

MATHEMATIQUES

– ANALYSE –

Réalisé par le professeur :

M. REDOUABY

www.tifawt.com

Pour votre autoformation en économie et gestion.

ANALYSE

Contenu du cours :

- A. Fonctions à **une** variable réelle
- B. Fonctions à **deux** variables réelles

Séance n° 1

A. Fonctions à **une** variable réelle

1. Introduction

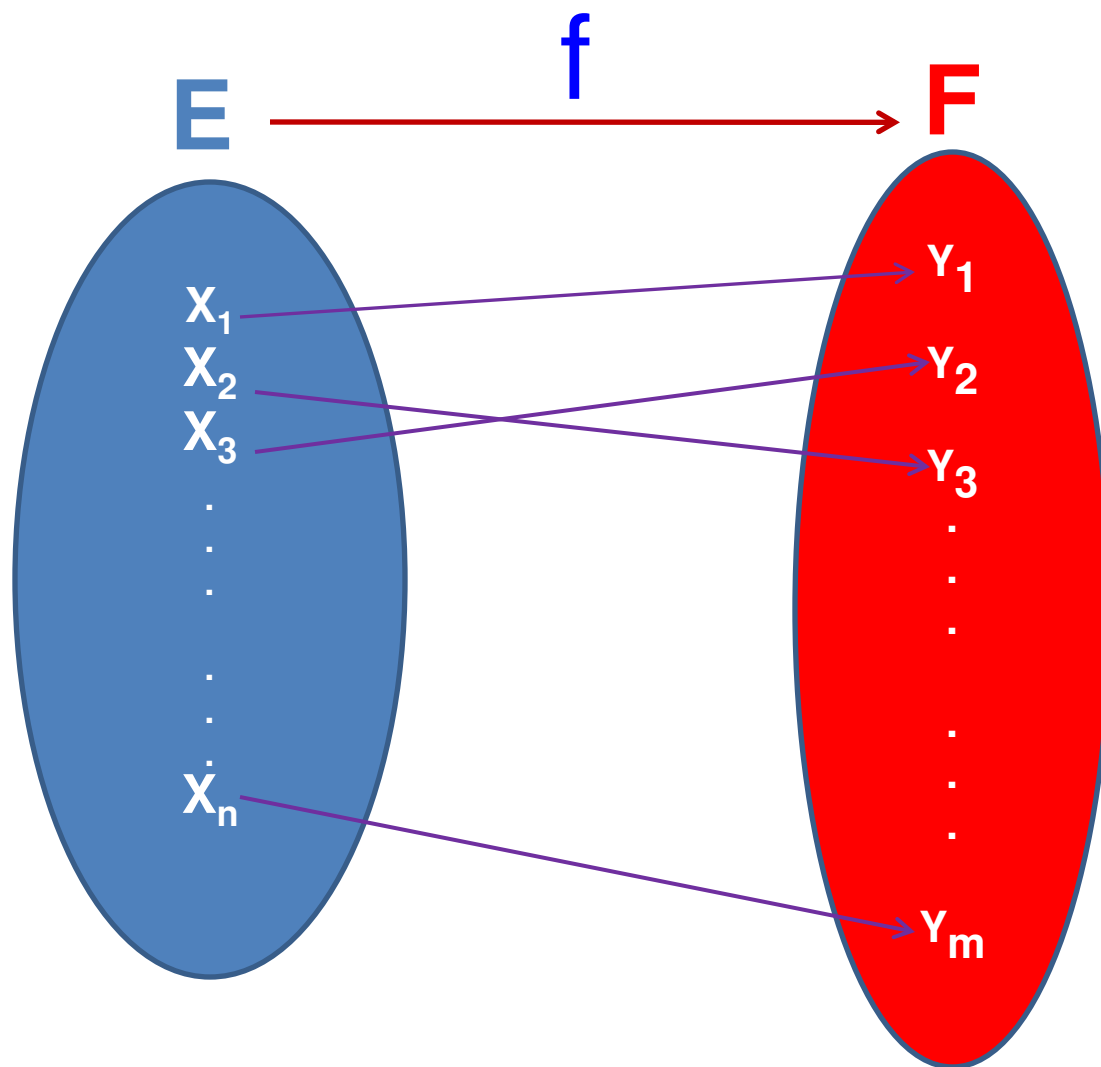
- a) Notion de **fonction**
- b) Notion d'**injection**
- c) Notion de **surjection**
- d) Notion de **bijection**
- e) **Bijection** et bijection réciproque

a) Notion de fonction

Définition

Une **fonction** est une **relation** entre **deux** ensembles **E** et **F** telle que :

Chaque élément de **E** (ensemble des **antécédents**) a **au plus une image** dans **F** (ensemble des **images**)



- E = ensemble **de départ**, contient '**n**' éléments :

$$X_1 ; X_2 ; X_3 ; \dots ; X_n ,$$

Ce sont **les antécédents**

- F = ensemble **d'arrivée**, contient '**m**' éléments :

$$Y_1 ; Y_2 ; Y_3 ; \dots, Y_m$$

Ce sont **les images**

Nous avons : $f(x_1)=y_1 ; f(x_2)=y_3 ; f(x_3)=y_2 ;$

$$\dots ; f(x_n)=y_m$$

Y_1 est *l'image* de X_1 ; X_1 est *l'antécédent* de Y_1
 Y_3 est *l'image* de X_2 ; X_2 est *l'antécédent* de Y_3

.....

Y_m est *l'image* de X_n ; X_n est *l'antécédent* de Y_m

Pour que f soit une **fonction**,
chaque élément de **E** doit avoir
au plus une **image** dans **F**

Exemple

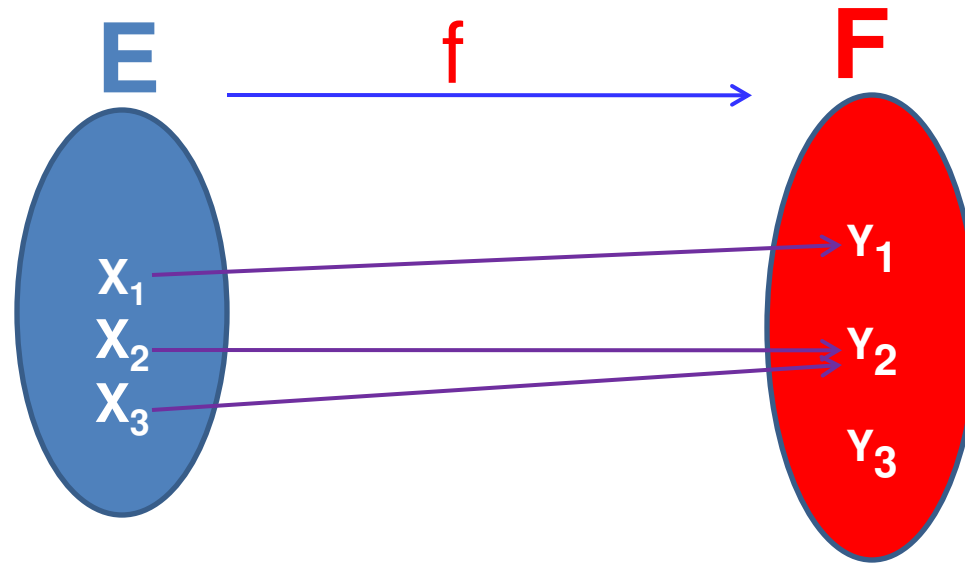
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

f est une **fonction** car :

$\forall x \in \mathbb{R}$, x a **une image** et **une seule**, sauf « 0 » qui n'a pas d'image

Ainsi, par une fonction, un élément de E ne peut jamais avoir plus d'une image dans F

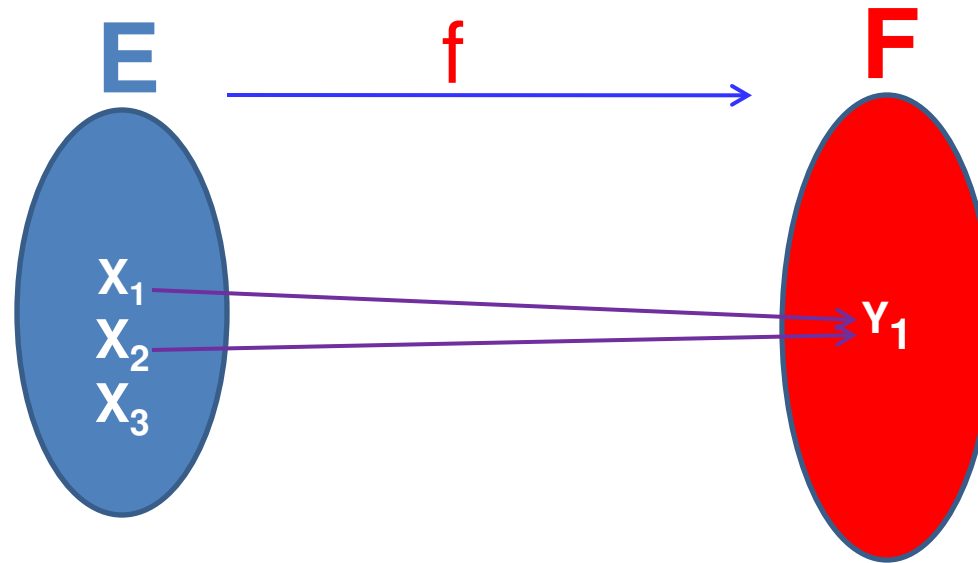
Exemple 1



f est une **fonction** car :

$$f(x_1) = y_1 \ ; \ f(x_2) = y_2 \ ; \ f(x_3) = y_2$$

Exemple 2

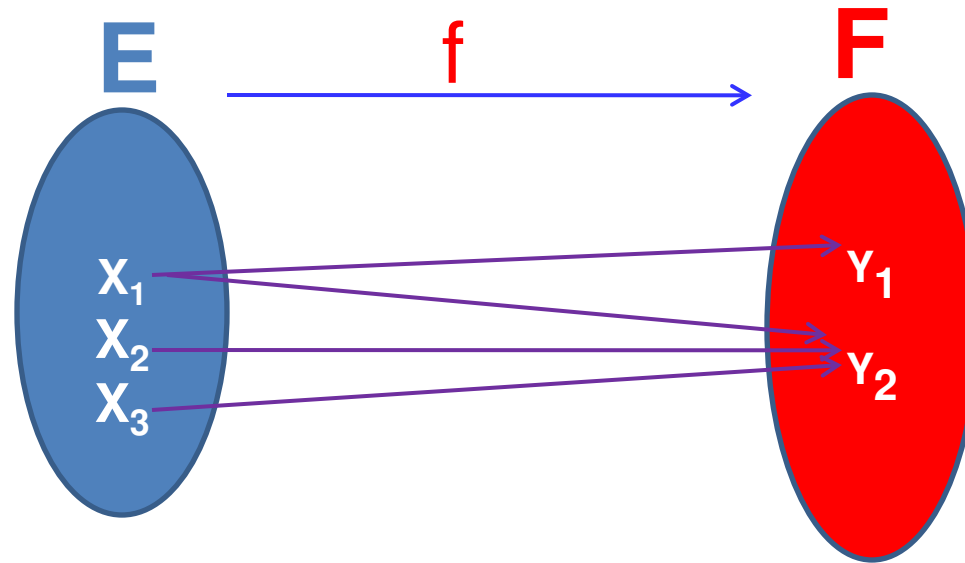


f est une **fonction** car :

$f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_1$; x_3 n'a pas d'image

Chaque élément de E a **au plus une image**

Exemple 3



f n'est pas une **fonction** car :

