Chap. III. EspacesVectoriels

Printemps 2010

Dans ce chapitre, **K** désignera $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

Définition 1.1. *: On appelle espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *(ou* $\boldsymbol{K}$*-espace vectoriel) un ensemble non vide* $\boldsymbol{E}$ *muni d'une loi notée + et d'une autre loi notée ., noté (* $\mathbf{E},+,.$ *), telles que :*

1) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y \in \mathbf{E}$.

2) Pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, $x + y = y + x$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $x + 0_{\mathbf{E}} = x$.

4) Pour tout $x \in \mathbf{E}$, $-x \in \mathbf{E}$.

5) Pour tout $x, y, z \in \mathbf{E}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

6) Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in \mathbf{E}$, $\lambda x \in \mathbf{E}$.

7) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

8) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x \ \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x \in \boldsymbol{E}$.

9) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \ \forall \lambda \in \boldsymbol{K}$ *et* $\forall x, y \in \boldsymbol{E}$.

10) $1.x = x \ \forall x \in \boldsymbol{E}$.

Les éléments de **K** sont dits scalaires et ceux de **E** vecteurs.

Exemple 1. *:*

1) $\boldsymbol{K}$ *est un espace vectoriel sur lui même.*

2) $\mathbb{C}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{R}$ *n'est pas un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$.

4) $\mathbb{R}[X]$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *muni des lois :*

$(a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n) + (b_0 + b_1 X + ... + b_n X^n) =$
$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_n + b_n)X^n$ *et*
$\lambda(a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + ... + \lambda a_n X^n$.

5) Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{A}$ *un ensemble quelconque non vide, et*

$\mathcal{S} = \{$ *applications* $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E}\}$. *On peut définir sur* $\mathcal{S}$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *par les lois :*

Si $f, g \in \mathcal{S}$ *et* $\lambda \in \boldsymbol{K}$, *alors*

$$\begin{array}{cc} f+g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E} & \lambda f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{E} \\ a \mapsto f(a)+g(a) & a \mapsto \lambda f(a) \end{array}$$

6) Soient $\boldsymbol{E}_1$ *et* $\boldsymbol{E}_2$ *deux espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$. *On définit une structure d'espace vectoriel sur* $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2$ *par :*

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *et* $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ *avec* $\lambda \in \boldsymbol{K}$.

D'une manière analogue, $\boldsymbol{E}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{E}_n$ *est un espace vectoriel sur* $\boldsymbol{K}$ *si* $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n$ *le sont.*

Exemples d’Espaces Vectoriels et Notations

Exemple 1 : Le R-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$

Définition de l'ensemble

Le produit cartésien **Rx R** est noté $\mathbf{R}^2$. C'est l'ensemble des couples (*x*, *y*) avec *x* élément de **R** et *y* élément de **R**. Ceci s'écrit :

$$\mathbf{R}^2 := \{(x,y); x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$$

Remarque : l'écriture (*x*, *y*) traduit un ordre sur les éléments *x* et *y* ; *x* est la première composante du couple (*x*, *y*), *y* est la seconde. Donc, si *x* est différent de *y*, le couple (*x*, *y*) est différent du couple (*y*, *x*).

Définition de la loi interne

Si (*x*, *y*) et (*x'*, *y'*) sont deux éléments de $\mathbf{R}^2$,

$$(x,y) + (x',y') := (x + x', y + y')$$

Définition de la loi externe

Si est un réel, et (*x*, *y*) un élément de $\mathbf{R}^2$

$$\alpha(x,y) := (\alpha x, \alpha y)$$

Elément neutre de la loi interne

C'est le couple (0, 0), où 0 désigne le zéro de **R**.

Symétrique d'un élément

Le symétrique de (*x*, *y*) est le couple (-*x*, -*y*)

Exemple 2 : Le R-espace vectoriel R*ⁿ*

Cet exemple généralise l'exemple précédent.

Définition de l'ensemble

Si *n* est un entier supérieur ou égal à 2, le produit cartésien de *n* ensembles égaux à **R**, **R**x**R**x **...** x**R** est noté $\mathbf{R}^n$. C'est l'ensemble des *n*-uplets (x_1, x_2, ... , x_n) avec x_1, x_2, ... , x_n éléments de **R**. Ceci s'écrit :

$$\mathbf{R}^n := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ x_i \in \mathbf{R}\right\}$$

Remarque 1 : De même que dans l'exemple précédent, l'écriture (x_1, x_2, ... , x_n) traduit un ordre sur les éléments x_i ; x_i est la *i*-ème composante du *n*-uplet (x_1, x_2, ... , x_n).

Remarque 2 : Comme il est souvent impossible matériellement d'écrire tous les éléments d'un *n*-uplet (si *n* est grand), l'usage est de remplacer ceux que l'on n'écrit pas par trois points ' **. . .** '.

Ainsi par exemple (x_1, x_2, ... , x_5) désigne le 5-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) ; c'est un élément de $\mathbf{R}^5$.

Définition de la loi interne

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Définition de la loi externe

Si α est un réel, et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbf{R}^n$,

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Elément neutre de la loi interne

C'est le n-uplet dont toutes les composantes sont égales au zéro de $\mathbf{R}$, soit $(0, 0, \ldots, 0)$.

Symétrique d'un élément

Le symétrique de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le n-uplet $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

Définition analogue pour $\mathbf{C}^2$ et plus généralement $\mathbf{C}^n$, espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$.

Exemple 3 : le R-espace vectoriel *F*(R,R)

Définition de l'ensemble

L'ensemble des fonctions de **R** dans **R** est noté *F*(**R**, **R**). Il peut être muni d'une structure de **R-**espace vectoriel de la manière suivante.

Définition de la loi interne

Soient *f* et *g* deux éléments de *F*(**R**, **R**). On doit donner un sens à $f+g$; ce doit être un élément de *F*(**R**, **R**) c'est-à-dire une fonction de **R** dans **R**.

L'application $f+g$ est donc définie en donnant l'image de tout élément réel *x* par $f+g$, soit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

+ : loi interne de *F*(**R**, **R**)

+ : addition dans **R**

Définition de la loi externe

De même, si α est un nombre réel et *f* un élément de *F*(**R**, **R**), αf doit être une fonction de **R** dans **R**. Elle est définie dès qu'est donnée l'image de tout élément de **R** soit :

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

Pour mieux comprendre le sens de cette définition, désignons par un point la loi externe de *F*(**R**, **R**) et par une croix la multiplication dans **R** :

$$(\alpha \bullet f)(x) := \alpha \times f(x)$$

Elément neutre de la loi interne

C'est l'application de **R** dans **R** définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) := 0$$

C'est la fonction nulle, qu'il est difficile de noter 0
(car alors, on serait en droit d'écrire 0(0) = 0, ce qui est difficile à décoder !).

