

Pr. Nough IZEM

Correction Examen d'Agèbre

Economie & Gestion : S4

Questionnaire : A

Partie 1 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, x + 2y, x + y + z).$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 \\ \varepsilon_2 = e_2 + e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

1. $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car :

☐ A $\mathcal{B}'$ est libre et $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3$.

☐ B $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3$ et $\forall i, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^3$.

☐ C $\det(\mathcal{B}') = 0$.

☐ D $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

2. Donner la matrice $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ de f relativement à la base canonique.

☐ A $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ B $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ C $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ D $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. L'inverse A^{-1} est donné par :

☐ A $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/6 & -5/6 & 2/3 \end{pmatrix}$

☐ B $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & -5/6 & 4/3 \end{pmatrix}$

☐ C $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/6 & -1/6 & -1/3 \\ -1/6 & -5/6 & 2/3 \end{pmatrix}$

☐ D $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & -5/6 & -4/3 \end{pmatrix}$

4. Exprimer $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

☐ A $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

☐ B $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ C $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

☐ D $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Former la matrice $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

☐ A $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ B $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

☐ C $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

☐ D $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

☐ A $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

☐ B $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ C $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ D $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Soit $X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ dans

la base $\mathcal{B}'$. Alors les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ sont données par :

☐ A PX' .

☐ B $PX'P^{-1}$.

☐ C $P^{-1}X'$.

☐ D Autre.

8. Quelle relation lie A' , A , P et P^{-1} ?

☐ A $A' = PAP^{-1}$.

☐ B $A' = P^{-1}AP$.

☐ C $A' = PA$.

☐ D $A' = P^{-1}A$.

Partie 2 :

9. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit le produit A fois B par $A \cdot B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ avec :

☐ A $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{jk}$.

☐ B $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$.

☐ C $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

☐ D $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$.

10. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Alors B est la matrice d'une application linéaire

☐ A $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

☐ B $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

☐ C $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

☐ D $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

11. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice des cofacteurs de C :

[A] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
 [C] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

12. Parmi ces matrices déterminer celle qui est inversible.

[A] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
 [C] $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

13. Soit f un endomorphisme sur un espace vectoriel E , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases sur E . La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées des vecteurs de :

- [A] $f(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}'$.
 [B] $f(\mathcal{B}')$ dans la base $\mathcal{B}$.
 [C] $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
 [D] $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

14. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est alors :

- [A] P^{-1}
 [B] tP
 [C] $-P$
 [D] il n'y a pas de lien entre ces deux matrices, en général.

15. Soit $M = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Alors M est la matrice d'une

application linéaire $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :

- [A] $f(x, y, z, t) = (-7x + 6y + 6z + 6t, 2y, -3x + 3y + 2z + 3t, -6x + 3y + 6z + 5t)$.
 [B] $f(x, y, z, t) = (-7x - 3z - 6t, 6x + 2y + 3z + 3t, 6x + 2z + 6t, 6x + 3z + 5t)$.
 [C] $f(x, y, z, t) = (6x + 6y + 6z - 7t, 2z, 3x + 2z + 3t - 3t, 5x + 6y + 3z - 6t)$.
 [D] Autre.

16. On considère la matrice M de la question précédente. Calculer $\det(M)$:

- [A] $\det(M) = -4$.
 [B] $\det(M) = 4$.
 [C] $\det(M) = 2$.
 [D] Autre.

17. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant B sous forme :

$N + I_4$, En calculant, N^4 exprimer B^n , $n \geq 1$ en fonction de n , I_4 et N .

- [A] $C_n^1 I_4^{n-1} \times N + C_n^2 I_4^{n-2} \times N^2 + C_n^3 I_4^{n-3} \times N^3 + C_n^4 I_4^{n-4} \times N^4$.
 [B] $C_n^0 I_4 + C_n^1 I_4^{n-1} \times N + C_n^2 I_4^{n-2} \times N^2 + C_n^3 I_4^{n-3} \times N^3$.
 [C] Autre.
 [D] $C_n^1 I_4^{n-1} \times N + C_n^2 I_4^{n-2} \times N^2 + C_n^3 I_4^{n-3} \times N^3$.

18. Soit A , B et P trois matrices de $M_{3,3}(\mathbb{R})$ tel que : $A = PBP^{-1}$ alors pour tout $n \geq 1$, on a :

- [A] $A^n = P^n B^n (P^{-1})^n$.
 [B] $A^n = PB^n P^{-1}$.
 [C] $A^n = PB(P^{-1})^n$.
 [D] $A^n = B^n$.

19. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

- [A] $\text{rang}(N) = 2$.
 [B] $\text{rang}(N) = 3$.
 [C] $\text{rang}(N) = 4$.
 [D] Autre.

20. Soient E , F et G trois espaces vectoriels de bases respectivement $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, et soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors

- [A] $\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.
 [B] $\mathcal{M}(f \circ g, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \times \mathcal{M}(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.
 [C] $\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times \mathcal{M}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
 [D] $\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.