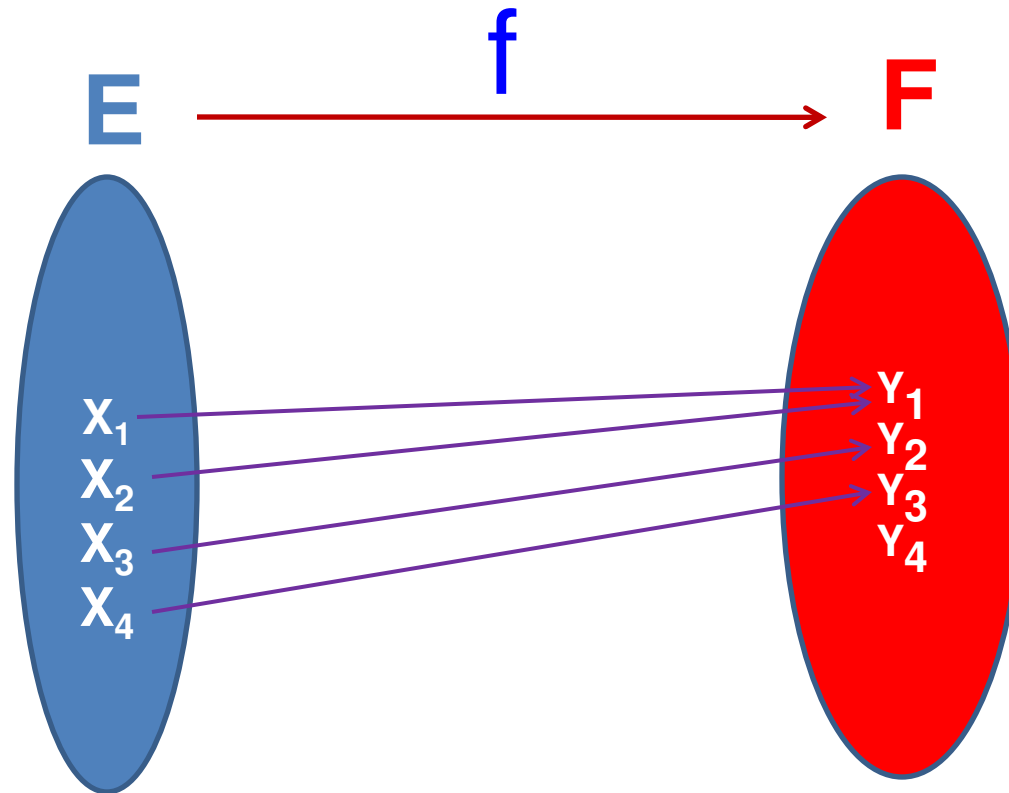
x_1 a deux images y_1 et y_2

Remarque Importante

Fonction et Application

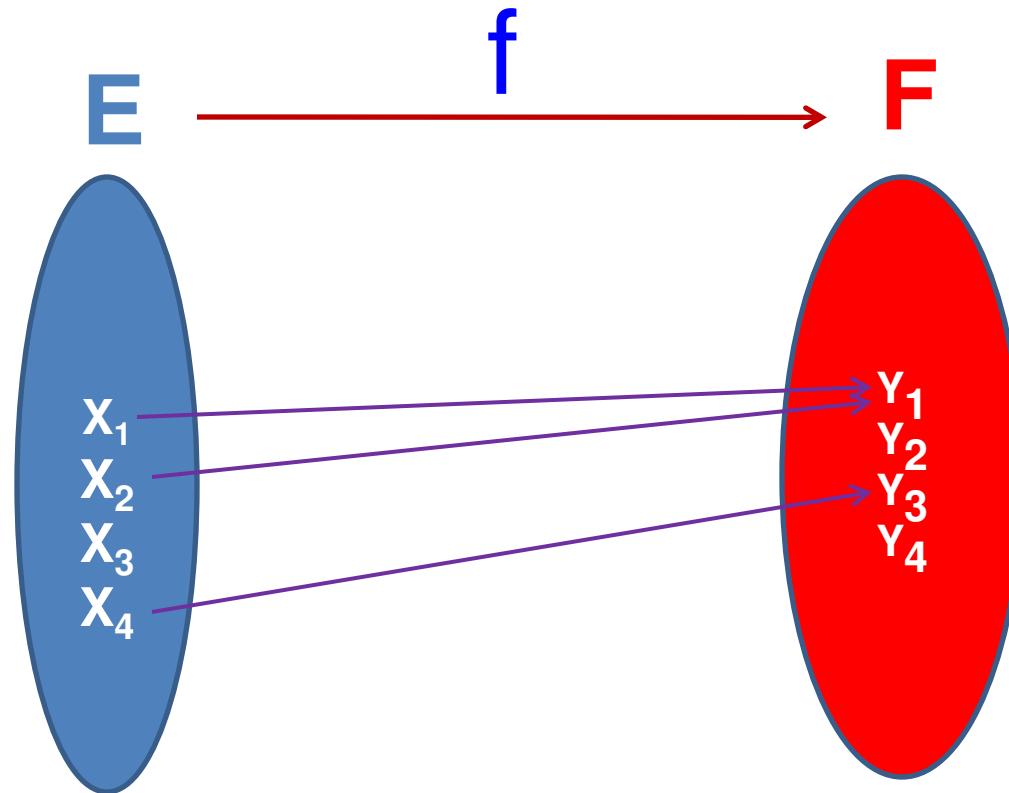
Une application est une fonction particulière. C'est une fonction telle que chaque antécédent a exactement une image (s'il y a un antécédent qui n'a pas d'image alors c'est simplement une fonction et non une application)

Exemple 1



Chaque antécédent a **une image et une seule**, f est donc mieux qu'une **fonction**, c'est une **application**

Exemple 2



x_3 n'a pas d'image dans F , donc f n'est pas une application, mais simplement une fonction

Exemple 3

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

f est simplement une **fonction** car et **non** une **application**
car **0** n'as pas d'image

Exemple 4

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

f est une **application** car chaque élément de $\mathbb{R}$ admet
une image et une seule « **exactement une image** »

b) Notion d'injection

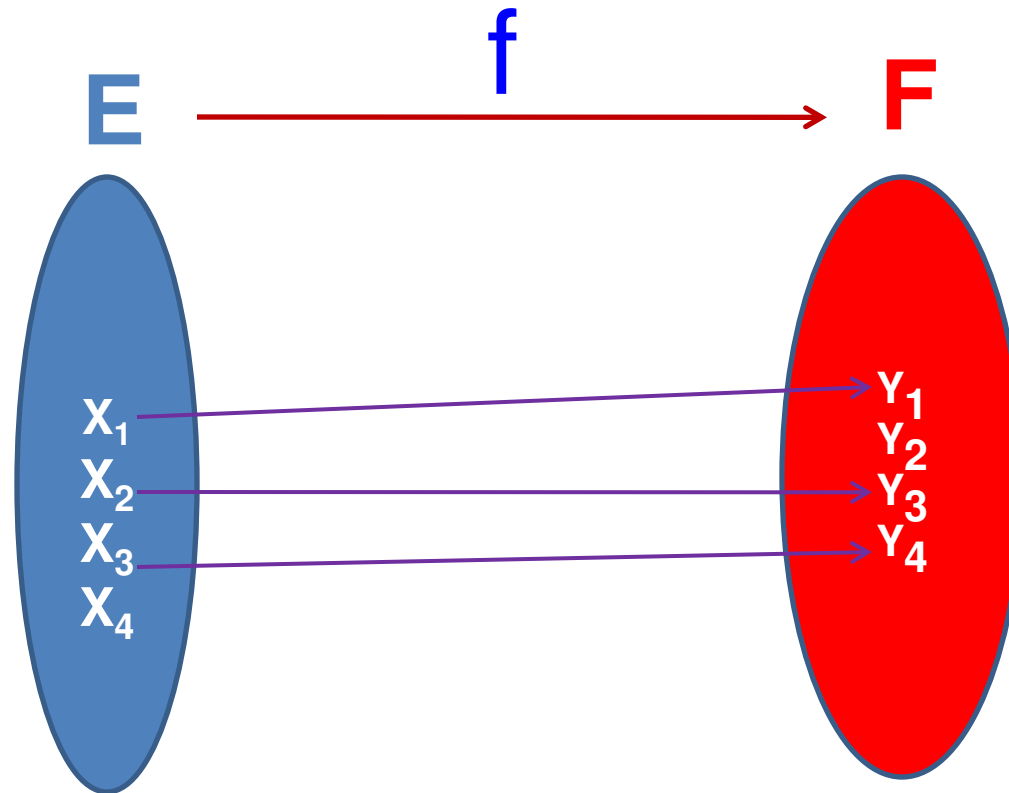
www.tifawt.com

« *fonction **injective*** »

Définition

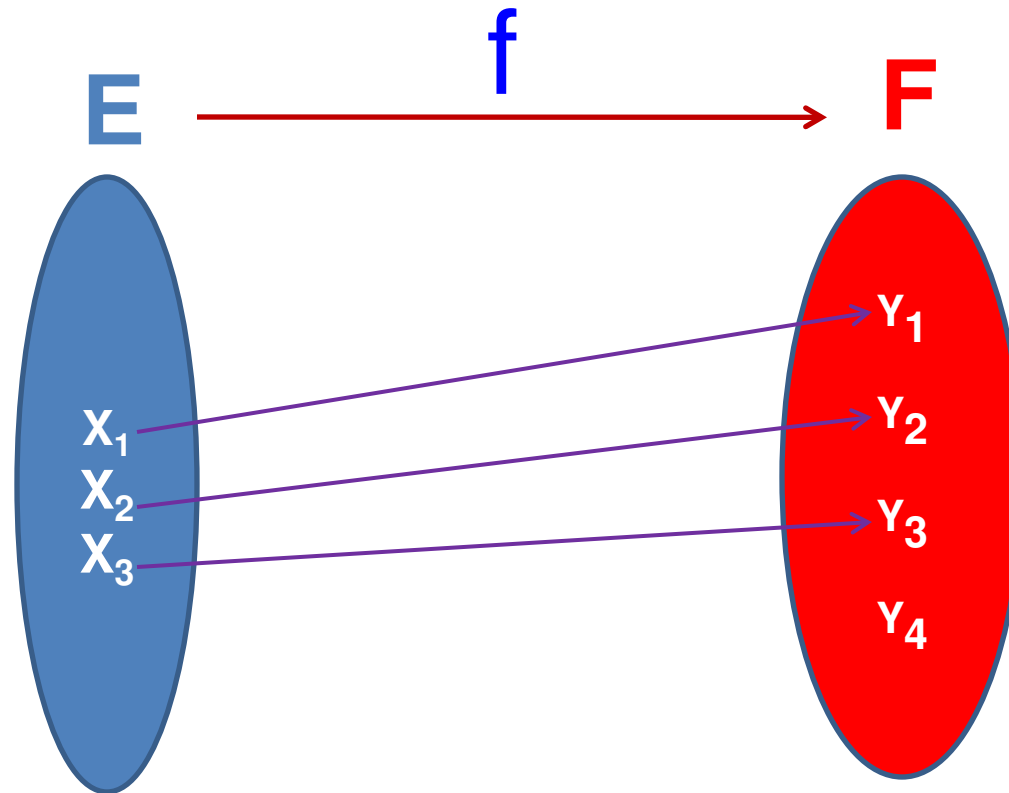
f est une fonction de E vers F . f est dite **injective** lorsque chaque élément de F a au plus un antécédent dans E : un antécédent ou rien