Symétrique d'un élément *f* de *F*(R, R)

C'est l'application *g* de **R** dans **R** définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g(x) := -f(x)$$

Elle est notée -*f*.

Exemple 4 : le R-espace vectoriel des suites réelles

Définition de l'ensemble

Ensemble des suites réelles, noté $S = F(\mathbf{N}, \mathbf{R})$,
c'est l'ensemble des applications de **N** dans **R**.

Définition de la loi interne

Soient $U = (U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $V = (V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux éléments de *S*, $U + V$ est la suite définie par $W = (W_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, W_n := U_n + V_n$$

où **+** désigne l'addition dans **R**.

Définition de la loi externe

De même, si α est un nombre réel et $U=(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de *S*, αU est la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par :

$$\forall n\in\mathbf{N}, T_n := \alpha\times U_n$$

où x désigne la multiplication dans **R**.

Elément neutre de la loi interne

C'est la suite réelle dont tous les termes sont nuls $O=(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$, c'est-à-dire la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbf{N}, O_n := 0$$

Symétrique d'un élément $U=(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$

C'est la suite réelle $U'=(U'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbf{N}, U'_n=-U_n$

Elle est notée -*U*.

Définition de la somme de N vecteurs

Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de *n* vecteurs, .

La structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de **deux vecteurs**, ce qui démarre la démonstration.

Si la somme de ***n*-1 vecteurs** est définie, alors la somme de ***n* vecteurs** V_1 , V_2 , ... , V_n , est définie par :

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n := (V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1}) + V_n$$

Notation :

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{i=n} V_i$$

Cette définition découle donc de la propriété d'associativité.

Proposition 1.1. *: Pour tout $\lambda \in \boldsymbol{K}$ et pour tout $x \in \boldsymbol{E}$, on a :*

1) $\lambda.0 = 0$ *et* $0.x = 0$.

2) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.

3) $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -\lambda x$.

Preuve : 1) $\lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0 = \lambda 0 \Rightarrow \lambda 0 = 0$ et
$(0+0)x = 0x + 0x = 0x \Rightarrow 0x = 0$.

2) $\lambda x = 0$, si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda^{-1}\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0$.

3) $(\lambda + (-\lambda))x = \lambda x + (-\lambda)x = 0 \Rightarrow (-\lambda x) = -(\lambda x)$.

Dans la suite $(-\lambda)x$ sera noté $-\lambda x$ et $x + (-y)$ sera noté $x - y$.

2 Sous-Espaces vectoriels

Définition 2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F}$ *une partie non vide de* $\boldsymbol{E}$*. On dit que* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$*, si la restriction des lois de* $\boldsymbol{E}$ *à* $\boldsymbol{F}$ *fait de* $\boldsymbol{F}$ *un espace vectoriel.*

Proposition 2.1. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$*. Alors* $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

2) a) $x, y \in \boldsymbol{F} \Rightarrow x + y \in \boldsymbol{F}$.

b) $x \in \boldsymbol{F}$, $\lambda \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \lambda x \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $\lambda = -1$ et $y \in \mathbf{F} \Rightarrow -y \in \mathbf{F}$ d'après b) ; $x \in \mathbf{F} \Rightarrow x - y \in \mathbf{F}$ d'après a) ; d'où $\mathbf{F}$ est un sous-groupe de $\mathbf{E}$.

Les autres axiomes sont vérifiés pour tous les éléments de $\mathbf{E}$ et donc à fortiori pour les éléments de **F**.

Proposition 2.2. *équivalente : $\boldsymbol{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :*

1) $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$.

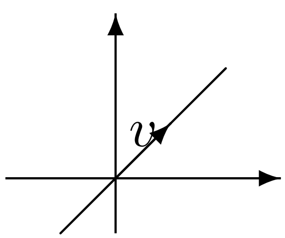
2) $x, y \in \boldsymbol{F}\,;\ \mu, \lambda \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \boldsymbol{F}$.

Preuve : Exercice.

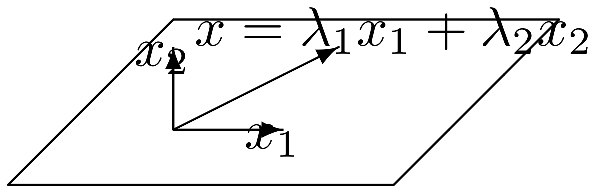
Exemple 2. *:*

1) Droite vectorielle :

Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et soit* $v \in \boldsymbol{E}\,;\ v \neq 0,$ *alors*
$\boldsymbol{F} = \{y \in \boldsymbol{E} / \exists \lambda \in \boldsymbol{K}; y = \lambda v\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *dit droite vectorielle engendrée par* v.



2) Soient x_1, $x_2 \in \mathbf{E}$ et $\mathbf{F} = \{y \in \mathbf{E} / \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}; y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}$, $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ dit plan vectoriel engendré par x_1 et x_2.



3) $\mathbb{R}_n[X] = \{$ polynômes $P \in \mathbb{R}[X]; degP \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4) Soit $\mathbf{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple SEV

Exemples immédiats :

1.L'ensemble *F* défini par $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x > 0\}$ est un sous-espace vectoriel de **R**^{2}.
2.L'ensemble *F* défini par $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x > 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de **R**^{2}.
3.L'ensemble des fonctions continues sur **R** est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de **R** dans **R**.
4.L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

5.Soit $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x > 0\}$: c'est une partie de **R**^{2} stable pour l'addition usuelle, mais elle n'est pas stable pour la loi externe (la multiplication par un réel). Ce n’est pas un sev de **R**^{2}

Remarques :

1- La définition précédente fait ressortir les deux points suivants :

- $0_E = 0_F$
- Le symétrique de *u* calculé dans *E* est le même que le symétrique de *u* calculé dans *F*.

2- $\{0_E\}$ et *E* sont des sous-espaces vectoriels de *E*.

3- Un sous-espace vectoriel de *E* contient nécessairement $\{0_E\}$. Ceci donne une méthode simple pour prouver qu'un sous-ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel : si 0_E n'appartient pas à *F* alors *F* n'est pas un sous-espace vectoriel de *E*.

Méthodologie

1- Pour répondre à une question du type " le sous-ensemble *F* de l'espace vectoriel *E* est-il un sous-espace vectoriel de *E* ? ", il est judicieux de vérifier que 0_E appartient à *F* :

Si 0_E appartient à *F*, cela prouve que *F* est non vide et on peut poursuivre en étudiant la stabilité de *F* pour les lois de *E*.

Sinon on peut alors affirmer que *F* n'est pas un sous-espace vectoriel de *E*.

