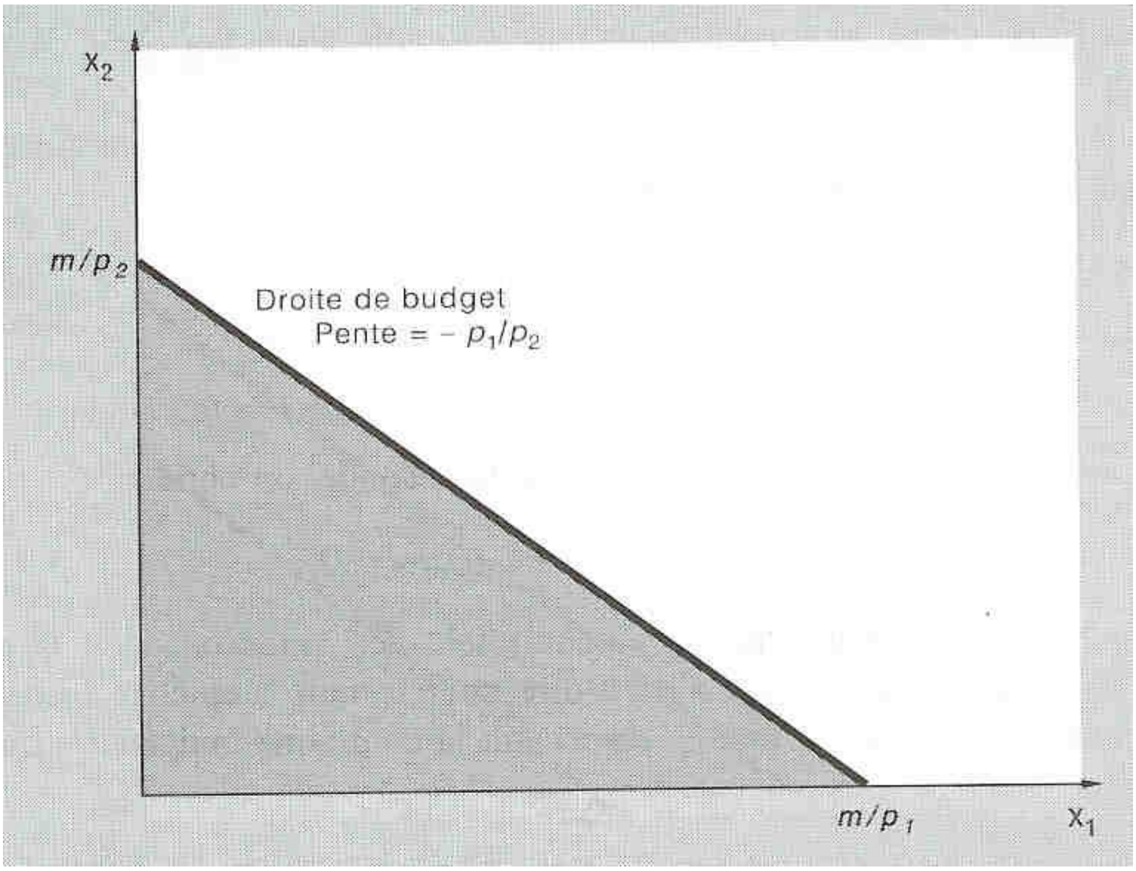
CHOIX OPTIMAL DU CONSOMMATEUR

1. La contrainte budgétaire.

1) Définition. Ensemble des paniers de biens possibles, c'est à dire des paniers qui respectent la limite des ressources.



Propriétés de l'ensemble budgétaire : ensemble des paniers possibles

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

Les points de la droite représentent une dépense égale aux ressources : égalité stricte

- vient de la rationalité : pas de saturation complète, donc toujours une raison d'utiliser le revenu restant
- l'ensemble se réduit à la frontière pour le consommateur rationnel