Exemple 1



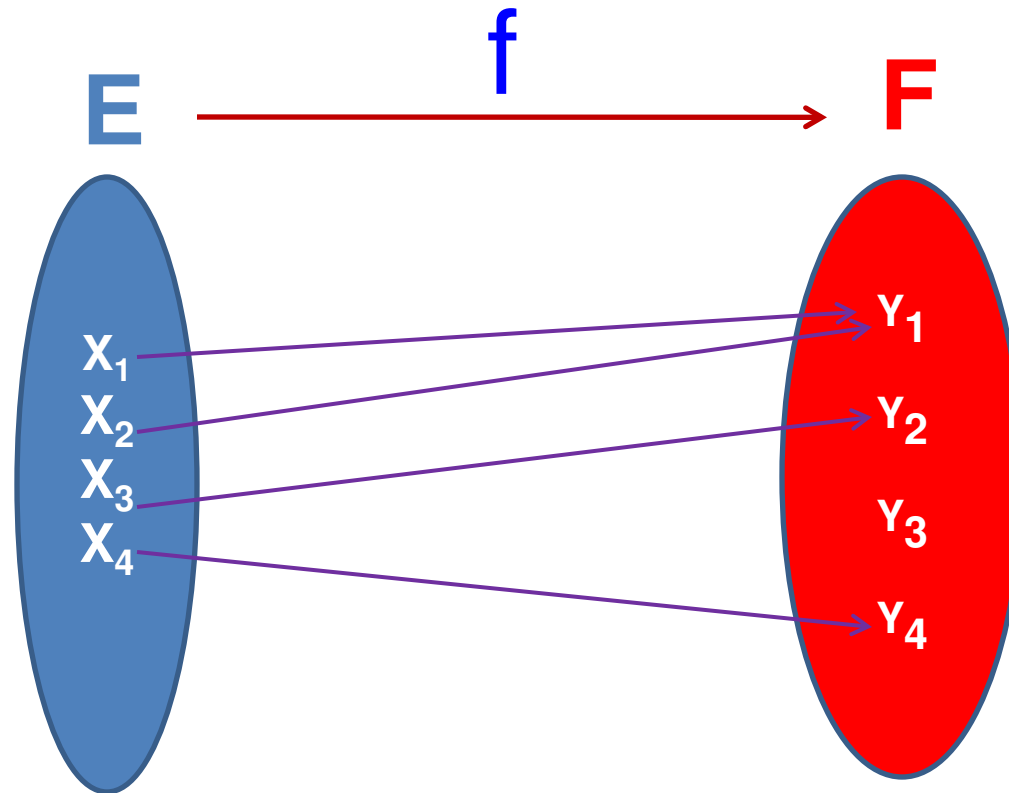
Chaque élément de **F** a au plus un antécédent, **f** est donc une **fonction injective**

Exemple 2



Chaque élément de **F** a au plus un antécédent, **f** est donc une **fonction injective**

Exemple 3



f n'est pas une fonction injective car :

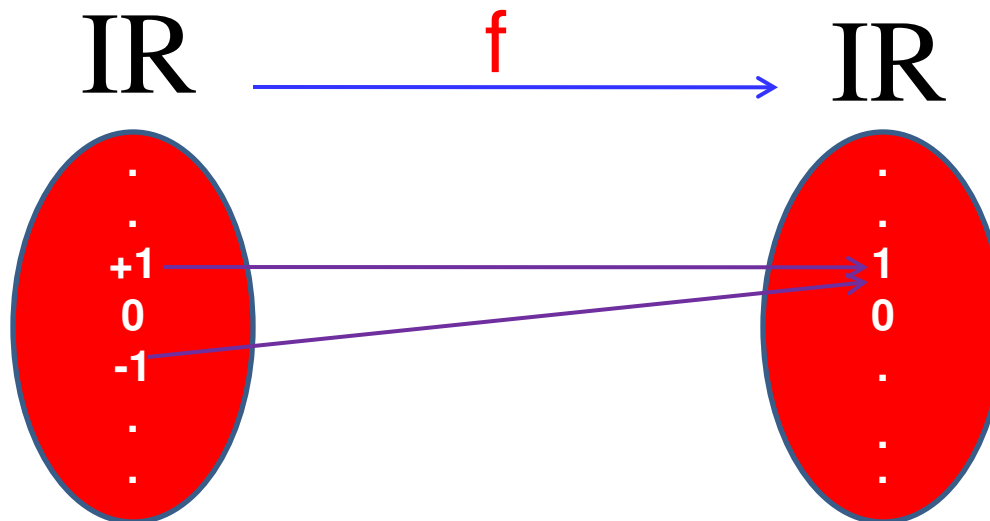
y_1 a deux antécédents : x_1 et x_2

Exemple 4

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

f n'est pas **injective** car :
par exemple **1** a deux antécédents **+1** et **-1**



Par contre

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

g est **injective** car :

Si Y est négatif ($Y < 0$), alors Y **n'a pas d'antécédent**

Si Y est positif ($Y \geq 0$), Y **a un seul antécédent** : $\sqrt{Y}$

A retenir

f est une **fonction** de **E** vers **F**. f est **injective** si elle vérifie :

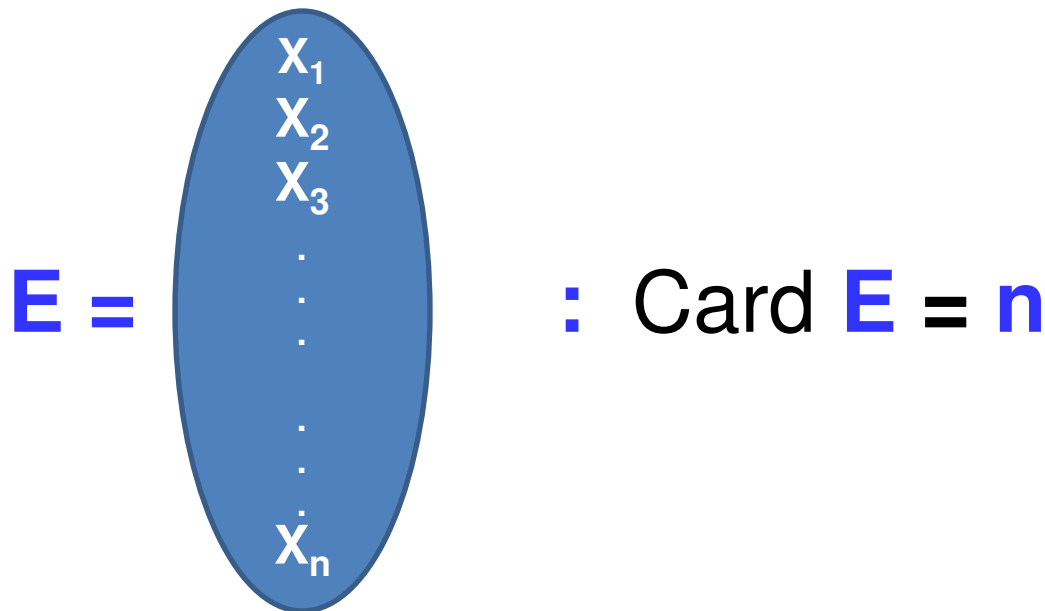
$$\forall x_1; x_2 \in E \quad : \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

C'est-à-dire : **deux** antécédents **ont la même image** si et seulement si **ils sont égaux**

Remarque

f est une fonction de E vers F . Si f est **injective** alors : $\text{Card } E \leq \text{Card } F$

$\text{Card } E$ = nombre des éléments de E



Remarque

Méthode de la règle : Voir TD

c) *Notion de surjection*

www.tifawt.com

« *fonction **surjective*** »

Définition

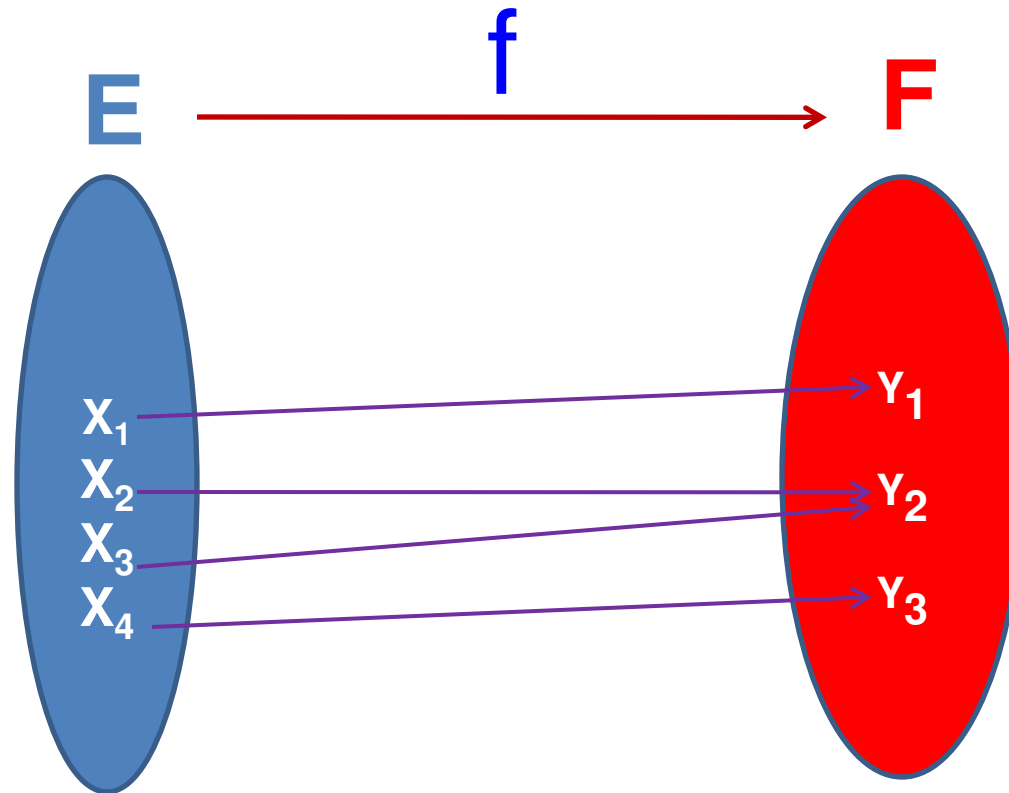
f est une fonction de E vers F . f est dite **surjective** lorsque chaque élément de F a au moins un antécédent dans E : un antécédent ou plusieurs antécédents

« *fonction **surjective*** »

f est **surjective** si et seulement si :

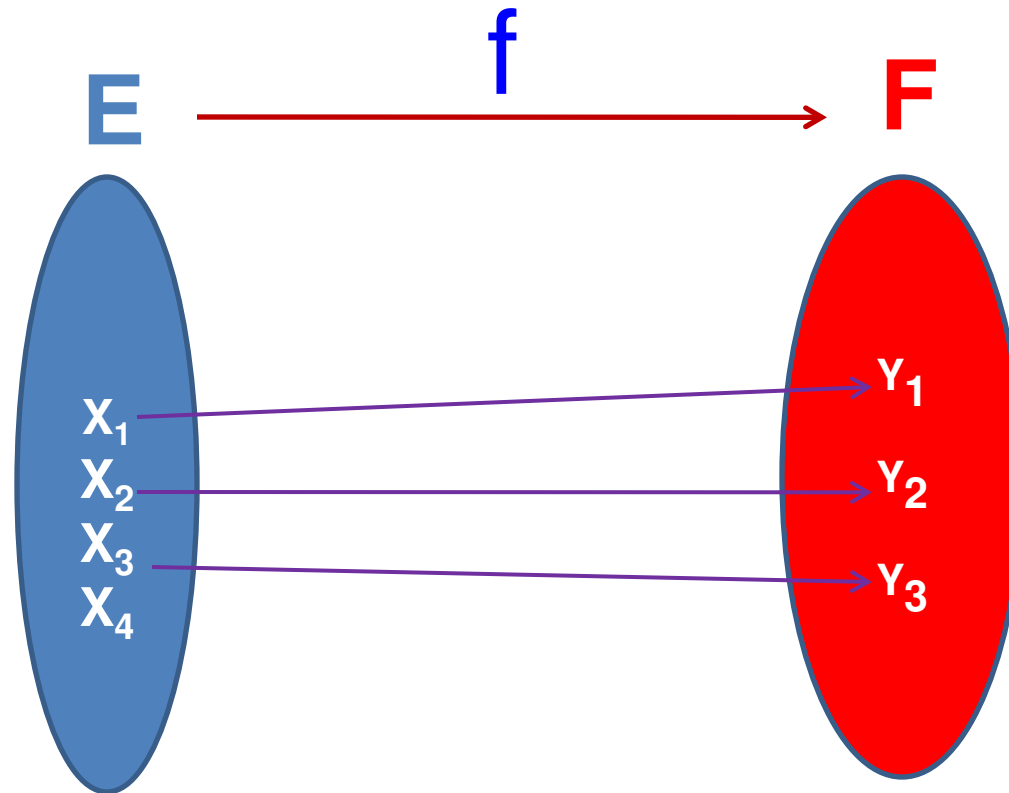
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E / \quad f(x) = y$$