2- Pour montrer qu'un ensemble *F* est un espace vectoriel sur **K**, on peut chercher un espace vectoriel *E* qui contient *F*, puis prouver que *F* est un sous-espace vectoriel de *E*.

Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire

Théorème

Soit E un **K**-espace vectoriel et F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide
- Toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F :

$$\forall (u,v) \in F^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2,\quad \alpha u + \beta v \in F$$

Exemples:

- L'ensemble P des fonctions polynômes de **R** dans **R** est un sous-espace vectoriel de $F(\mathbf{R},\mathbf{R})$, l'espace vectoriel des applications de **R** dans **R**.
- L'ensemble P_n des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de P, donc de $F(\mathbf{R},\mathbf{R})$
- En revanche, pour , l'ensemble des fonctions polynômes de degré exactement égal à n n'est pas un sous-espace vectoriel de P.

En effet ce n'est pas un ensemble stable pour l'addition des fonctions : par exemple les fonctions f et g définies par x+1 et –x+1 sont des fonctions polynômes de degré 1, mais leur somme ne l'est pas.

Sous-espace engendré par une partie finie

Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une partie finie du **K**-espace vectoriel *E*, alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ est un sous-espace vectoriel de *E* ; c'est le plus petit sous-espace vectoriel de *E* (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$: autrement dit, il est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Notation

Ce sous-espace vectoriel est appelé **sous-espace engendré par** $v_1, v_2, \dots, v_p$ il est noté :

$\mathbf{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_p\})$ ou $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ ou $\overline{\{v_1, v_2, \dots, v_p\}}$ ou $\mathbf{lin}(\{v_1, v_2, \dots, v_p\})$

$$u \in \mathbf{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_p\})$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p \,/\, u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$$

Exemples

E étant un **K**-espace vectoriel, et *u* un élément quelconque de *E*, l'ensemble $F = \{\alpha u \,/\, \alpha \in \mathbf{K}\}$ est le sous-espace vectoriel de *E* engendré par $\{u\}$. Il est souvent noté $\mathbf{K}u$.

Soit *E* l'espace vectoriel des applications de **R** dans **R** et les applications e_0, e_1 **et** e_2 définies par : $\forall x \in \mathbf{R},\ e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x$ **et** $e_2(x) = x^2$

Le sous-espace vectoriel de *E* engendré par $\{e_0, e_1, e_2\}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (f = ae_2 + be_1 + ce_0)$$

Méthodologie

On peut démontrer qu'une partie non vide *F* d'un espace vectoriel *E* est un sous-espace vectoriel de *E* en montrant que *F* est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de *E*.

Exemple

Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,/\, x-y-z=0\}$.

Un triplet $u=(x,y,z)$ de $\mathbf{R}^3$ est élément de *F* si et seulement si $x-y-z=0$, c'est-à-dire si et seulement si $x=y+z$.

Donc *u* est élément de *F* si et seulement si *u* peut s'écrire :

$$u=(y+z,y,z)$$

Or on a l'égalité :

$$(y+z,y,z)=y(1,1,0)+z(1,0,1)$$

Donc *F* est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$, c'est donc un sous-espace vectoriel : c'est le sous-espace vectoriel engendré par $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$

Proposition 2.3. *: Soient $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ deus sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$.*

1) $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.

2) $\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{G}$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.

3) Le complément $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F})$ d'un sous-espace vectoriel $\boldsymbol{F}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.

Preuve : 1) $\mathbf{F} \cap \mathbf{G} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

$x, y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K} \Rightarrow (x, y \in \mathbf{F},\ \lambda, \mu \in \mathbf{K})$ et $(x, y \in \mathbf{G}$, $\lambda, \mu \in \mathbf{K}) \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

2) On prend $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{G}$ et $\mathbf{G} \not\subset \mathbf{F}$, il existe donc $x \in \mathbf{F}$; $x \notin \mathbf{G}$ et $y \in \mathbf{G}$; $y \notin \mathbf{F}$; on a donc $x, y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$.

Si $\mathbf{F} \cup \mathbf{G}$ est un sous-espace vectoriel alors $x + y \in \mathbf{F} \cup \mathbf{G}$; c.à.d $x + y \in \mathbf{F}$ ou $x + y \in \mathbf{G}$.

Si $x + y \in \mathbf{F}$, alors $(x + y) - x \in \mathbf{F} \Rightarrow y \in \mathbf{F}$; contradiction.

Si $x + y \in \mathbf{G}$, alors $(x + y) - y \in \mathbf{G} \Rightarrow x \in \mathbf{G}$; contradiction.

3) Le complément $(\mathbf{E} - \mathbf{F})$ ne contient pas 0, donc n'est pas un sous-espace vectoriel.

3 Famille Génératrice

Définition 3.1. *: Une famille de vecteurs* $\{v_1, ...v_p\}$ *d'un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *est dite génératrice si :* $\forall x \in \boldsymbol{E}$, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \boldsymbol{K}$ *tel que* $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$, *on dit que tout* $x \in \boldsymbol{E}$ *est combinaison linéaire des vecteurs* v_i.

Remarque 1. *: Une telle famille (finie) n'existe pas toujours. Considérons* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\{P_1, ..., P_p\}$ *une famille finie de polynômes, elle ne peut pas être génératrice, car par combinaisons linéaires, on n'obtiendra que des polynômes de degré*$\leq$*Sup(deg* P_i*).*

Par contre pour $\mathbb{R}_n[X]$*, la famille* $\{1, X, ..., X^n\}$ *est une famille génératrice.*

Exemple 3. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

2) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1);(1,2)\}$ *est une famille génératrice.*

3) Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1);(1,-1)\}$ *est une famille génératrice.*

4) Dans $\mathbb{R}^n$, $\{(1,0,...,0);...;(0,...,0,1)\}$ *est une famille génératrice.*

Exemples sur les C.L.

Exemple 1:

$E = \mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur **R**.

Soient les vecteurs $V_1 = (1,1,0)$, $V_2 = (1,1,1)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Une combinaison linéaire de V_1, V_2 et V_3 est un élément de la forme $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$ où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des nombres réels, c'est-à-dire, tous calculs faits, le triplet

$$(\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_2 + 2\alpha_3)$$

$E = \mathbb{R}^2$, espace vectoriel sur **R**.

Soit $V_1 = (1,1)$. Le vecteur $V = (2,1)$ n'est pas combinaison linéaire du vecteur V_1.

En effet, s'il l'était, il existerait un réel α tel que $V = \alpha V_1$ ce qui équivaudrait à l'égalité $(2,1) = (\alpha, \alpha)$

soit $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$, or 2 est différent de 1 dans **R**.

