 devient variable hors-base dans la nouvelle solution extrême $(\mathcal{O}_1)$: x_4 est variable sortante.

La première itération est maintenant terminée. Elle a aboutit à la solution associée au sommet $(\mathcal{O}_1)$:

$$\begin{array}{l} x_2 = 0,\ x_4 = 0 \\ x_1 = 11,\ x_3 = 9,\ x_5 = 1. \end{array}$$

On a donc, une fois la première itération terminée :

$$\begin{array}{lcl} \text{Les nouvelles variables hors-base} & : & x_2,\ x_4, \\ \text{Les nouvelles variables dans la base} & : & x_1,\ x_3,\ x_5. \end{array}$$

Au sommet $(\mathcal{O}_1)$, la fonction économique prend la valeur : $z_1 = 3300$.

<u>Deuxième itération :</u>

Afin de la préparer, il est nécessaire de se placer dans la même situation qu'au début de la première itération : pour la nouvelle solution de base, il nous faut écrire le système $(S_1)'$ exprimant les nouvelles variables dans la base et la fonction économique exclusivement en fonction des nouvelles variables hors-base $x_2,\ x_4$.

$$(S_0)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 20 - x_1 - 2x_2 \\ \boxed{x_4 = 22 - 2x_1 - x_2} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \\ z = 300x_1 + 200x_2 \end{array} \right.$$

$$(S_1)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ \\ x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ \\ z = 3300 + 50x_2 - 150x_4 \end{array} \right.$$

a- Sélection de la variable entrante:

En fonction des nouvelles variables hors-base, nulles pour la solution de base $(\mathcal{O}_1)$, on a

$$z = 3300 + 50x_2 - 150x_4.$$

Il est visible qu'on n'a pas intérêt à faire entrer x_4 : toute augmentation de x_4 à partir de 0 provoquerait une diminution de z. Le critère de Dantzig conduit à la sélection de x_2, qui sera la variable entrante.

b- Sélection de la variable sortante:

Formons le système (T_1) à partir de $(S_1)'$ en maintenant x_4 à sa valeur 0 :

$$(T_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 \\ \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 \\ \\ x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_2 \end{array} \right.$$

et cherchons jusqu'à quel niveau on peut porter x_2. Les contraintes seront satisfaites dès l'instant où :

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

La valeur maximale de x_2 est donc la plus grande solution du système d'inéquations:

$$(U_1) \quad \begin{cases} 9 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0 \\ 11 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \iff (U_1)' \quad \begin{cases} x_2 \leq \frac{9}{(3/2)} \\ x_2 \leq \frac{11}{(1/2)} \\ x_2 \leq \frac{1}{(1/2)} \end{cases}$$

$$x_2 = \min\{\frac{9}{(3/2)}, \frac{11}{(1/2)}, \frac{1}{(1/2)}\} = 2.$$

Pour cette valeur de x_2, toujours avec $x_4 = 0$, on a $x_5 = 0$ d'après la quatrième équation de (T_1), ainsi x_5 est la variable sortante.

Cette deuxième itération conduit au sommet $(\mathcal{O}_2)$: (obtenu à partir de (T_1) en prenant $x_2 = 2$)

$$\begin{array}{l} x_4 = 0,\ x_5 = 0 \\ x_1 = 10,\ x_2 = 2,\ x_3 = 6 \end{array}$$

On a donc,

$$\begin{array}{lcl} \text{les variables hors-base} & : & x_4,\ x_5; \\ \text{les variables dans la base} & : & x_1,\ x_2,\ x_3. \end{array}$$

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $z_2 = 3400$.

Troisième itération :

Exprimons les nouvelles variables dans la base et la fonction économique en fonction des nouvelles variables hors-base $x_4,\ x_5$. Dans $(S_1)'$, l'équation d'échange est la troisième

$$(S_1)' \quad \begin{cases} x_3 = 9 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = 11 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ \boxed{x_5 = 1 - \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_4} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ z = 3300 + 50x_2 - 150x_4 \end{cases}$$

$$(S_2)' \quad \begin{cases} x_3 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_1 = 10 - x_4 + x_5 \\ x_2 = 2 + x_4 - 2x_5 \\ z = 3400 - 100x_4 - 100x_5 \end{cases}$$

En fonction des variables hors base, on a :

$$z = 3400 - 100x_4 - 100x_5.$$

Tous les coefficients de z sur ces variables sont négatifs: faire de nouveau entrer dans la base x_4 ou x_5 diminuerait z.
Il n'est donc plus possible "d'améliorer" la fonction économique. La solution extrême précédente est optimale. Les variables "réelles" ont pour valeur optimale:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} x_1^* = 10, & 10 \text{ bureaux du modèle } M_1; \\ x_2^* = 2, & 2 \text{ bureaux du modèle } M_2; \end{array} \right. \\ x_3^* = 6, \\ x_4^* = 0, \\ x_5^* = 0. \end{array}$$

Le programme pour l'entreprise est donc $(x_1^*, x_2^*) = (10, 2)$.