Pour une droite de budget (ou contrainte budgétaire) qui s'écrit

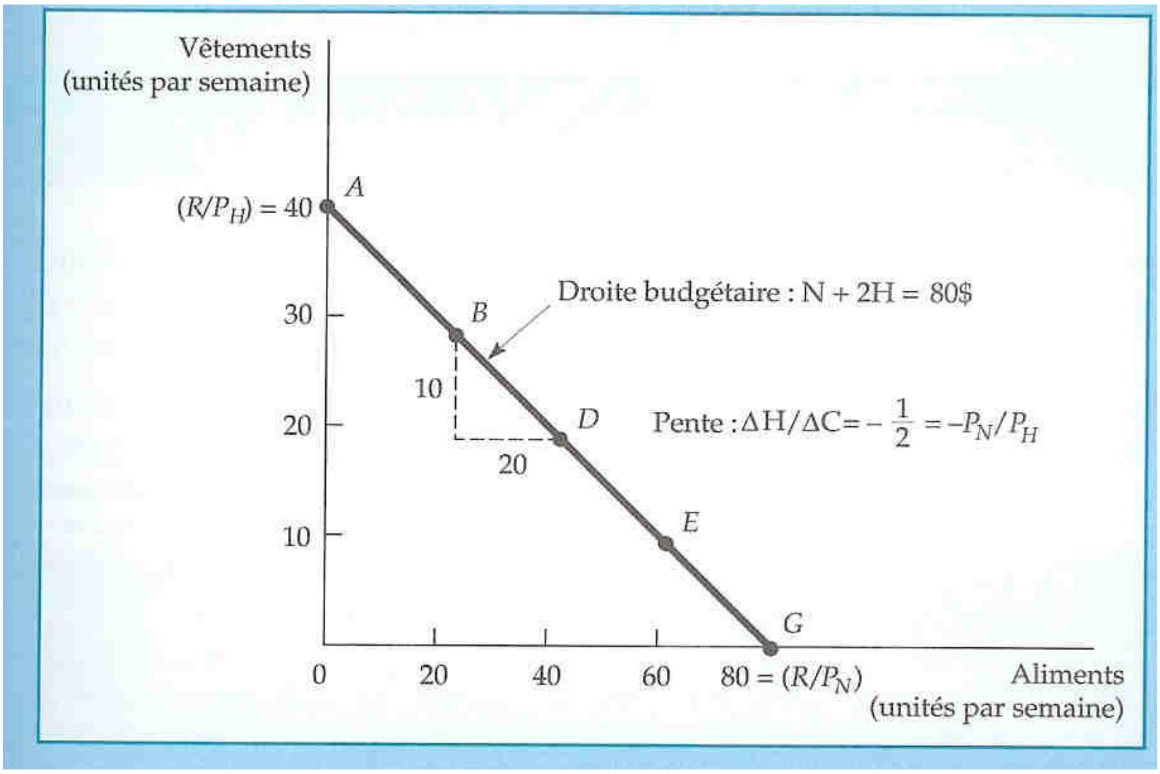
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