Exemple 1



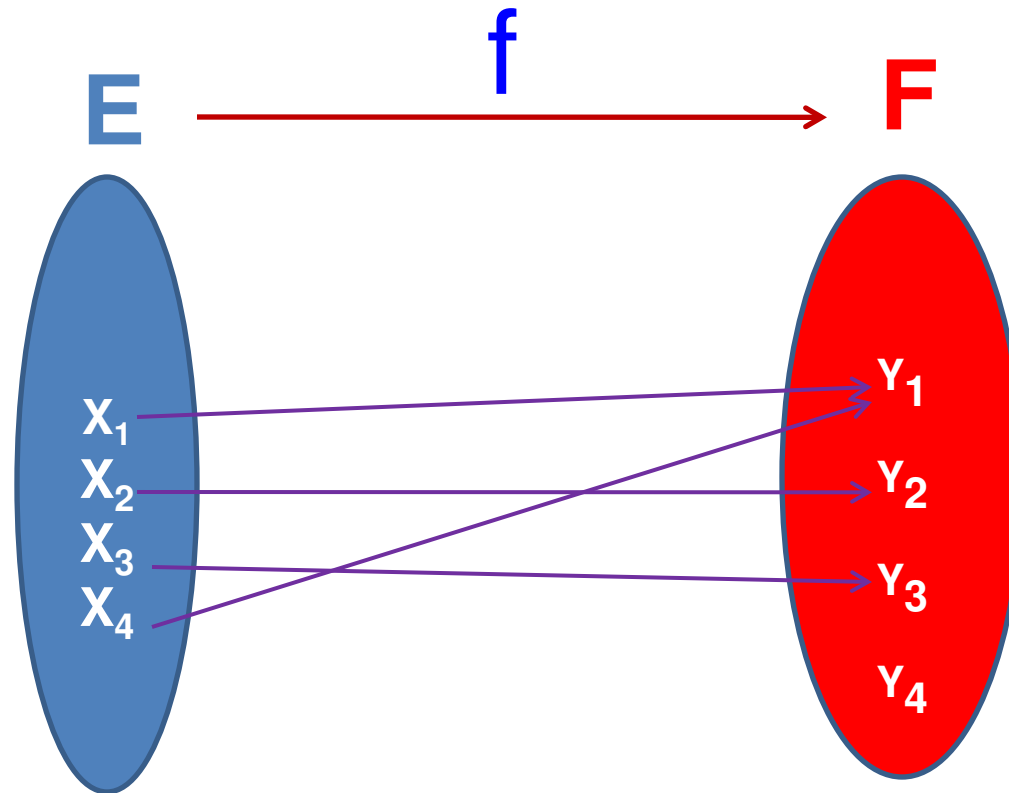
Chaque élément de F a au moins un antécédent, f est donc une **fonction surjective**

Exemple 2



Chaque élément de F a au moins un antécédent, f est donc une **fonction surjective**

Exemple 3



f n'est :

ni **injective** : y_1 a deux antécédents x_1 et x_4

ni **surjective** : y_4 n'a pas d'antécédent

Remarque

f est une fonction de E vers F . Si f est **surjective** alors : $\text{Card } E \geq \text{Card } F$

$\text{Card } E$ = nombre des éléments de E

Remarque

Méthode de la règle : Voir TD

d) *Notion de bijection*

www.tifawt.com

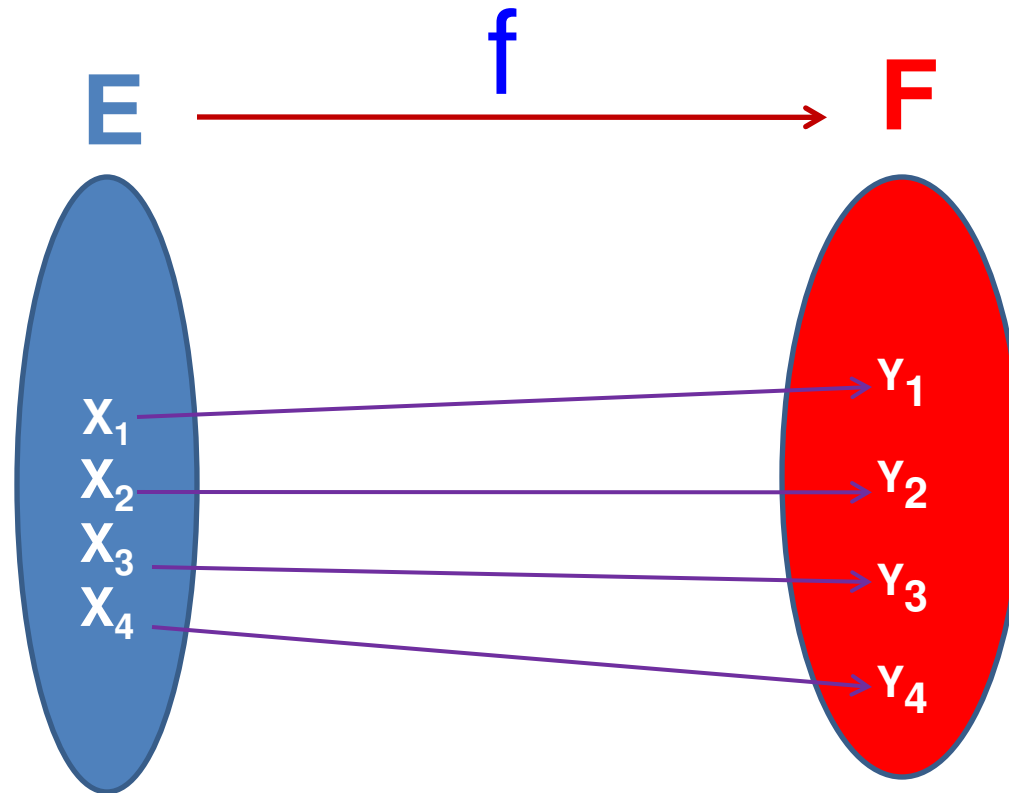
« *fonction **bijective*** »

Définition

f est une **fonction bijective** (ou une **bijection**) de **E** vers **F** si et seulement f est une **application** qui est **à la fois injective** et **surjective**

C'est-à-dire **chaque** élément de **E** a **une image** et **une seule** et **chaque** élément de **F** a un **antécédent** et un **seul**

Exemple 1

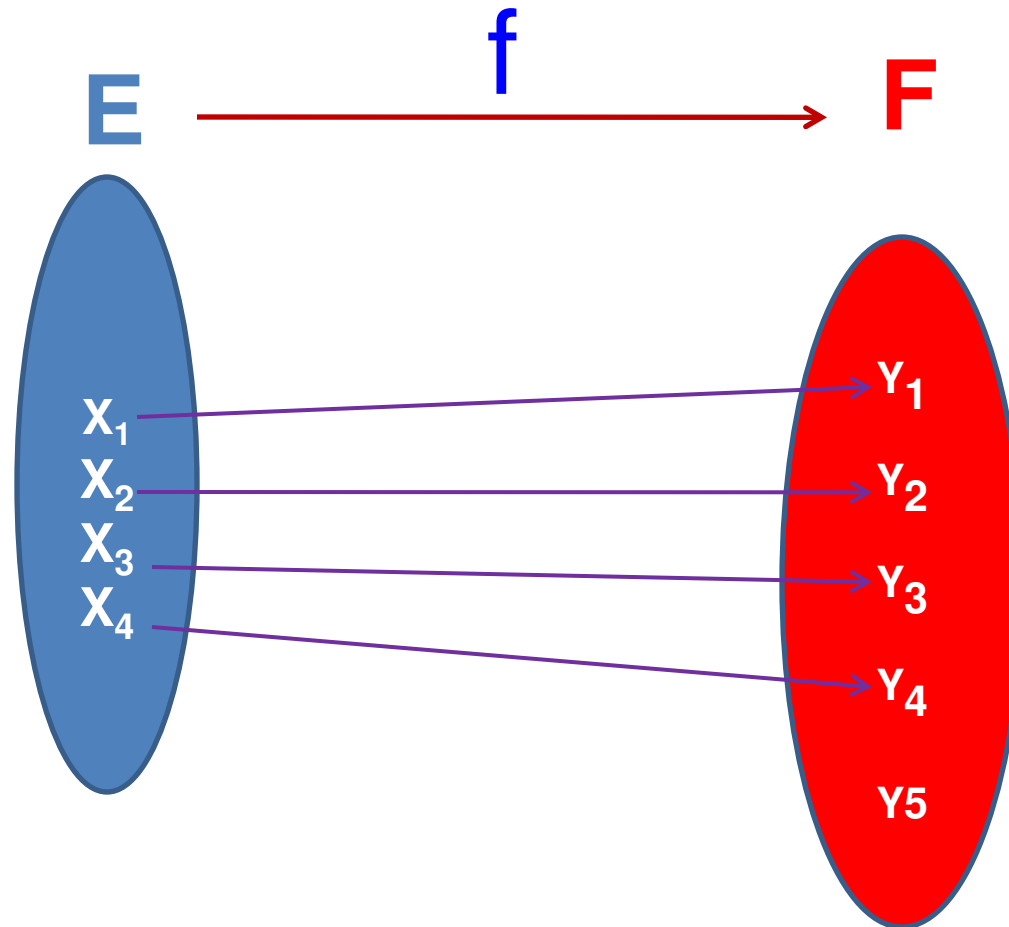


f est une **bijection** de E vers F :

f est **injective**

f est **surjective**

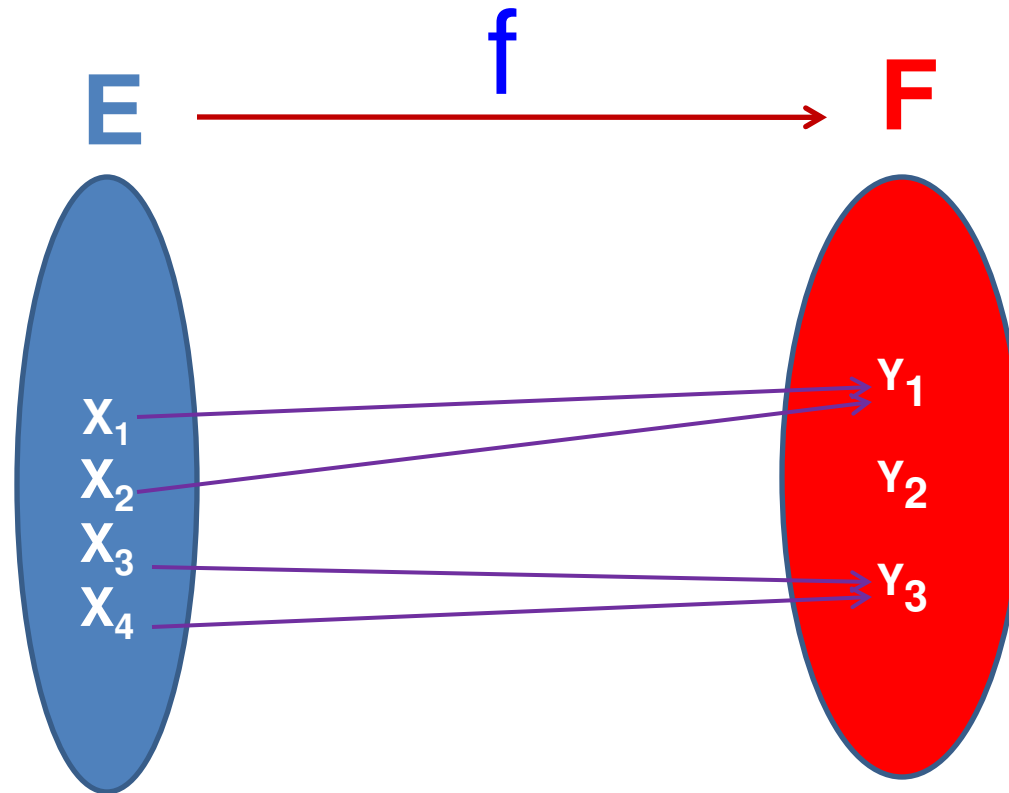
Exemple 2



f n'est pas **bijective** de E vers F :