2- On a que $x_3^* = 6$, donc l'attellier de sciage presente un temps libre de 6 heures. D'autre part, puisque $x_4^* = 0$ et $x_5^* = 0$, alors les autres ateliers ne présentent aucun temps libre.

Exercice 2

1- Notons par x_1, x_2 et x_3 respectivement les quantités des produits P_1, P_2 et P_3 fabriqués par la société. Notons par (I) le programme canonique et par (I') le programme standard. Les programmes (I) et (I') sont donnés par:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme canonique}$$

$$\text{(I')} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5 + 0\ x_6] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_6 = 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}$$

Les variables x_4, x_5 et x_6 représentent les variables d'écarts. Notons la fonction économique par Z:

$$Z = 6\ x_1 + 7\ x_2 + 8x_3.$$

La solution de base de départ $(\mathcal{O})$ pour le programme standard est:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 100,\ x_5 = 120,\ x_6 = 200.$$

On a donc,

$$\begin{array}{lll} \text{Variables hors-base} & : & x_1,\ x_2,\ x_3; \\ \text{Variables dans la base} & : & x_4,\ x_5,\ x_6. \end{array}$$

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $Z = 0$.
Première itération :

Soit (S_0) le système formé par les contraintes et par la fonction économique, désignée par z :

$$(S_0) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_6 = 200 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 - z = 0 \end{cases}$$

a- Sélection de la variable entrante:

La fonction économique, exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base de la solution de départ, s'écrit :

$$z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

Le critère de sélection en question conduit à choisir la variable correspondant au plus grand accroissement de z dans ces conditions: ici, la sélection portera donc sur x_3 "qui, par unité, rapporte le plus".
La variable entrante est donc x_3.

b- Sélection de la variable sortante:

Considérons le système $(S_0)'$ équivalent à (S_0) obtenu en exprimant les variables dans la base x_4, x_5, x_6 et la fonction économique z exclusivement en fonction des variables hors-base:

$$(S_0)' \quad \begin{cases} x_4 = 100 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_5 = 120 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 200 - 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\ z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

Faisant $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dans $(S_0)'$, on obtient (en négligeant la dernière équation) :

$$(T_0) \quad \begin{cases} x_4 = 100 - x_3 \\ x_5 = 120 - 2x_3 \\ x_6 = 200 - 4x_3 \end{cases}$$

Cherchons maintenant jusqu'à quel niveau il est possible de porter x_3 de façon compatible avec les contraintes. Ces contraintes (autres que celles de signes) sont satisfaites dès l'instant où l'on a :

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Donc, d'après (T_0), la variable entrante x_3 peut prendre toute valeur positive telle que:

$$(U_0) \quad \begin{cases} 100 - 1 \cdot x_3 \geq 0 \\ 120 - 2 \cdot x_3 \geq 0 \\ 200 - 4 \cdot x_3 \geq 0 \end{cases} \iff (U_0)' \quad \begin{cases} x_3 \leq \frac{100}{1} = 100 \\ \\ x_3 \leq \frac{120}{2} = 60 \\ \\ x_3 \leq \frac{200}{4} = 50 \end{cases}$$

La valeur maximale de x_3 est donc égale à la plus grande solution du système d'inéquations (U_0) : c'est le plus petit rapport figurant dans $(U_0)'$:

$$x_3 = \min\{\frac{100}{1}, \frac{120}{2}, \frac{200}{4}\} = 50$$

On constate alors que, pour une telle valeur de x_3, on a, d'après (T_0) :

$$x_6 = 0.$$

Il en résulte que x_6 devient variable hors-base dans la nouvelle solution extrême $(\mathcal{O}_1)$: x_6 est variable sortante.

La première itération est maintenant terminée. Elle a aboutit à la solution associée au sommet $(\mathcal{O}_1)$:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_6 = 0 \\ x_3 = 50,\ x_4 = 50,\ x_5 = 20. \end{array}$$

On a donc, une fois la première itération terminée :

Les nouvelles variables hors-base	:	$x_1,\ x_2,\ x_6,$
Les nouvelles variables dans la base	:	$x_3,\ x_4,\ x_5.$

Au sommet $(\mathcal{O}_1)$, la fonction économique prend la valeur : $z_1 = 400$.