l'équation de cette droite représentée sur un graphe x_1,x_2 peut s'écrire

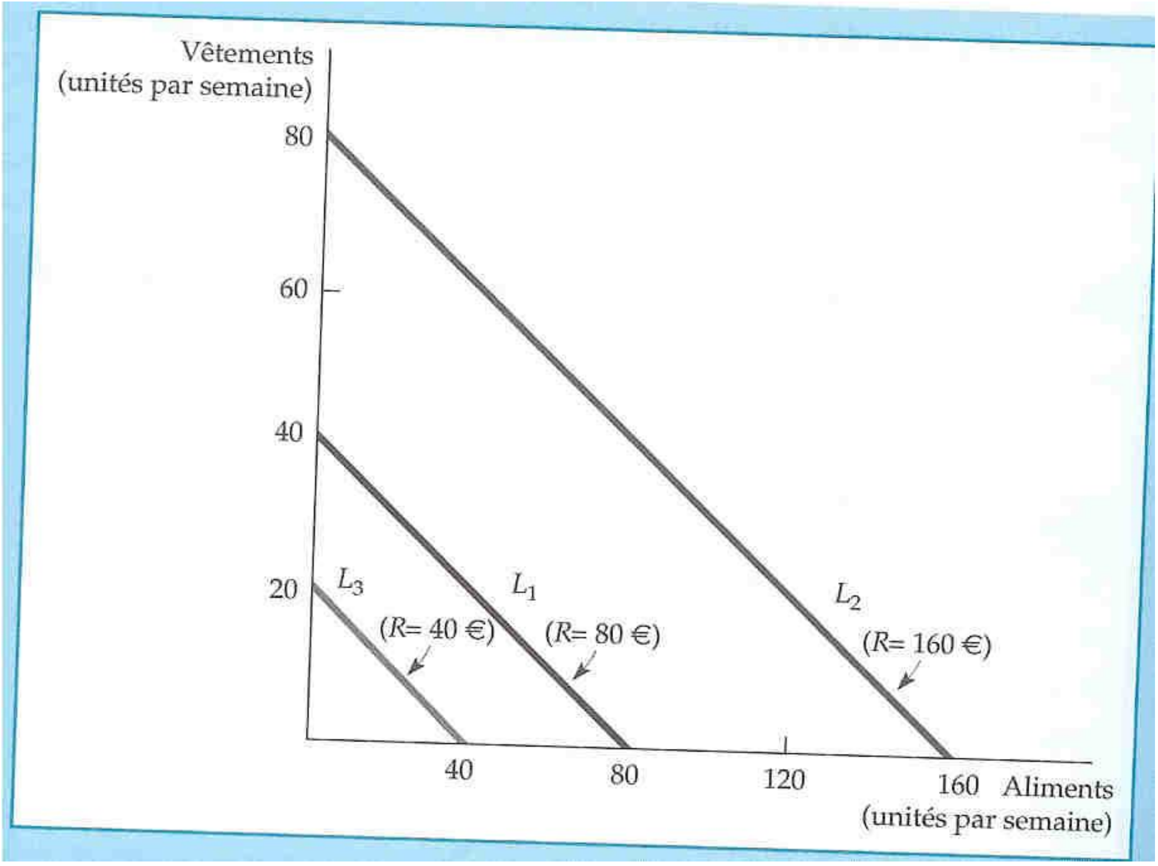
$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2}x_1 + \frac{m}{p_2}$$

la pente de cette droite $-\frac{p_1}{p_2}$

un déplacement sur cette droite dans le sens des x_1 croissants indique que l'on passe par des paniers de biens dans lesquels on remplace les unités du bien 2 par des unités supplémentaires de 1



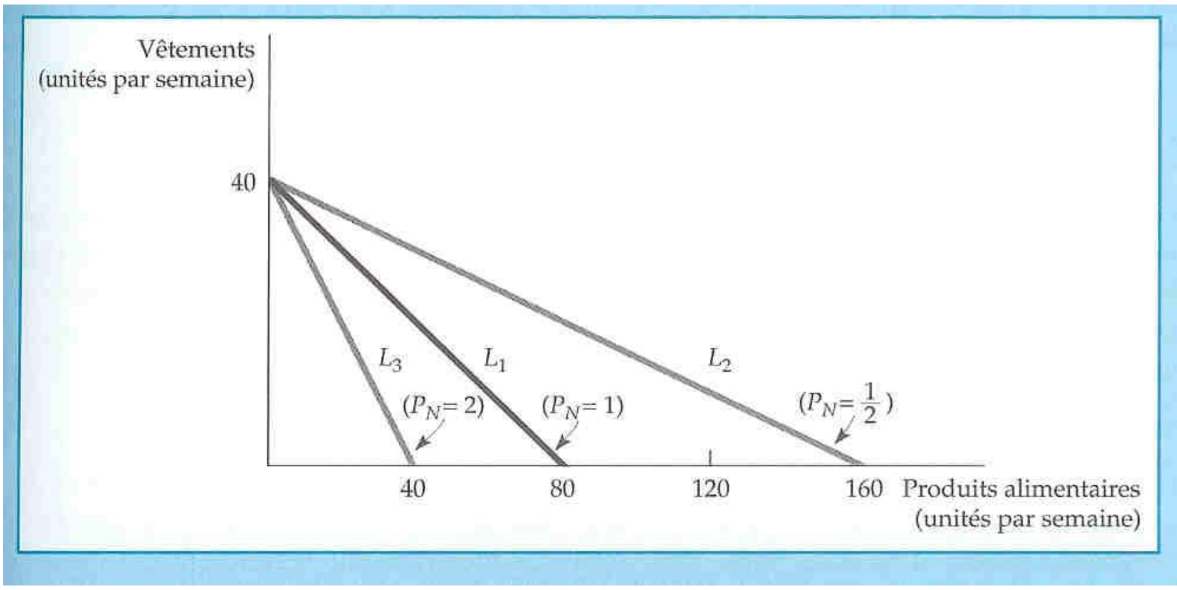
2) Changement des conditions du choix : déplacements de la contrainte budgétaire.
   a) variation du revenu, les prix étant inchangés : la contrainte se déplace selon des parallèles (la pente ne change pas puisqu'elle est égale en v.a. au rapport des prix