Exemple 2:

E est le **R**-espace vectoriel des fonctions polynômes réelles.

Soient

f_0 la fonction polynôme : $4! = 0$

f_1 la fonction polynôme : $x \mapsto x$

f_2 la fonction polynôme : $x \mapsto x^3$

f_3 la fonction polynôme : $x \mapsto x^3$

Alors les fonctions *f* et *g* définies par

$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

$g : x \mapsto x^2$

sont des combinaisons linéaires des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque il est possible d'écrire : $g = 0f_3 + f_2 + 0f_1 + 0f_0$

et $g = 0f_3 + f_2 + 0f_1 + 0f_0$

Par contre, la fonction $h : x \mapsto x^4$ n'est pas une combinaison linéaire des fonctions .

En effet s'il existait dans **R**^{4} tel que cette égalité équivaudrait à la propriété : pour tout *x* dans **R**, $x^4 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$

D'où, en dérivant quatre fois, il viendrait $4! = 0$ ce qui est faux dans **R**.

Exemple 3:

$E = \mathbb{C}$ considéré comme un **R**-espace vectoriel.
Tout élément de **C** s'écrit d'une manière unique sous la forme $a + bi$ avec *a* et *b* réels. Cette propriété bien connue peut être interprétée de la manière suivante :
Tout élément de **C** est combinaison linéaire à coefficients réels des deux vecteurs 1 et *i* de **C**

Définition 3.2. *: Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie, dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Exemple 4. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}_n[X]$ *sont de dimension finie.*

2) $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

3) L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, ..., v_p$ *noté* $\overline{\{v_1, ..., v_p\}}$ *ou* $\langle v_1, ..., v_p\rangle$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$ *de dimension finie.*

4 Dépendance et Indépendance Linéaires - Bases

Définition 4.1. *: Soit $v_1, ..., v_p$ une famille finie d'éléments de* $\boldsymbol{E}$.
On dit qu'elle est libre si : $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.

On dit aussi que les vecteurs $v_1, ..., v_p$ sont linéairement indépendants.

Une famille qui n'est pas libre, est dite liée (on dit aussi que ses vecteurs sont liés ou linéairement dépendants).

Exemple 5. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2 = (-1, 3, 1)$ *et* $v_3 = (-1, 13, 5)$ *sont liés car* $2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, *les vecteurs* $v_1 = (1, 1, -1)$; $v_2 = (0, 2, 1)$ *et* $v_3 = (0, 0, 5)$ *sont linéairement indépendants.*

Proposition 4.1. *: Une famille $\{v_1, ..., v_p\}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs v_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Preuve : $\Rightarrow$) $\exists \lambda_1, ..., \lambda_p$ non tous nuls tels que
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$, si $\lambda_i \neq 0$, alors
$v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + ... + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} ... + \frac{-\lambda_p}{\lambda_i} v_p$
$\Leftarrow$) $\exists v_i$ tel que $v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p$
c.à.d $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} - v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_p v_p = 0$.

Proposition 4.2. *: Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les v_i (c.à.d x est combinaison linéaire des v_i), alors la décomposition de x sur les v_i est unique.*

Preuve : $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p \Rightarrow$
$(\alpha_1 - \lambda_1) v_1 + ... + (\alpha_p - \lambda_p) v_p = 0 \Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \; \forall i = 1, ..., p$.

Définition 4.2. *: On appelle base une famille à la fois libre et* *génératrice.*

Proposition 4.3. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Tout $x \in \boldsymbol{E}$ se décompose d'une façon unique sur les v_i, c.à.d $\forall x \in \boldsymbol{E}$*

$$\exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \boldsymbol{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Preuve : Proposition précédente.

Proposition 4.4. *: Soit $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$. Il existe alors une bijection :*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{\mathcal{B}} & : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{K}^n \\ & & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i & \longmapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Les scalaires x_i sont dits composantes de x dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$.

Exemple 6. *:*

1) Base canonique de $\boldsymbol{K}^n$, $\{e_k = (0, ..., \underset{1}{\overset{k^{\grave{e}me}\,rang}{\uparrow}}, 0...0)/k = 1, ..., n\}$.

2) Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, $\{1, X, ..., X^n\}$.

3) Soit $\boldsymbol{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + 3z = 0\}$. $\boldsymbol{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

On a $v = (x, y, z) \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow y = -2x - 3z$ *donc*
$v \in \boldsymbol{F} \Leftrightarrow v = (x, -2x - 3z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$, *donc* $(1, -2, 0)$ *et* $(0, -3, 1)$ *engendrent* $\boldsymbol{F}$. *On vérifie qu'ils forment une famille libre, donc c'est une base de* $\boldsymbol{F}$.

Proposition 4.5. *: 1)* $\{x\}$ *est une famille libre* $\Leftrightarrow x \neq 0$.

2) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.

3) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4) Toute famille contenant une famille liée est liée.

5) Toute famille $\{v_1, ..., v_n\}$ dont l'un des vecteur v_i est nul, est liée.

Preuve : 1) $\Rightarrow$) Si $x = 0$ alors $\lambda x = 0$ pour tout λ d'où $\{x\}$ est liée.

$\Leftarrow$) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ car $x \neq 0$.

2) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice et $\{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$ une sur-famille. Alors $\forall x \in \mathbf{E}$,

$$x = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i v_i + 0w_1 + ... + 0w_q.$$

3) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, quitte à changer la numérotation $\mathcal{F}' = \{v_1, ..., v_k\}$ avec $k \leq p$.

Si $\mathcal{F}'$ est liée, l'un des v_i serait combinaison linéaire des autres.

4) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ et $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$, l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$, d'où de $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est liée.

5) $\{0\}$ étant liée, toute sur-famille est liée.

5 Existence de Bases (en dimension finie)

Théorème 1. *: Dans un espace vectoriel* $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ *de dimension finie, il existe toujours des bases.*

Preuve : Soit $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice. Pour tout $x \in \mathbf{E}$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbf{K}$ tels que $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p$.

a) Si tous les v_i étaient nuls $\mathbf{E} = \{0\}$ ce qui est exclu. Quitte à changer de numérotation on peut supposer $v_1 \neq 0$.

b) $\mathbf{L}_1 = \{v_1\}$ est une famille libre, si elle était génératrice, stop.

c) Supposons $\mathbf{L}_1$ non génératrice. Montrons qu'il existe $v_* \in \{v_2, ..., v_p\}$ tel que $\{v_1, v_*\}$ soit libre.