<u>Deuxième itération :</u>

Afin de la préparer, il est nécessaire de se placer dans la même situation qu'au début de la première itération : pour la nouvelle solution de base, il nous faut écrire le système $(S_1)'$ exprimant les nouvelles variables dans la base et la fonction économique exclusivement en fonction des nouvelles variables hors-base $x_1,\ x_2,\ x_6$.

$$(S_0)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 100 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_5 = 120 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \boxed{x_6 = 200 - 2x_1 - 6x_2 - 4x_3} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \end{array} \right.$$

$$(S_1)' \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_6 \\ \\ x_5 = 20 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_6 \\ \\ z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6 \end{array} \right.$$

a- Sélection de la variable entrante:

En fonction des nouvelles variables hors-base, nulles pour la solution de base $(\mathcal{O}_1)$, on a

$$z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6.$$

Le critère de Dantzig conduit à la sélection de x_1, qui sera la variable entrante.

b- Sélection de la variable sortante:

Formons le système (T_1) à partir de $(S_1)'$ en maintenant x_2 et x_6 à leur valeur 0 :

$$(T_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 \\ \\ x_5 = 20 - 2x_1 \\ \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 \end{array} \right.$$

et cherchons jusqu'à quel niveau on peut porter x_1. Les contraintes seront satisfaites dès l'instant où :

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

La valeur maximale de x_1 est donc la plus grande solution du système d'inéquations:

$$(U_1) \quad \begin{cases} 50 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ \\ 20 - 2x_1 \geq 0 \\ \\ 50 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \end{cases} \iff (U_1)' \quad \begin{cases} x_1 \leq \frac{50}{(1/2)} \\ \\ x_1 \leq \frac{20}{2} \\ \\ x_1 \leq \frac{50}{(1/2)} \end{cases}$$

$$x_1 = \min\{\frac{50}{(1/2)}, \frac{20}{2}\} = 10.$$

Pour cette valeur de x_1, toujours avec $x_2 = 0$ et $x_6 = 0$, on a $x_5 = 0$ d'après la deuxième équation de (T_1), ainsi x_5 est la variable sortante.

Cette deuxième itération conduit au sommet $(\mathcal{O}_2)$: (obtenu à partir de (T_1) en prenant $x_1 = 10$)

$$\begin{array}{l} x_4 = 45,\ x_3 = 45 \\ x_1 = 10,\ x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0 \end{array}$$

On a donc,

les variables hors-base	:	$x_2,\ x_5,\ x_6$;
les variables dans la base	:	$x_1,\ x_3,\ x_4$.

La valeur de la fonction économique pour la solution de base de départ est : $z_2 = 420$.

<u>Troisième itération :</u>

Exprimons les nouvelles variables dans la base et la fonction économique en fonction des nouvelles variables hors-base $x_2,\ x_5, x_6$. Dans $(S_1)'$, l'équation d'échange est la deuxième

$$(S_1)' \quad \begin{cases} x_4 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_6 \\ \\ \boxed{x_5 = 20 - 2x_1 - x_2 + \dfrac{1}{2}x_6} \longleftarrow \text{équation d'échange} \\ \\ x_3 = 50 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_6 \\ \\ z = 400 + 2x_1 - 5x_2 - \frac{1}{2}x_6 \end{cases}$$

$$(S_2)' \quad \begin{cases} x_4 = 45 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{8}x_6 \\ \\ x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{4}x_6 \\ \\ x_3 = 45 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{8}x_6 \\ \\ z = 420 - 6x_2 - x_5 \end{cases}$$

En fonction des variables hors base, on a :

$$z = 420 - 6x_2 - x_5.$$

Tous les coefficients de z sur ces variables sont négatifs: faire de nouveau entrer dans la base x_2 ou x_5 diminuerait z.

Il n'est donc plus possible "d'améliorer" la fonction économique. La solution extrême précédente est optimale. Les variables "réelles" ont pour valeur optimale:

$$\begin{cases} x_1^* = 10, & 10 \text{ unités du produit } P_1; \\ x_2^* = 0, & 0 \text{ unités du produit } P_2; \\ x_3^* = 45, & 45 \text{ unités du produit } P_3; \end{cases}$$
$$x_4^* = 45,$$
$$x_5^* = 0,$$
$$x_6^* = 0.$$

Le programme pour l'entreprise est donc $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (10, 0, 45)$.

2- Nous avons que $x_4^* = 45$, donc $x_1^* + 2x_2^* + x_3^* < 100$. Par conséquent, l'atelier d'usinage présente un temps mort.

Pour les Exercices 3, 4, 5 et le Problème vous n'avez qu'a suivre le même dévelopement.