f n'est pas **surjective** car y_5 n'a pas d'antécédent

Exemple 3

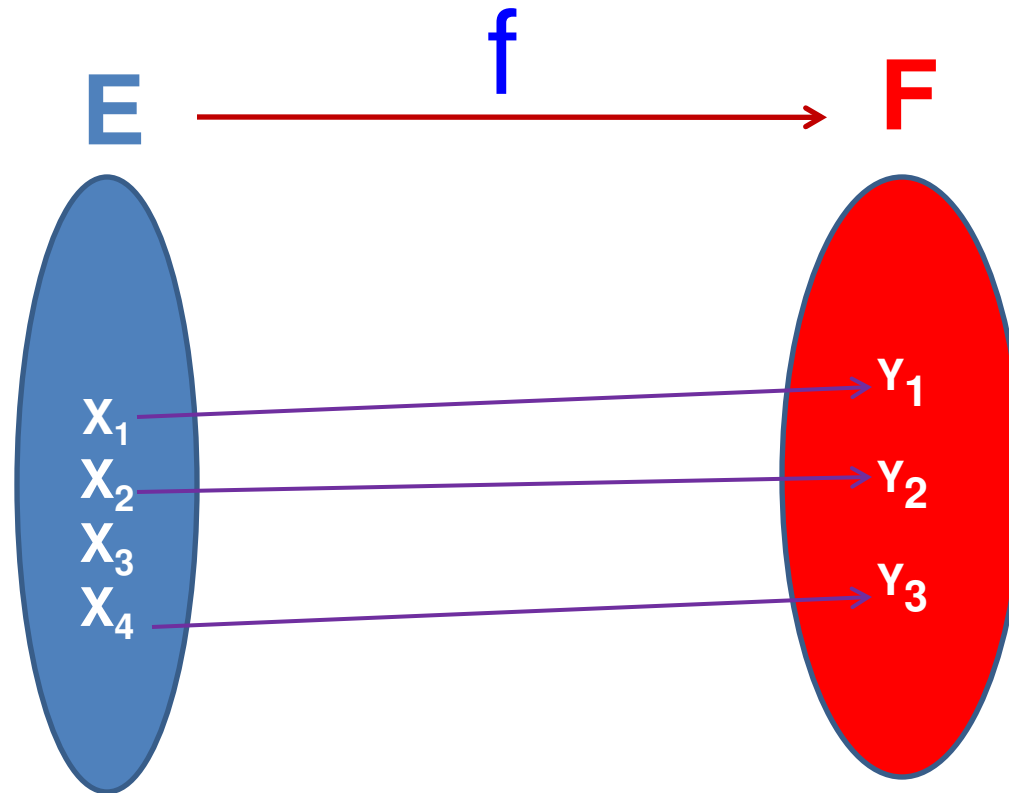


f n'est pas une **bijection** de E vers F :

f n'est pas **injective**

f n'est pas **surjective**

Exemple 4



f n'est pas une **bijection** de E vers F car :

f n'est pas une **application** : x_3 n'a pas d'image

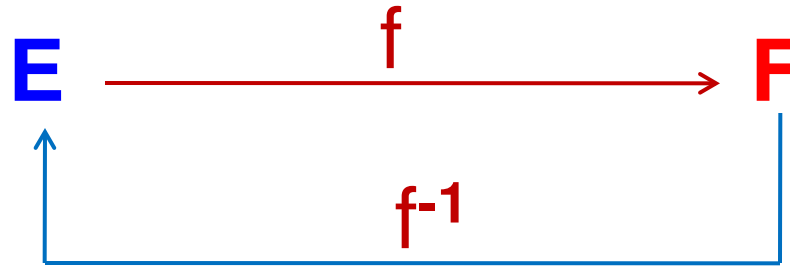
Remarque

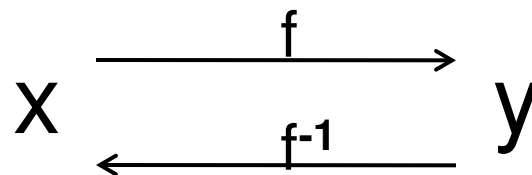
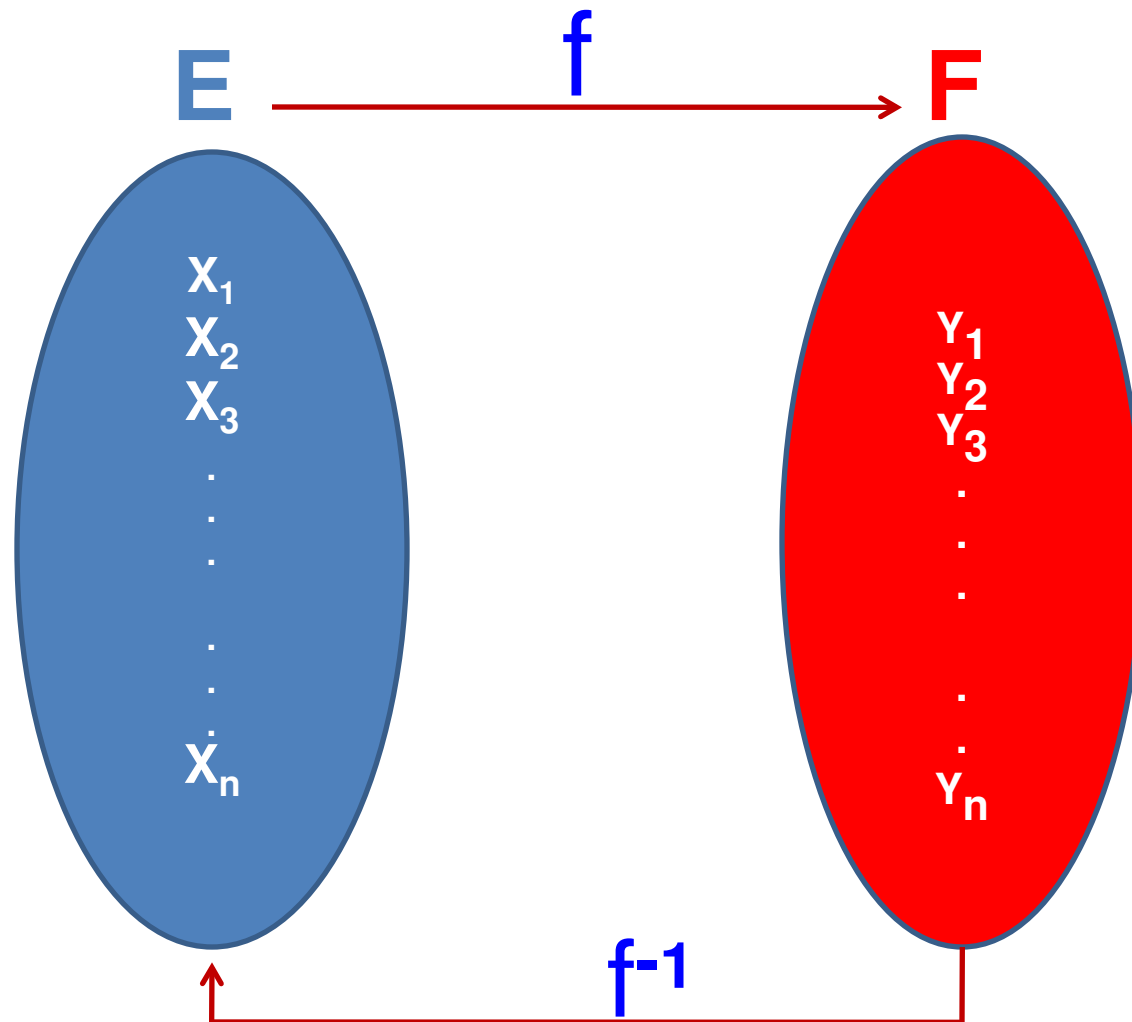
f est une fonction de E vers F .

Si f est **bijective** alors :