Supposons le contraire ; c.à.d v_1 est lié à chacun des v_i, $i = 2, ..., p$, d'où $\exists \lambda_2, ..., \lambda_p$; $v_2 = \lambda_2 v_1$, $v_3 = \lambda_3 v_1$,..., $v_p = \lambda_p v_1$, alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i v_i \\ &= \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i v_1 \\ &= (\alpha_1 + \sum_{i=2}^{i=p} \alpha_i \lambda_i) v_1 \end{aligned}$$

ce qui entraîne $\{v_1\}$ génératrice de $\mathbf{E}$, faux.

La famille $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_*\}$ est donc libre, en changeant éventuellement de notation, on peut supposer $v_* = v_2$.

d) Si $\mathbf{L}_2 = \{v_1, v_2\}$ est génératrice, stop.

Supposons le contraire. En répétant le même raisonnement que précedemment, on voit qu'il existe $v_* \in \{v_3, ..., v_p\}$ tel que la famille $\mathbf{L}_3 = \{v_1, v_2, v_*\}$ est libre. On construit ainsi une suite :

$$\mathbf{L}_1 \subsetneq \mathbf{L}_2 \subsetneq \mathbf{L}_3 \subsetneq ... \subset \mathcal{G}$$

de famille libres et le processus peut être continué tant que $\mathbf{L}_k$ n'est pas génératrice. Mais $\mathcal{G}$ est une famille finie et par conséquent le processus doit s'arrêter, éventuellement pour $\mathbf{L}_k = \mathcal{G}$. Il existe donc une famille $\mathbf{L}_k$ libre et génératrice.

Cette démonstration nous permet d'obtenir une autre version du théorème précédent.

Théorème 2. *: Soit $\boldsymbol{E} \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie, alors :*

1) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

2) (Théorème de la base incomplète). Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

6 Les Théorèmes Fondamentaux sur la Dimension

Théorème 3. *: Dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille de plus de n éléments est liée.*

Preuve : Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_n\}$ une famille génératrice et $\mathcal{F}' = \{w_1, ..., w_m\}$ une famille de vecteurs ($m > n$). Montrons que $\mathcal{F}'$ est liée.

1) Si l'un des $w_i = 0$, $\mathcal{F}'$ est liée. Stop.

2) Supposons tous les w_i non nuls, $w_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $w_1 \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0$, quitte à changer la numérotation, supposons $\alpha_1 \neq 0$ d'où $v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - (\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n)$.

Pour $x \in \mathbf{E}$, $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, en remplaçant v_1 par son expression, on constate que x est combinaison linéaire de w_1,

v_2,...,v_n, d'où $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ est génératrice.

Considérons w_2, $w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$. Si $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0$, alors $w_2 = \beta_1 w_1$. D'où $\mathcal{F}'$ liée. Stop.

Supposons que l'un des $\beta_i \neq 0$, pour fixer les idées disons β_2, on aura $v_2 = \frac{1}{\beta_2} w_2 - \frac{1}{\beta_2}(\beta_1 w_1 + \beta_3 v_3 + ... + \beta_n v_n)$.
En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $\{w_1, w_2, v_3, ..., v_n\}$ est génératrice.

Ainsi de proche en proche, on arrive à remplacer v_1,...,v_n par w_1,...,w_n et $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ serait génératrice. En particulier, w_{n+1} serait combinaison linéaire de w_1,...,w_n et donc $\mathcal{F}'$ serait liée.

Théorème 4. *: Dans un espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$ *sur* $\boldsymbol{K}$ *de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments, ce nombre entier est appelé dimension de* $\boldsymbol{E}$ *sur* $\boldsymbol{K}$ *et est noté* $\dim_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{E}$.

Preuve : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases. Si $\mathcal{B}'$ avait plus d'éléments que $\mathcal{B}$ elle ne serait pas libre car $\mathcal{B}$ est génératrice.

Corollaire 6.1. *: Dans un espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de plus de n éléments est liée, et une famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.*

Preuve : Pour le $2^{ème}$ point, si la famille était génératrice, on pourrait en extraire d'après un théorème du paragraphe 5, une base qui aurait moins de n éléments.

Exemple 7. *:*

1) Si $\boldsymbol{E} = \{0\}$, on pose $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$, et $\boldsymbol{E} = \{0\} \Leftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = 0$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}^n = n$.

3) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

5) La dimension d'un espace vectoriel dépend non seulement de $\boldsymbol{E}$ mais aussi de $\boldsymbol{K}$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ et $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$.

Proposition 6.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_p$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\boldsymbol{K}$, alors*

$$dim_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{E}_1 \times ... \times \boldsymbol{E}_p) = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1 + ... + dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_p$$

Preuve : Soient $\{a_1, ..., a_{n_1}\}$, $\{b_1, ..., b_{n_2}\}$,..., $\{l_1, ..., l_{n_p}\}$ des bases de $\mathbf{E}_1$,..., $\mathbf{E}_p$
respectivement.

La famille $\{(a_i, 0, ..., 0)_{i=1,...,n_1}, (0, b_i, 0, ..., 0)_{i=1,...,n_2}, ...,$
$(0, 0, ..., 0, l_i)_{i=1,...,n_p}\}$ est une base de $\mathbf{E}_1 \times ... \times \mathbf{E}_p$.

Exemple 8. *:*

$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n$ *et* $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$.

Théorème 5. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie* n. *Alors*

1) Toute famille génératrice de n *éléments est une base.*

2) Toute famille libre de n *éléments est une base.*

Preuve : 1) De cette famille, on peut extraire une base, elle doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

2) Cette famille peut être complétée pour former une base qui doit avoir n éléments, donc c'est elle même.

Théorème 6. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\boldsymbol{F}$ un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$. Alors*

1) $dim_{\mathbf{K}}\boldsymbol{F} \leq dim_{\mathbf{K}}\boldsymbol{E}$.

2) $dim_{\mathbf{K}}\boldsymbol{F} = dim_{\mathbf{K}}\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$.

Preuve : On pose $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E} = n$.

1) a) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} = 0$ on a $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \leq n$.

b) Si $dim_{\mathbf{K}}\mathbf{F} \neq 0$, alors $\mathbf{F} \neq \{0\}$ et donc $\mathbf{F}$ admet une base, $\mathcal{B}$, qui est une partie libre de $\mathbf{F}$ donc de $\mathbf{E} \Rightarrow$ cardinal$\mathcal{B} \leq n$ d'après Corollaire 6.1.

2) $\Leftarrow$) Trivial.

$\Rightarrow$) Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{F}$ ayant n éléments, elle est donc libre dans $\mathbf{F}$ et par suite dans $\mathbf{E}$, elle est donc base de $\mathbf{E}$; théorème 2.6.3, donc famille génératrice de $\mathbf{E}$, donc $\mathbf{E} = \mathbf{F}$.