les points d'intersection avec les axes représentent la quantité maximum que peut acquérir le consommateur en dépensant tout le revenu à acheter seulement ce bien

quand le revenu augmente (les autres facteurs étant inchangés) le consommateur augmente proportionnellement ses quantités consommées de chacun des biens

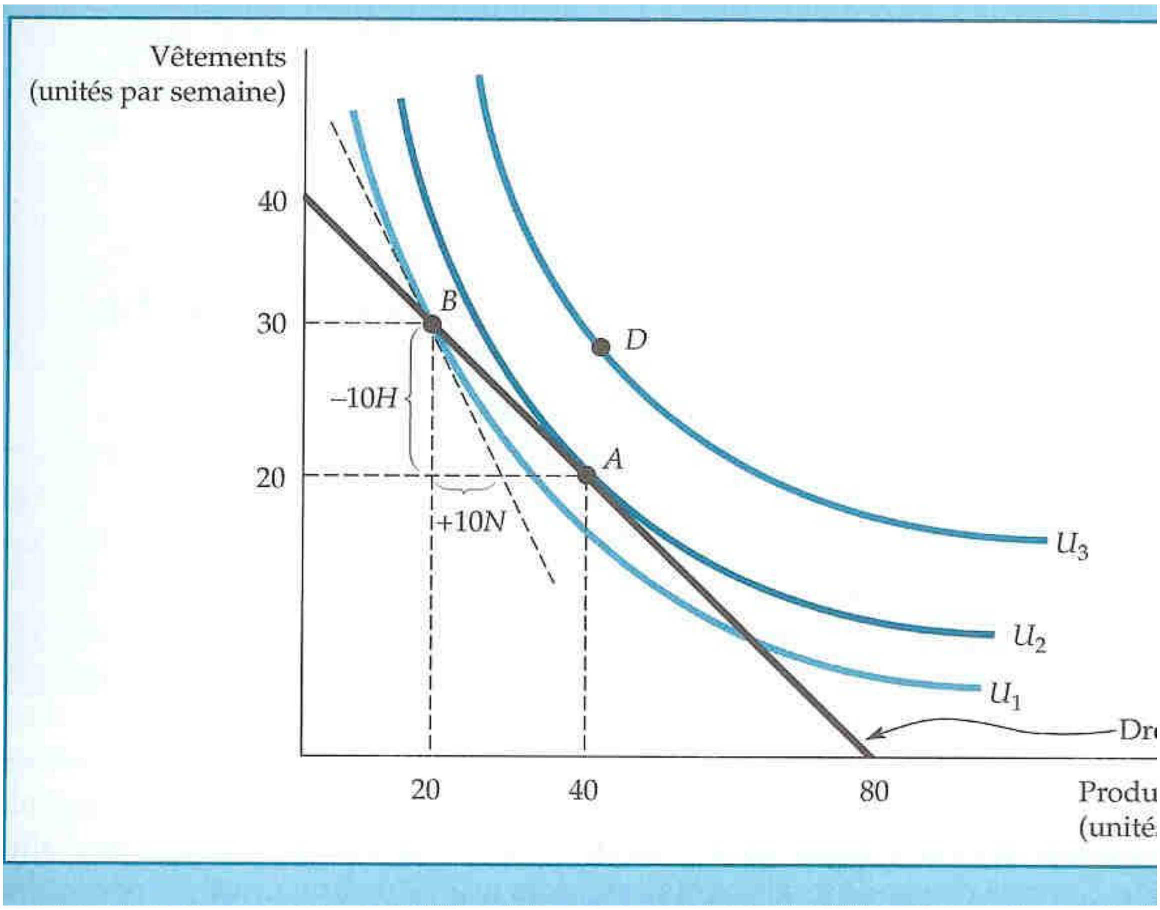
b) Variation des prix (autres facteurs inchangés) : la droite pivote autour d'un point fixe, le maximum que l'agent peut acquérir de l'autre bien