$$\text{Card } E = \text{Card } F$$

e) *bijection et bijection **ré**éciproque*



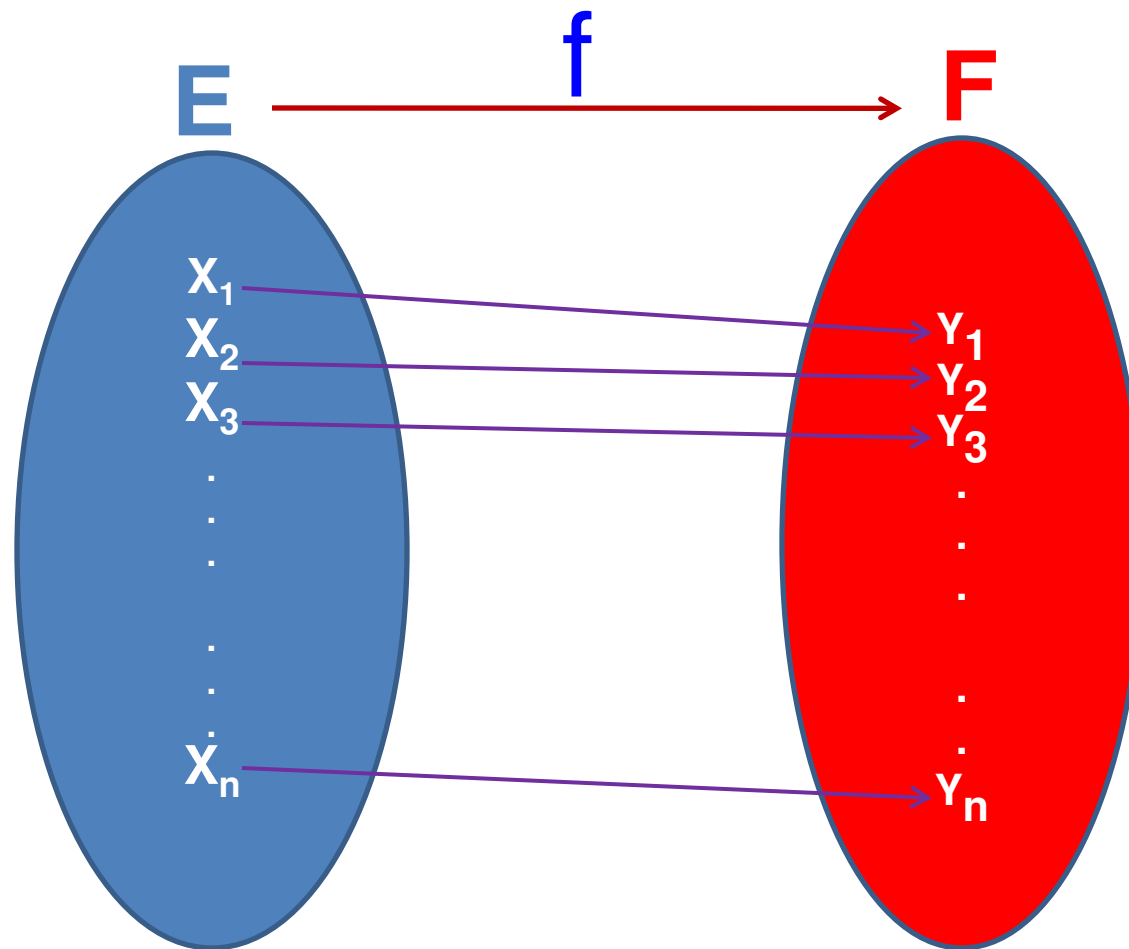


*bijection et bijection **ré**éciproque*

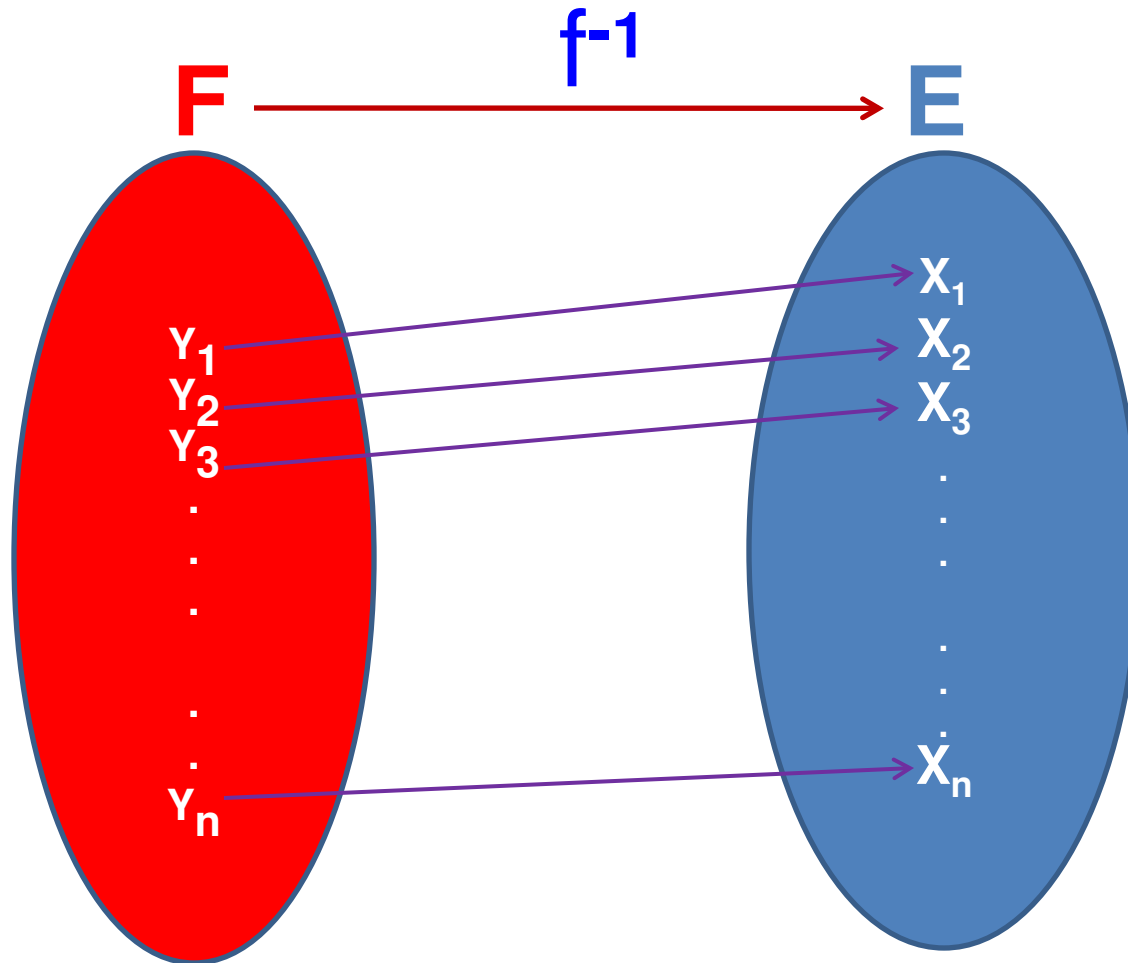
Comment passer de f à f^{-1} et inversement :

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

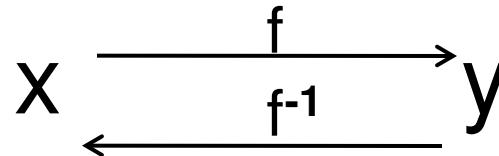
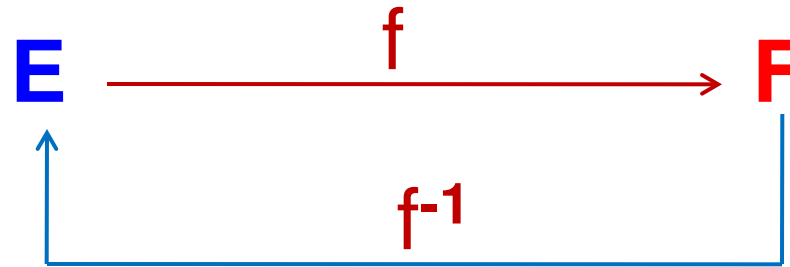
Ainsi si:



alors:



Relation *fondamentale* entre f et f^{-1}



$$\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F : f \circ f^{-1}(y) = y$$

Exemple

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f^{-1} \text{ of } (x) = \sqrt{x^2} = |x| = x$

et : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \text{ of }^{-1}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

Exemple

$$\mathbb{R}^{*+} \xrightarrow{f = \ln} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f^{-1} = \exp} \mathbb{R}^{*+}$$

$$x \mapsto e^x$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f^{-1} \text{ of } (x) = e^{\ln x} = x$$

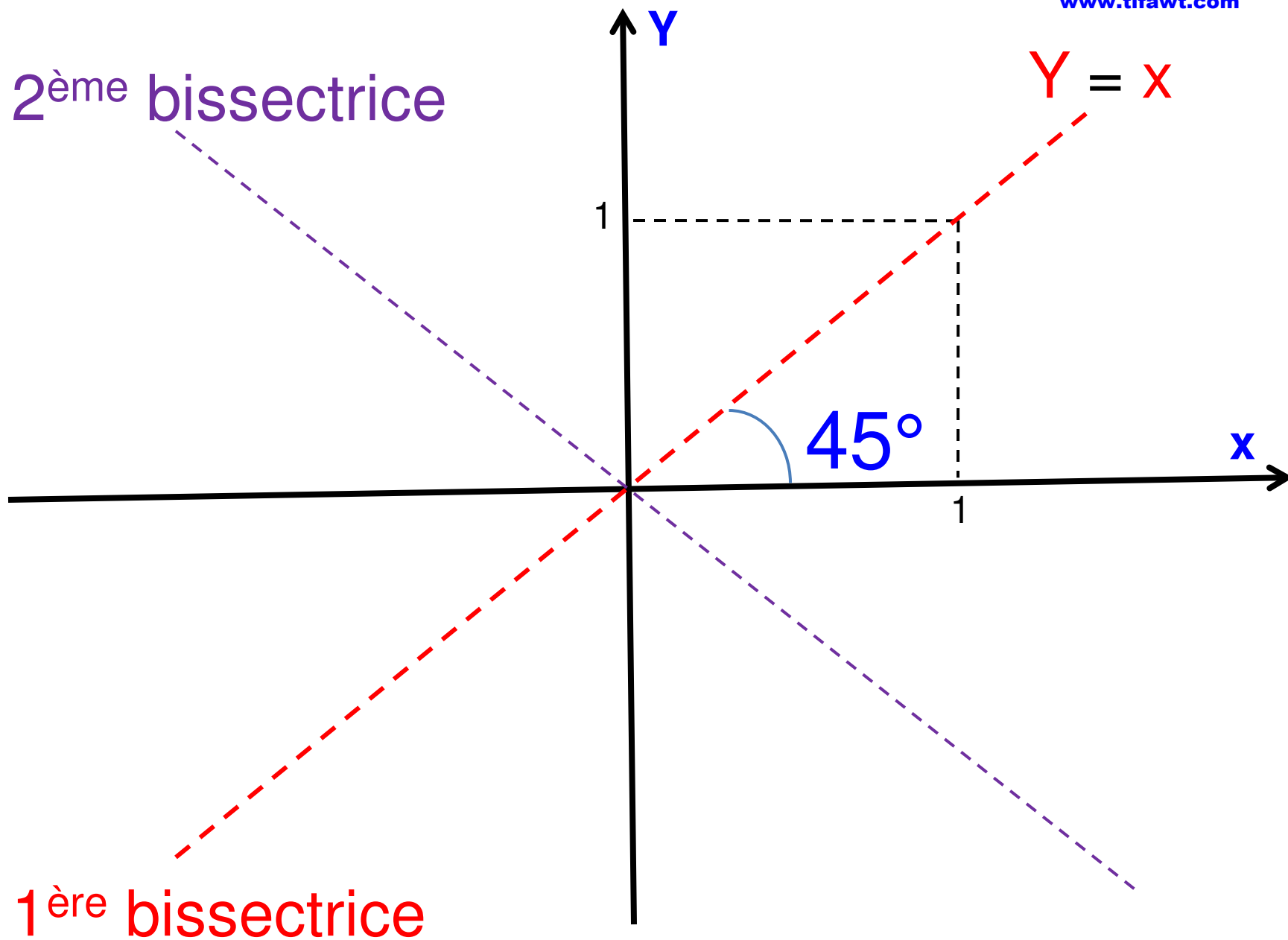
$$\text{et : } \forall x \in \mathbb{R} \quad f \text{ of }^{-1}(x) = \ln e^x = x$$

Séance n° 2

Remarque www.tifawt.com

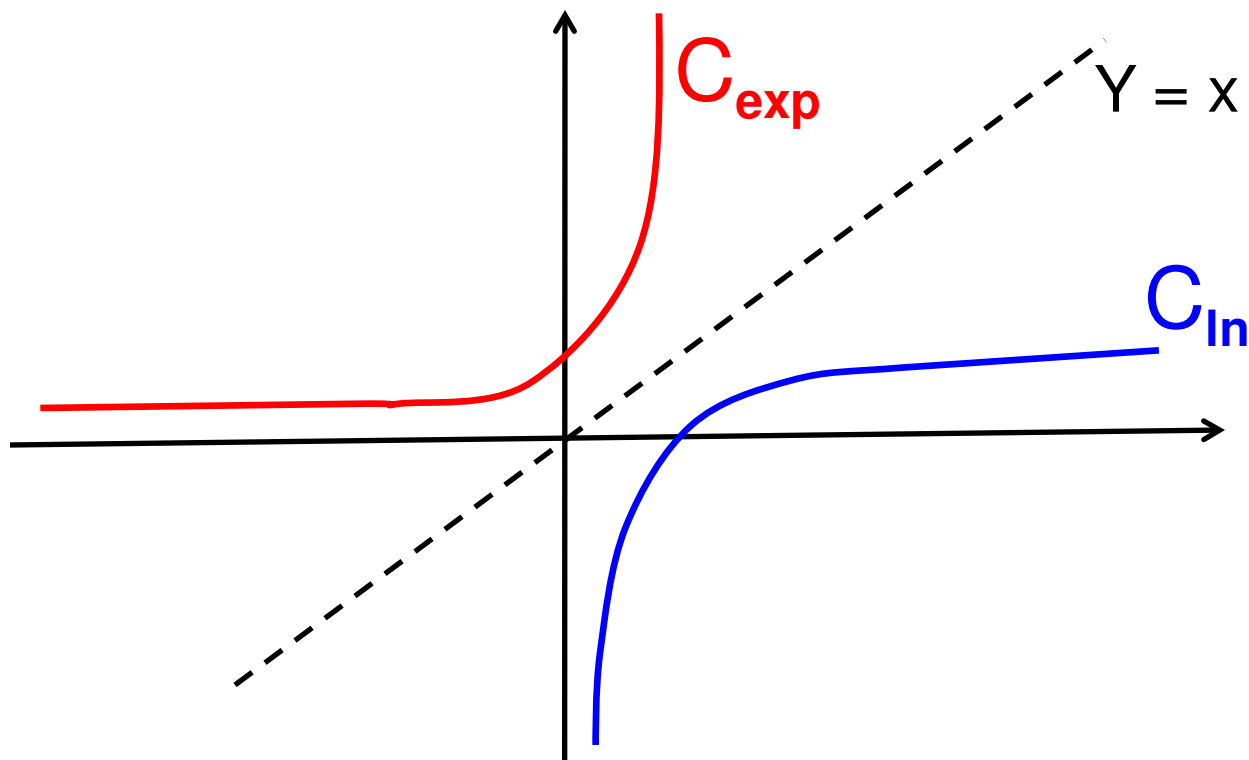
Relation entre
la courbe de f et la courbe de sa réciproque f^{-1}

A retenir : La courbe de f « C_f » et la courbe de sa fonction réciproque f^{-1} « $C_{f^{-1}}$ » sont **symétriques** par rapport à la **1^{ère} bissectrice** (la droite d'équation $y = x$)



Exemple

la courbe de $\ln$ « logarithme népérien » et la courbe de sa réciproque $\exp$ « exponentielle » sont **symétriques** par rapport à la droite $y = x$



A. Fonctions à **une** variable réel

2. Domaine de **définition**

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ admet une image} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ est définie « on peut la calculer »} \right\}$$

1. Fonctions polynômiales :

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

fonction polynômiale (ou polynôme) de **degré n**

$$D_f = \mathbb{R}$$

Fonctions polynômiales

Exemples :

- $f(x) = 3x^2 + x - 5$;
- $f(x) = 7x^3 - x^2 + x + 15$;
- $f(x) = 7x^5 - x^4 + x^2 - 24$;

Pour toutes ces fonctions :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

2. Fonctions rationnelles :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$P(x)$ et $Q(x)$ sont deux **polynômes**

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \right\}$$

Fonctions rationnelles www.tifawt.com

Exemple :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$$

Car $x^2+1 \neq 0$, ainsi :

$$Q(x)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

3. Fonctions racines ($n^{\text{èmes}}$) :

$$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} ; n \text{ est un entier naturel non nul}$$

$$n = 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; \dots\dots\dots$$

A retenir :