7 Somme, Somme directe, Sous-Espaces Supplémentaires

Définition 7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$. On appelle somme de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ le sous-espace de $\boldsymbol{E}$ défini par :*

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \{x \in \boldsymbol{E} / \exists x_1 \in \boldsymbol{E}_1, x_2 \in \boldsymbol{E}_2; x = x_1 + x_2\}.$$

$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$, en effet

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ donc $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \neq \emptyset$.

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $x, y \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbf{E}_1, x_2 \in \mathbf{E}_2$ et $y_1 \in \mathbf{E}_1, y_2 \in \mathbf{E}_2$; $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ d'où $\alpha x + \beta y = \underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\alpha x_2 + \beta y_2}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Proposition 7.1. *: Soient $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ et $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. La décomposition de tout élément de $\mathcal{G}$ en* *somme d'un élément de* $\boldsymbol{E}_1$ *et d'un élément de* $\boldsymbol{E}_2$ *est unique si et seulement si* $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$. *On écrit alors* $\mathcal{G} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, *et on dit que* $\mathcal{G}$ *est somme directe de* $\boldsymbol{E}_1$ *et* $\boldsymbol{E}_2$.

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $x \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x = x + 0 = 0 + x$ d'où la non unicité.

$\Leftarrow$) Supposons
$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

Définition 7.2. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel et* $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ *deux sous-espaces vectoriels de* $\boldsymbol{E}$. *On dit que* $\boldsymbol{E}_1$ *et* $\boldsymbol{E}_2$ *sont supplémentaires (ou que* $\boldsymbol{E}_2$ *est un supplémentaire de* $\boldsymbol{E}_1$ *) si* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, *c.à.d* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ *et* $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.

Proposition 7.2. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie. Alors* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ *si et seulement si pour toute base* $\mathcal{B}_1$ *de* $\boldsymbol{E}_1$ *et toute base* $\mathcal{B}_2$ *de* $\boldsymbol{E}_2$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *est une base de* $\boldsymbol{E}$.

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_p\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_{p+1}, ..., v_q\}$ des bases de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, respectivement. Alors tout $x \in \mathbf{E}$ s'écrit de manière unique sous la forme
$x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p + \lambda_1 v_{p+1} + ... + \lambda_{q-p} v_q \Rightarrow \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbf{E}$.

$\Leftarrow$)

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i}_{\in \mathbf{E}_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q-p} \lambda_j v_{p+j}}_{\in \mathbf{E}_2} \in \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

la décomposition étant unique suivant les bases de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2 \Rightarrow \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \{0\}$.

Corollaire 7.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel $\boldsymbol{E}_1$, il existe toujours un supplémentaire ; le supplémentaire de $\boldsymbol{E}_1$ n'est pas unique, mais si $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie, tous les supplémentaires de $\boldsymbol{E}_1$ ont même dimension.*

Preuve : On expose la démonstration en dimension finie.

Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et soit $n = dim_{\mathbf{K}}\mathbf{E}$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $w_{p+1}, ..., w_n$ tels que $\{v_1, ..., v_p, w_{p+1}, ..., w_n\}$ soit une base de $\mathbf{E}$. En posant $\mathbf{E}_2 = \overline{\{w_{p+1}, ..., w_n\}}$, le sous-espace de $\mathbf{E}$ engendré par $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$, on obtient un supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}$. Puisque le choix des w_i n'est pas unique, le supplémentaire de $\mathbf{E}_1$ n'est pas unique ; cependant tous les supplémentaires de $\mathbf{E}_1$ ont une dimension égale à $n-p$, p étant la dimension de $\mathbf{E}_1$.

Théorème 7. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension finie. Alors* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$ *si et seulement si :*

1)$\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$.

2) $dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_1 + dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E}_2$.

Preuve : $\Rightarrow$) D'après la proposition 2.7.2.

$\Leftarrow$) Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$ et $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$ une base de

$\mathbf{E}_2$, n étant la dimension de $\mathbf{E}$. Montrons que l'union des bases est libre :

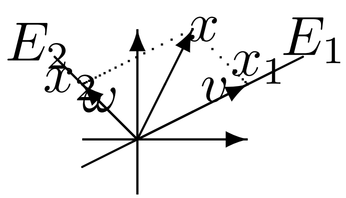
$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p + \alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p}_{\in \mathbf{E}_1} =$

$- \underbrace{(\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n)}_{\in \mathbf{E}_2} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$ et

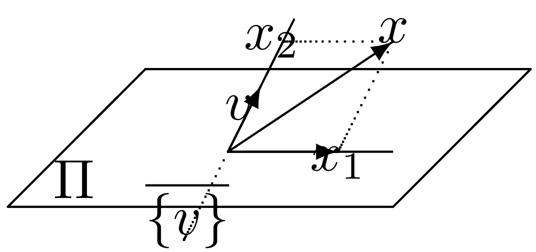
$\alpha_{p+1} w_{p+1} + ... + \alpha_n w_n = 0 \Rightarrow \alpha_{p+j} = \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., p$ et $\forall j = 1, ..., n - p$, d'après la proposition précedente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \bigoplus \mathbf{E}_2$.

Exemple 9. *:*

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{E}_1 = \overline{\{v\}}$ *et* $\boldsymbol{E}_2 = \overline{\{w\}}$ *où* v *et* w *sont deux vecteurs indépendants.*



2) Dans $\mathbb{R}^3$*, soit* Π *un plan vectoriel et* $v \notin \Pi$*. On a* $\mathbb{R}^3 = \Pi \bigoplus \overline{\{v\}}$ *car si* $\{e_1, e_2\}$ *est une base de* Π*, alors* $\{e_1, e_2, v\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*



3) $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}_n[X]$*,* $\boldsymbol{E}_1 = \mathbb{R}$*,* $\boldsymbol{E}_2 = \{XP(X)/P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$*,* $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \{0\}$ *et* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ *d'où* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$*.*

Proposition 7.3. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$. On a* $dim(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)=dim\boldsymbol{E}_1+dim\boldsymbol{E}_2-dim(\boldsymbol{E}_1\cap\boldsymbol{E}_2)$. *En particulier* $dim(\boldsymbol{E}_1\bigoplus\boldsymbol{E}_2)=dim\boldsymbol{E}_1+dim\boldsymbol{E}_2$.

Preuve : Posons $dim\mathbf{E}_1=p$, $dim\mathbf{E}_2=q$ et $dim(\mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2)=r$ $(r\leq p,q)$.

Considérons $\{a_1,...,a_r\}$ une base de $\mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2$ qu'on complète pour obtenir $\{a_1,...,a_r,b_{r+1},...,b_p\}$ une base de $\mathbf{E}_1$, $\{a_1,...,a_r,e_{r+1},...,e_q\}$ une base de $\mathbf{E}_2$.