ici baisse du prix de l'alimentaire : la quantité maximale de ce bien augmente ; si le prix augmente : pivote dans l'autre sens ;

symétrique pour l'autre bien

3) Le choix : la situation optimale, représentation graphique de la solution.
confrontation des consommations possibles avec les préférences : carte d'indifférence et droite de budget



a) le cas normal : droite de budget tangente à la courbe d'indifférence,

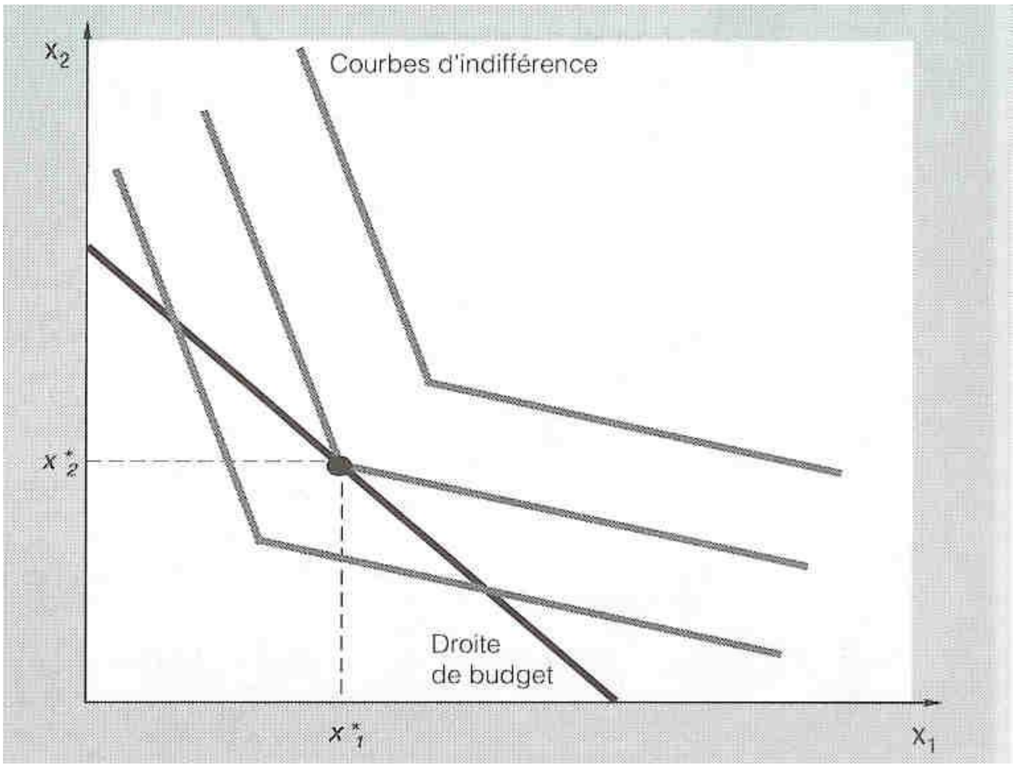
- parmi les paniers de biens possibles (budget) le point de tangence représente celui qui est situé sur la plus haute courbe d'indifférence