- Si n est pair : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq 0\}$
- Si n est impair : $D_f = D_u$

Fonctions racines ($n^{\text{èmes}}$) www.tifawt.com

Exemples :

- « racine carrée » : $f(x) = \sqrt{2x+1}$

On doit avoir :

$$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/2 \Rightarrow D_f = [-1/2; +\infty[$$

- « racine cubique » : $f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

$u(x) = 2x+1$ définie quelque soit x donc

$$D_f = D_u = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

4. Fonctions puissances :

$$f(x) = u(x)^\alpha ; \quad \alpha \text{ est un nombre rationnel}$$

$$\alpha = m/n$$

m et n sont deux entiers naturels non nuls

On écrit : $f(x) = u(x)^{m/n} = (u(x)^m)^{1/n}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[n]{u(x)^m}$$

Fonctions puissances

www.tifawt.com

Exemples :

1. $f(x) = (2x+1)^{4/5}$ ici $\alpha = 4/5$

On a : $f(x) = \sqrt[5]{(2x+1)^4}$; **racine impaire**,

on regarde alors le domaine de définition de $(2x+1)^4$:

$(2x+1)^4$ est une fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

Fonctions puissances

www.tifawt.com

Exemples :

2. $f(x) = (2x+1)^{-3/4}$

On a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$; racine paire,

on doit avoir : $(2x+1)^3 \geq 0$ et $(2x+1)^3 \neq 0$

$$(2x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1/2$$

$$D_f =]-1/2; +\infty[$$

5. Fonctions logarithmiques :

$f(x) = \ln(u(x))$; $\ln$ désigne le **logarithme népérien**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$$

Exemple : $f(x) = \ln(1 - x^2)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 > 0\right\};$$

or $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, tableau des signes

Fonctions logarithmiques

Exemple : $f(x) = \ln(1-x^2)$

x	-1		1	
1-x	+	+	0	-
1+x	-	0	+	+
1-x²	-	0	+	0

Ainsi : $D_f =]-1; +1[$

Exemple 2 : $f(x) = \ln((2x+7)(x-5))$ www.tifawt.com

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (2x+7)(x-5) > 0 \right\}$$

Tableau des signes :

x	-7/2 5			
2x+7	-	0	+	
x-5		-	0	+
Produit	+	0	-	0

Donc :

$$D_f =]-\infty; -7/2[\cup]5; +\infty[$$

6. Fonctions exponentielles :

$$f(x) = e^{u(x)} ; \text{ alors } D_f = D_u$$

« l'exponentielle est toujours définie »

Exemples :

$$\bullet f(x) = e^{x^2 + x + 2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} ;$$

$$\bullet f(x) = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ ;$$

$$\bullet f(x) = e^{1/(x-2)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

A. Fonctions à **une** variable réel

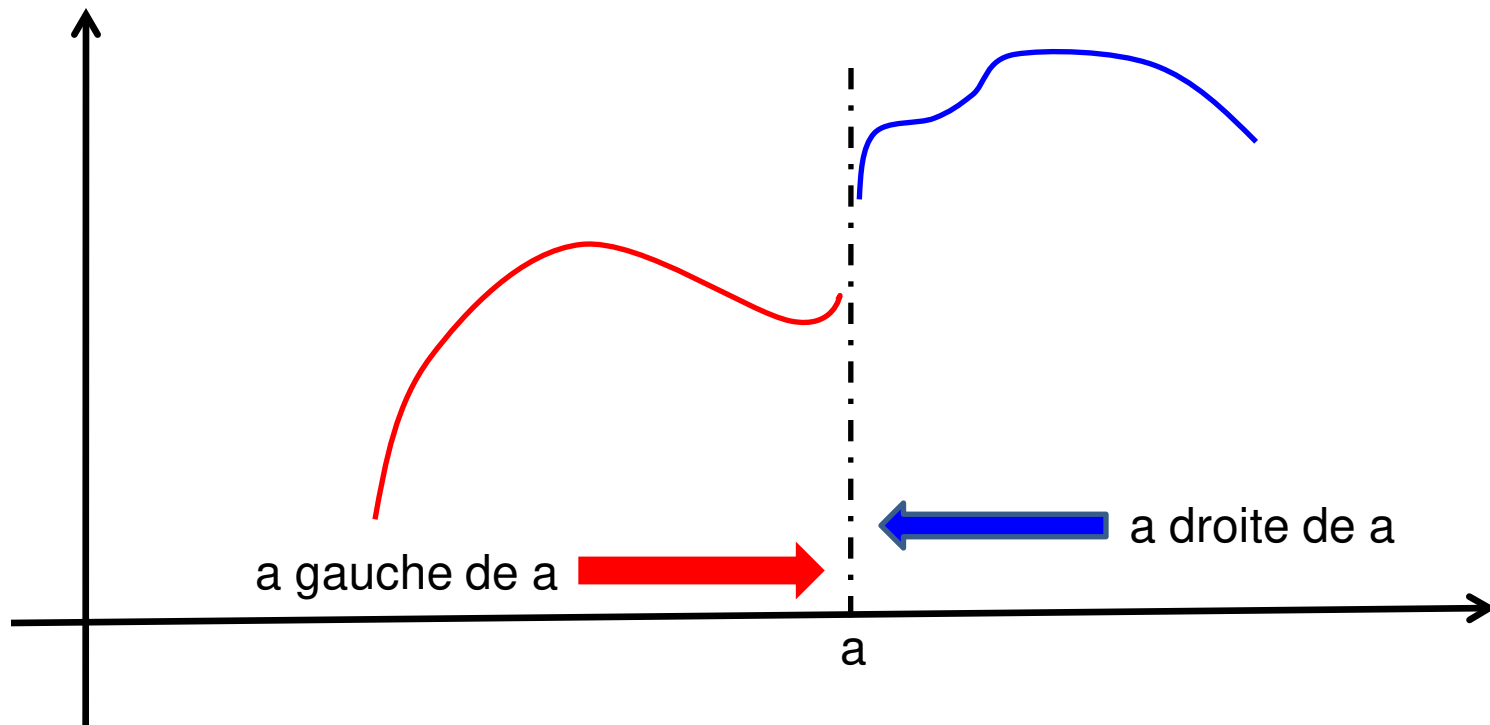
3. Continuité

$$\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

3. Continuité

a) Continuité en un point a :



3. Continuité

a) Continuité en un point **a** :

Définition : f est **continue** au point **a** lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

limite à droite = limite à gauche = image de **a**

Exemples

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}; \text{si } x \in [0;1] \\ \sqrt{2-x}; \text{si } x \in]1;2] \end{cases}$; continuité en **1**

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2-x} = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

et $f(1) = \sqrt{1} = 1$; **f** est donc continue au point **1**

2. $f(x) = \begin{cases} x+1; \text{si } x \in [0;1[\\ 2-x; \text{si } x \in]1;2] \\ f(1) = 3/2 \end{cases}$; continuité en **1**

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2-x = 2-1=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 1+1=2$$

et $f(1) = 3/2$;

f est donc **discontinue** au point **1**

3. Continuité

b) Continuité sur un **intervalle** :

Définition :

f est **continue** sur l'**intervalle** $I=[a;b]$ lorsque f est **continue** en tout point de l'intervalle **ouvert** $]a;b[$; continue **à gauche** de **b** et continue **à droite** de **a** .

- f est continue à gauche de b lorsque :

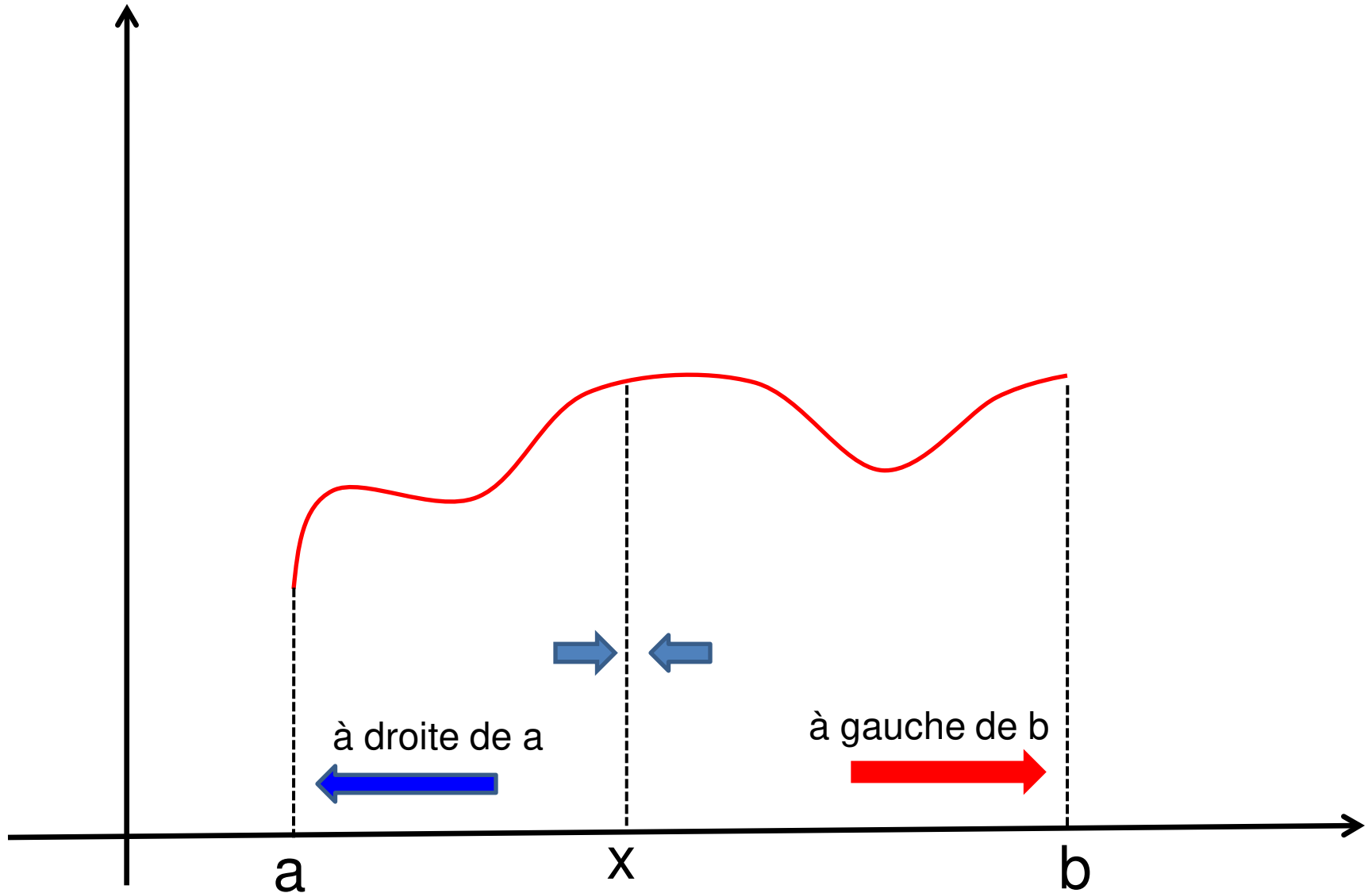
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

- f est continue à droite de a lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Continuité sur un **intervalle** $[a ; b]$

www.tifawt.com



Exemples

$$1. f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}; \text{si } x \in [0;1] \\ \sqrt{2-x}; \text{si } x \in]1;2] \end{cases} ;$$

f est continue sur l'intervalle $[0 ; 2]$ car :

- **f** est continue en tout point de l'intervalle $]0 ; 2[$ (en particulier au point **1**),
- **f** est continue à droite de **0** et à gauche de **2**.