Tout vecteur de $\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$ s'écrit en fonction des a_i, b_j et e_k, $1\leq i\leq r$, $r+1\leq j\leq p$ et $r+1\leq k\leq q$, qui forment alors une famille génératrice de $\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$. Elle est aussi libre car :

$$\underbrace{(\alpha_1a_1+...+\alpha_ra_r)}_{=x\in\mathbf{E}_1\cap\mathbf{E}_2}+\underbrace{(\beta_{r+1}b_{r+1}+...+\beta_pb_p)}_{=y\in\mathbf{E}_1}+\underbrace{(\gamma_{r+1}e_{r+1}+...+\gamma_qe_q)}_{=z\in\mathbf{E}_2}=0$$

On a $x+y+z=0 \Rightarrow \underbrace{z}_{\in \mathbf{E}_2} = \underbrace{-(x+y)}_{\in \mathbf{E}_1} \Rightarrow z \in \mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 \Rightarrow z$ s'exprime en fonction des a_i d'où $\gamma_{r+1}e_{r+1} + ... + \gamma_q e_q = \delta_1 a_1 + ... + \delta_r a_r$ mais $\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_q\}$ est une base de $\mathbf{E}_2$ d'où $\gamma_{r+1} = ... = \gamma_q = 0 = \delta_1 = ... = \delta_r$ et on a alors $z = 0 \Rightarrow x = -y$, on en déduit aussi que $\beta_{r+1} = ... = \beta_p = 0 = \alpha_1 = ... = \alpha_r$, d'où la famille est libre, d'où base de $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

On en déduit

$$\begin{aligned} dim(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) &= r + (p-r) + (q-r) \\ &= p + q - r \\ &= dim\mathbf{E}_1 + dim\mathbf{E}_2 - dim(\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2). \end{aligned}$$

Chap. II. Déterminants

Printemps 2010

1 Déterminant d'ordre 2

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et est défini par

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple 1. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

On constate alors que :

1) Si deux rangées (ou deux colonnes) d'un déterminant sont

permutées la valeur d'un déterminant est multipliée par -1.

2) Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On constate que $detA = det^tA$, d'où la valeur d'un déterminant est conservée lorsque l'on échange les colonnes et les lignes (dans le même ordre).

2 Déterminant d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on définit

$$
\begin{aligned}
detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{11}} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{21}} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{31}}
\end{aligned}
$$

Exemple 2. :

$$
detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =
$$

$12 - 12 - 12 = -12$

Le cofacteur de l'élément de $detA$ de la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$

colonne est égal à $(-1)^{i+k}$ fois le mineur de cet élément (c. à .d le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne).

Remarque 1. *:*

Le cofacteur de a_{22} est $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Les signes $(-1)^{i+j}$ *forment la table suivante* $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.

On remarque que l'on peut écrire (1) *sous la forme :*

$detA = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$ *où* C_{i1} *est le cofacteur de* a_{i1} *dans* $detA$.

3) Le déterminant de A, $detA$, peut être developpé suivant

n'importe quelle ligne ou colonne, c'est à dire, qu'il peut être écrit sous la forme d'une somme de trois éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne), chacun multiplié par son cofacteur.

Exemple 3. :

$$detA = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4) Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant sont multipliés par une constante k, la valeur du nouveau déterminant est k fois la valeur du déterminant initial. Cette propriété peut être utilisée pour simplifier un déterminant.

Exemple 4. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2(1) & 2(3) & 2(2) \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 3(1) & 0 \\ 1 & 3(1) & 2 \\ -1 & 3(0) & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

5) Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant est nulle.

6) Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant est exprimé sous la forme d'un binôme, le déterminant peut être écrit comme somme de deux déterminants.

Exemple 5. :

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Si deux lignes (ou colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles, la valeur du déterminant est nulle.

Exemple 6. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8) La valeur d'un déterminant est conservée si l'on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison des autres lignes (ou colonnes).

Exemple 7. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{\xrightarrow{\hspace{2cm}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$\xrightarrow{C_1+C_3}$ signifie que l'on a ajouté la colonne C_3 à la colonne C_1.

Cette dernière propriété permet de simplifier énormément les calculs, elle permet de réduire le calcul d'un déterminant d'ordre 3 au calcul d'un seul déterminant d'ordre 2.

Exemple 8. *:*

$$Calculer \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{C_1+C_2-C_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-4+4) = 0$$

Remarque 2. *:*

La ligne (ou colonne) dans laquelle seront effectués les calculs ne doit pas être multipliée par des scalaires. La multiplication par un scalaire λ reviendrait à multiplier le déterminant par λ.

Exemple 9. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2L_1 - L_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \textit{ alors que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

3 Déterminant d'ordre n

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre n.

Pour $n = 1$, ça signifie a_{11}.

Pour $n \geq 2$, ça signifie la somme des produits des éléments de n'importe quelle ligne ou colonne par leurs cofacteurs respectifs c'est à dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in} \quad (\ i = 1, 2 \dots, \text{ ou } n\ )$$

ou

$$= a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk} \quad (\ k = 1, 2 \dots, \text{ ou } n\ )$$

Le déterminant d'ordre n est alors défini en fonction de n déterminants d'ordre $(n-1)$, chacun est à son tour, défini en fonction de $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite, finalement on aboutit aux déterminants d'ordre 2.

Remarque 3. *:*

Les propriétés 1) jusqu'à 8) restent valables pour un déterminant d'ordre n.

Pour calculer la valeur d'un déterminant, on développera suivant la *ligne ou colonne où il y a le plus de zéros.*

Exemple 10. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\xrightarrow{\hspace{2cm}}} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1+L_2}{\xrightarrow{\hspace{2cm}}} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 4. :

1) $det(A+B) \neq detA + detB$ *en général.*

2) $det(AB) = (detA)(detB)$

3) $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$ *où* A^{-1} *désigne l'inverse de* A.

4 Applications

4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n

On rappelle qu'une matrice carrée d'ordre n A est inversible s'il existe B d'ordre n telle que $AB = BA = I$ où I est la matrice unité d'ordre n, c'est à dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Critère : A est inversible si $det A \neq 0$.

Une fois assuré que A est inversible, on calcule son inverse à l'aide de la formule suivante : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det A}(adj A)}$ où $(adj A)$ désigne l'adjoint classique de A c'est à dire la matrice ${}^t[C_{ij}]$ où C_{ij} désigne la matrice des cofacteurs de A.

Exemple 11. :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{L_1-2L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$-46 \neq 0$, *donc A est inversible.*

Déterminons les 9 cofacteurs de A

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

4.2 Résolution de systèmes linéaires (Méthode de Cramer)

Un système d'équations, $AX = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n, peut être résolu à l'aide des déterminants, lorsque $detA \neq 0$.