- en ce point puisque le TMS représente la pente de la tangente à la courbe on a

$$TMS = \frac{p_1}{p_2}$$

la satisfaction est maximale quand le TMS est égal au rapport des prix

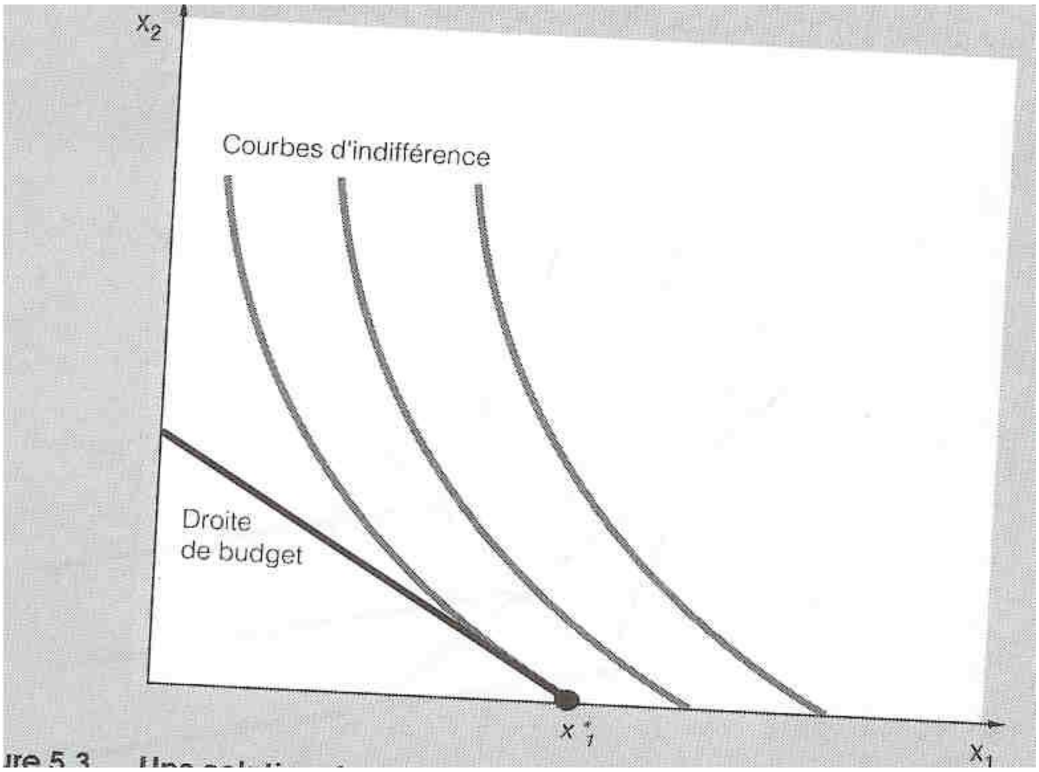
b) préférences coudées : segments correspondant à des conditions de consommation distinctes (proportion) ; ne respecte pas les conditions du raisonnement mais possibilité de définir la situation optimale : point de la droite sur la plus haute courbe d'indifférence



se rapproche de la complémentarité stricte (coude) et de la substituabilité parfaite (segment de droite) ; solutions :

- entre les limites que sont les pentes des 2 segments : 1 seul point d'équilibre (détermination seulement graphique : pas de dérivée définie)
- aux limites : solutions en coin (voir plus loin)

c) solution en coin : cas particuliers



situation limite qui indique une certaine saturation pour le bien 1 : la quantité ne croît pas indéfiniment compte tenu des préférences et des conditions de prix, le C ne consomme qu'un bien, point de la droite de budget situé sur l'axe x1 : plus haute courbe d'indifférence ; TMS pas nécessairement égal au rapport des prix : en fait inégalité

$$TMS \geq p_{x1}/p_{x2}$$

signifie qu'une baisse légère du prix du bien non consommé (x2) ne changera rien à la consommation

d) même type de solution pour le cas limite des biens parfaitement substituables :
   i) soit solution en coin (pente de la droite de budget différente de celle des courbes d'indifférence)
   ii) soit une infinité de solution (même pente).