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors

$x_i = \frac{1}{detA}[C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \ldots + C_{ni}b_n] = \frac{1}{detA} detB_i$ où B_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par b.

Exemple 12. *:*

Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}[-(-12+21)] = -3.$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-5}{3}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Remarque 5. *:*

La méthode de Gauss pour les systèmes et celle des matrices élémentaires pour le calcul de l'inverse demeurent les plus efficaces.

Chap. I. Calcul Matriciel

Printemps 2010

Dans tout ce qui suit, **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et propriétés

Un tableau rectangulaire, de nombres ($\in$ **K**), de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

est appelé matrice. Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice. Les lignes horizontales sont appelées rangées ou vecteurs rangées, et les lignes verticales sont appelées colonnes ou vecteurs colonnes de la matrice. Une matrice à m rangées et n colonnes est appelée matrice de type (m, n). On note la matrice (**??**) par (a_{ij}).

Exemple 1. *:*

1) La matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *a tous ses coefficients nuls.*

2) Une matrice $(a_1, ..., a_n)$ *ayant une seule rangée est appelée matrice uniligne.*

3) Une matrice $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *ayant une seule colonne est appelée matrice unicolonne.*

1) Une matrice ayant le même nombre de rangées et de colonnes est appelées matrice carrée, et le nombre de rangées est appelé son ordre.

2) La matrice carrée (a_{ij}) telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ $\forall i$ est appelée matrice unité, notée par I, elle vérifie $AI = IA = A$, $\forall A$ matrice carrée du même ordre que I.

3) Deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) sont égales si et seulement si elles ont même nombre de rangées et le même nombre de colonnes et les éléments correspondants sont égaux ; c'est à dire $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition

La somme de deux matrices de type (m, n) (a_{ij}) et (b_{ij}) est la matrice (c_{ij}) de type (m, n) ayant pour éléments $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$.

Exemple 2. *: Si* $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

L'addition des matrices satisfait les propriétés suivantes :

Pour A, B et C des matrices de type (m, n) on a :

1) $A + B = B + A$

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3) $A+O = O+A = A$ où O est la matrice nulle

4) $A+(-A) = O$ où $-A = (-a_{ij})$.

2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij}).$$

Exemple 3. *:*

Si $A = (2\ 7\ 8)$, *alors* $3A = (6\ 21\ 24)$

Cette multiplication vérifie :

Pour A, B des matrices de type (m, n)

1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

4) $1A = A$

2.3 Multiplication des matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{kl})$ une matrice de type (r, p), alors le produit AB (dans cet ordre) n'est défini que si $n = r$, et est la matrice $C = (c_{il})$ de type (m, p) dont les éléments $c_{il} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} b_{jl}$.

Exemple 4. *:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \ et \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ alors$$

$$AB =$$

$$\begin{pmatrix} 3(1)+2(5)+(-1)(6) & 3(0)+2(3)+(-1)(4) & 3(2)+2(1)+(-1)(2) \\ 0(1)+4(5)+6(6) & 0(0)+4(3)+6(4) & 0(2)+4(1)+6(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B, \ \lambda \in \mathbf{K}$

2) $A(BC) = (AB)C$

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $C(A+B) = CA + CB$

Pour vu que les produits qui figurent dans les expressions soient définis.

Remarque 1. *:*

1) La multiplication matricielle n'est pas en général commutative, c.à.d $AB \neq BA$.

2) La simplification n'est pas vraie en général, c.à.d $AB = O$ *n'entraîne pas, nécessairement* $A = O$ *ou* $B = O$.

3) Une matrice carrée A *est inversible s'il existe* B *telle que* $AB = BA = I$.

Exemple 5. *:*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq O$ *et pourtant*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

1) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0\dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ est appelée matrice diagonale.

2) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ou

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelée matrice triangulaire.

La première vérifie $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et la seconde $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

3) Au lieu de AA on écrit tout simplement A^2, de même $A^3 = A^2 A$ ....

4) Si les lignes et les colonnes d'une matrice sont échangées, la

matrice obtenue est appelée transposée de la matrice d'origine ; la transposée de A est notée ${}^tA$.

5) Si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$, on a ${}^t({}^tA) = A$.

Exemple 6. *:*

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};\ alors\ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Matrices élémentaires

3.1 Opérations élémentaires sur une matrice

Soit A une matrice, on appelle opération élémentaire sur A l'une des transformations suivantes :

1) Ajouter à une ligne (resp à une colonne) de A une autre ligne (resp colonne) multipliée par un scalaire. ($R_j \longleftarrow R_j + kR_i$)

2) Multiplier une ligne (resp une colonne) de A par un scalaire non nul. ($R_i \longleftarrow kR_i$)

3) Permuter les lignes (resp les colonnes) de A. ($R_i \longleftrightarrow R_j$)

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et $e(A)$ désigne les résultats obtenus après l'application de l'opération e sur une matrice A.

Soit E la matrice obtenue après l'application de e sur la matrice unité I, c'est à dire $E = e(I)$. E est alors appelée la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire e.

Exemple 7. :

Considérons la matrice unité d'ordre 3.

1) Permuter les lignes L_2 et L_3.

2) Remplacer ligne L_2 par $-6L_2$.

3) Remplacer ligne L_3 par $-4L_1 + L_3$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; \textit{et}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ *sont les matrices élémentaires correspondantes.*

Théorème 1. *:*

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et E la matrice élémentaire correspondante d'ordre m, alors $e(A) = EA$ pour toute matrice A de type (m, n).

Les opérations élémentaires ont des opérations inverses du même type

1) Permuter R_i et R_j est son propre inverse.

2) Remplacer R_i par kR_i et remplacer R_i par $\frac{1}{k}R_i$ sont inverses

3) Remplacer R_j par $kR_i + R_j$ et remplacer R_j par $-kR_i + R_j$ sont inverses.

Supposons que e' est l'inverse d'une opération élémentaire sur les lignes e, et soit E' et E les matrices correspondantes. Alors E est inversible et son inverse est E'. En particulier un produit de matrices élémentaires est inversible.

Théorème 2. *:*

Soit A une matrice carrée, alors A est inversible si et seulement si A est un produit de matrices élémentaires.

3.2 Application pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée

Exemple 8. *:*

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ *si elle existe.*

Pour ce faire nous écrivons la matrice unité à la droite de A *et nous appliquons les mêmes opérations à cette matrice que celles effectuées sur* A*.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - 4L_1]{L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1+2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-L_3]{-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$d'o\grave{u}\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons cette inverse sous forme de produit de matrices élémentaires :

$A^{-1} = BC$ *avec*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ et$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$