4) Fonction d'utilité et résolution analytique : le programme du consommateur.
   a) définition : on appelle programme l'ensemble constitué par la fonction d'utilité exprimant les préférences de l'agent qu'il cherche à maximiser par son choix des quantités respectives des biens, et par la contrainte de ressources que doivent respecter ces quantités, compte tenu de leur prix.
   b) formulation générale

$$Max\ U\left(q_1, q_2\right)$$
$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = R$$

il recherche les quantités q_1^* et q_2^* qui apportent la satisfaction maximale en dépensant exactement les ressources

   c) 1ère méthode de résolution (déduite de l'observation graphique et de la règle obtenue : égalité des pentes de la droite de budget et de la tangente à la courbe d'indifférence, le TMS) :

soit le programme d'un consommateur :

$$U = q_1^{1/2} q_2^{1/2}$$
$$q_1 + q_2 = 4$$

on détermine les pentes des 2 fonctions en les dérivant après avoir exprimé q_2 en fonction de q_1 , soit

$$q_2 = \frac{U^2}{q_1}$$
$$q_2 = 4 - q_1$$

les dérivées premières sont

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{U^2}{q_1}\right)=-\frac{U^2}{q_1^{\,2}}$$

$$\frac{d}{dq_1}\left(4-q_1\right)=-1$$

on écrit que ces pentes sont égales

$$-\frac{U^2}{q_1^{\,2}}=-1$$

$$-\frac{\left(q_1^{1/2}q_2^{\,1/2}\right)^2}{q_1^{\,2}}=-1$$

soit finalement

$$-\frac{q_2}{q_1}=-1$$

$$q_1=q_2$$

on remplace x par sa valeur en y dans la contrainte budgétaire pour obtenir les valeurs optimales, soit :

$$q_2=4-q_1=4-q_2$$
$$2q_2=4$$
$$q_2^{\,*}=2 \text{ donc } q_1^{\,*}=2$$
$$U^*=2$$

d) la méthode par substitution : à partir de la contrainte budgétaire
on exprime l'une des variables en fonction de l'autre

$$q_2=4-q_1$$

et on remplace *y* par cette valeur dans la fonction d'utilité

$$U=q_1^{1/2}\left(4-q_1\right)^{1/2}$$

on maximise cette fonction en annulant la dérivée par rapport à la variable restante *x* (dérivée d'un produit dont un des termes est une fonction de fonction : règle de dérivation d'un produit et règle de la dérivation en chaîne - voir aide-mémoire en fin d'introduction)

$$\frac{dU}{dq_1} = \frac{1}{2} q_1^{-1/2} \left(4 - q_1\right)^{1/2} - \frac{1}{2} q_1^{1/2} \left(4 - q_1\right)^{-1/2} = 0$$

$$\frac{\left(4 - q_1\right)^{1/2}}{q_1^{1/2}} = \frac{q_1^{1/2}}{\left(4 - q_1\right)^{1/2}}$$

$$4 - q_1^* = q_1^* \Rightarrow q_1^* = 2$$

$$q_1^* = 4 - q_1^* = 2$$

e) La méthode du Lagrangien : on forme une combinaison de la fonction à maximiser et de la contrainte à respecter ; le Lagrangien s'écrit dans le cas général :

$$L\left(q_1, q_2\right) = U\left(q_1, q_2\right) + \lambda\left(R - p_1 q_1 - p_2 q_2\right)$$

cette fonction est maximisée lorsque ses dérivées premières sont nulles

$$U'_{q_1}\left(q_1^*, q_2^*\right) - \lambda p_1 = 0$$

$$U'_{q_2}\left(q_1^*, q_2^*\right) - \lambda p_2 = 0$$

$$R - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

pour les 2 premières ont obtient

$$\frac{U'_{q_1}\left(q_1^*, q_2^*\right)}{p_1} = \lambda$$

$$\frac{U'_{q_2}\left(q_1^*, q_2^*\right)}{p_2} = \lambda$$

qui donne à nouveau l'égalité fondamentale caractérisant la solution optimale : égalité des utilités marginales pondérées par les prix

f) application à la fonction précédente :

$$\mathfrak{L}\left(q_1, q_2, \lambda\right) = q_1^{1/2} q_2^{1/2} + \lambda\left(4 - q_1 - q_2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{1}{2} q_1^{-1/2} q_2^{1/2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{1}{2} q_1^{1/2} q_2^{-1/2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 4 - q_1 - q_2 = 0$$

on en déduit l'égalité des 2 premières expressions, soit

$$\frac{1}{2}\left(\frac{q_2^{1/2}}{q_1^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^{1/2}}{q_2^{1/2}}\right)$$

$$q_1 = q_2$$

on détermine les solutions optimales en remplaçant dans la contrainte comme précédemment.