Exemples

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x+1; \text{si } x \in [0;1[\\ 2-x; \text{si } x \in]1;2] \\ f(1) = 3/2 \end{cases};$$

f n'est pas continue sur l'intervalle $[0 ; 2]$ car elle discontinue au point **1**

Séance n° 3

Propriétés des fonctions continues

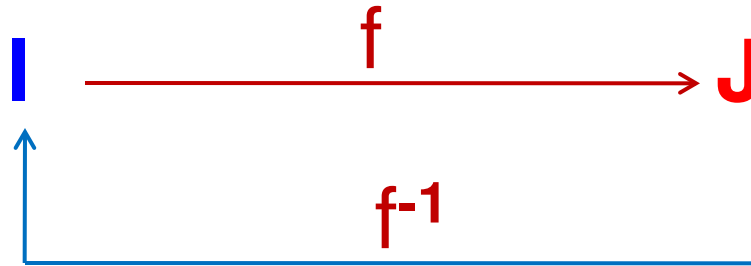
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

- $f + g$ est continue sur I
- αf est continue sur I ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- $f \times g$ est continue sur I
- f / g est continue sur I ($g \neq 0$ sur I)

Conséquences

- Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles ; racines $n^{\text{èmes}}$; puissances ; logarithmiques et exponentielles sont continues sur leurs domaines de définition

*bijection et bijection **ré**éciproque*



f est une fonction **bij**ective de I vers J . Si f est **continue** sur l'intervalle I alors sa fonction **ré**éciproque f^{-1} est **continue** sur l'intervalle J (car **les courbes** de f et f^{-1} sont **symétriques** par rapport à **la droite** d'équation $y = x$)

Remarque

f est continue sur l'intervalle I



sa courbe C_f est continue

« ne présente aucune coupure »

Voir TD (Exercice 2)

Théorème des Valeurs Intermédiaires

« T.V.I »

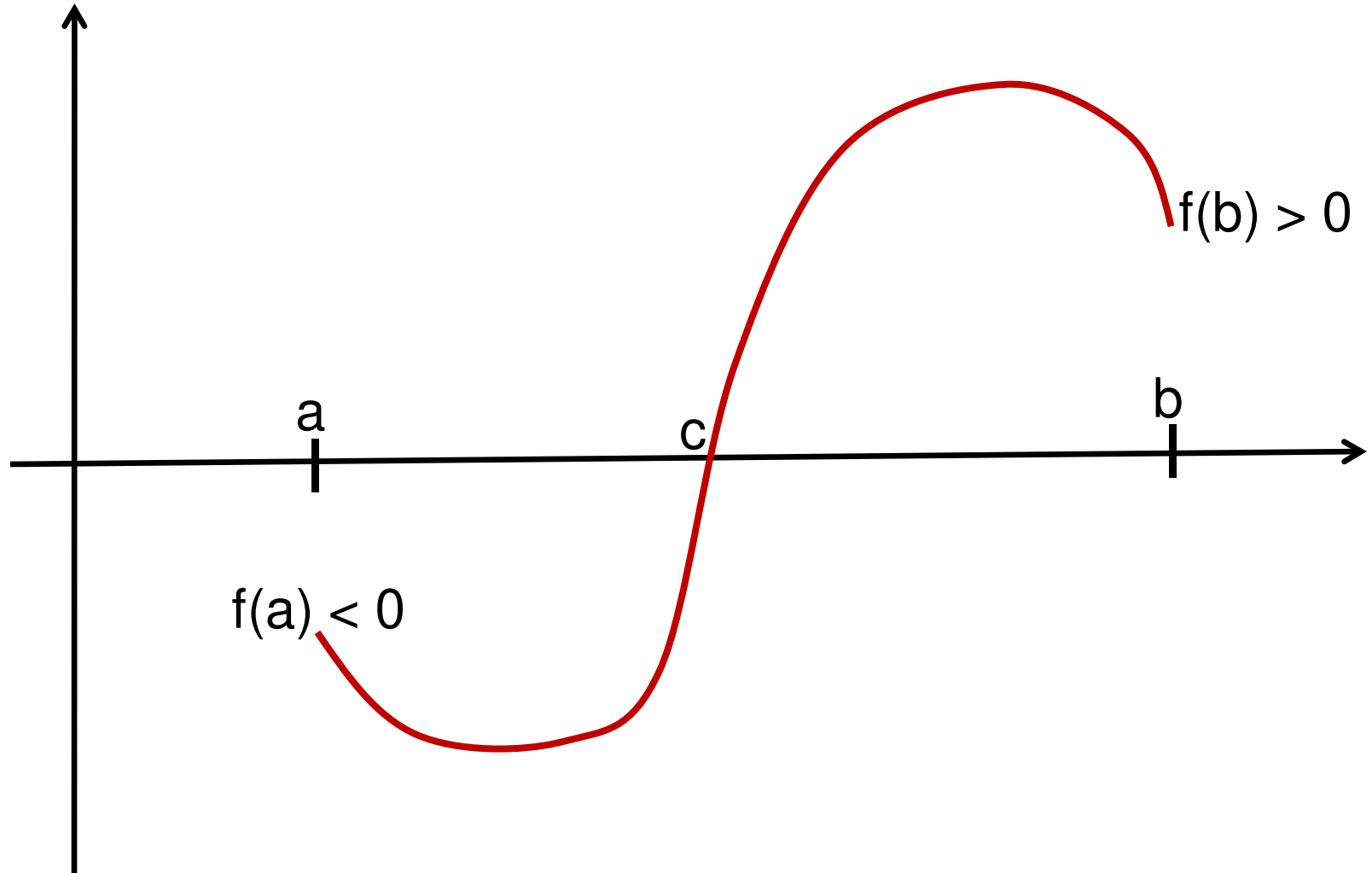
T.V.I : Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$

et $f(a) \times f(b) < 0$ alors f s'annule sur $]a; b[$;

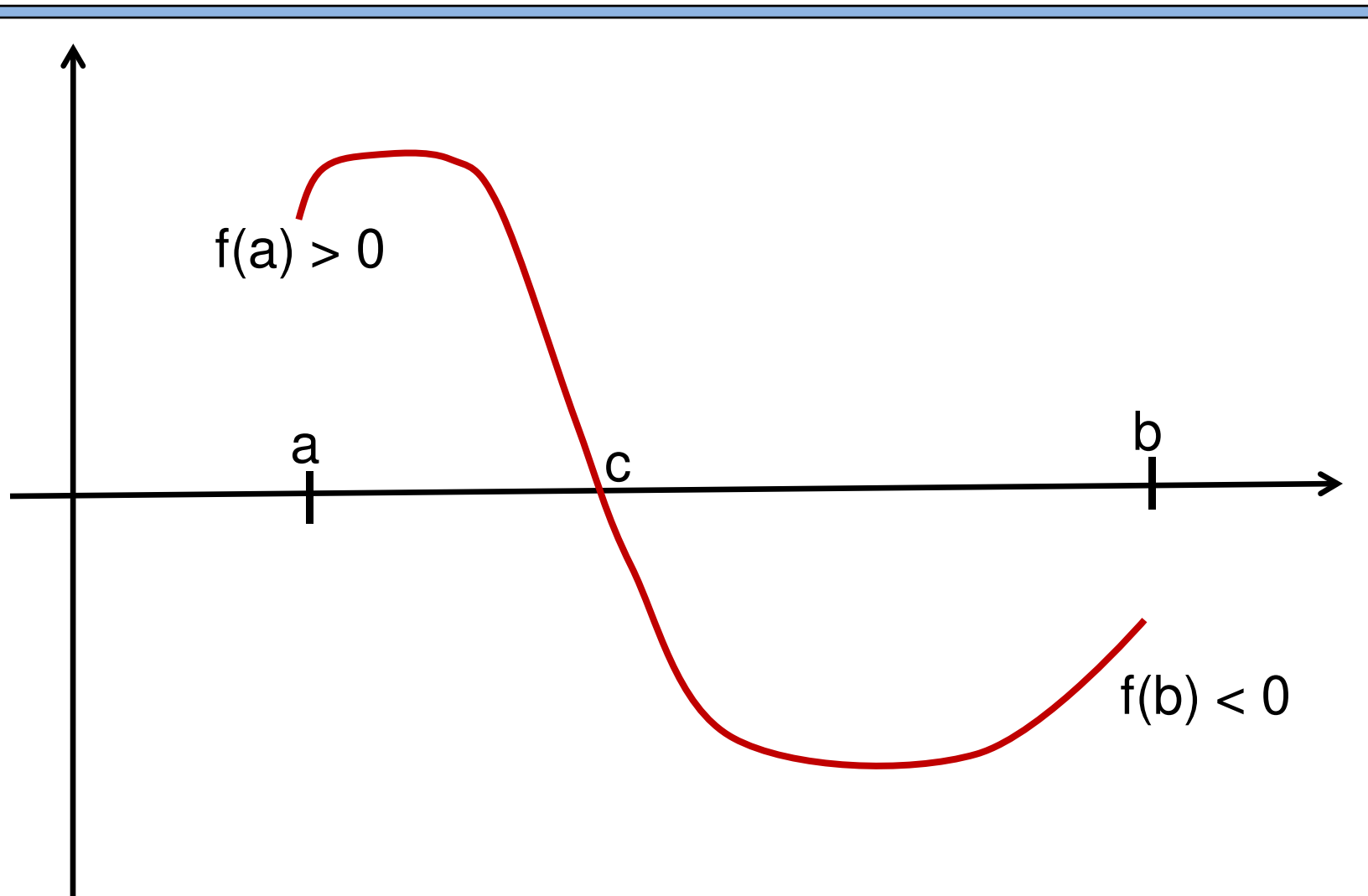
C'est-à-dire : $\exists c \in]a; b[$ tel que : $f(c) = 0$

Interprétation géométrique

www.tifawt.com



Ou



Exemple

Montrer que la fonction $f(x) = x^3 + x - 3$ s'annule (au moins une fois) sur $[0 ; 2]$

La fonction f est une fonction polynomiale donc **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$, en particulier sur l'intervalle $[0 ; 2]$. De plus :

$$f(0) = -3 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 7 > 0$$

Donc d'après le T.V.I : $\exists c \in]0;2[$
tel que $f(c) = 0$

A. Fonctions à **une** variable réel

4. Dérivabilité

$$I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

f est une fonction définie sur un intervalle I



a) Dérivabilité en un point x_0

Définition

On dit que la fonction **f** est **dérivable** en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

Cette limite « quand elle existe » est appelée :
dérivée de **f** au point x_0 et on la note **f'**(x_0)

Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

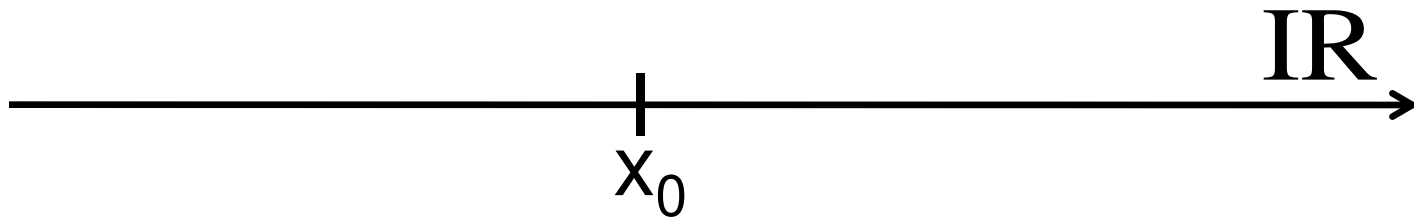
A retenir :

toutes les formules de dérivation qu'on utilise sont une conséquence directe de cette définition.

Exemples

1. Pourquoi la dérivée d'une constante est égale à 0 ?

On pose : $f(x) = C$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$



$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 0$

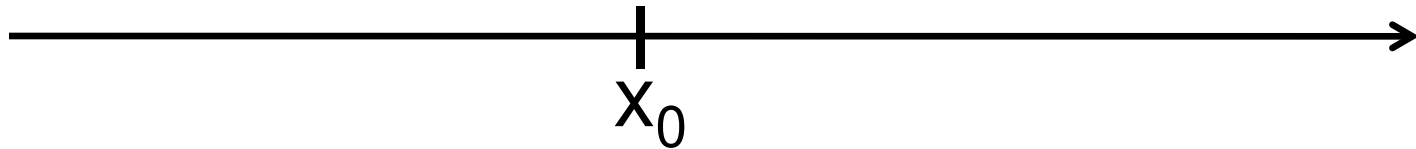
Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$$

Exemples

2. Pourquoi : $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$

On pose : $f(x) = ax^2 + bx + c$, soit $x_0 \in \mathbb{R}$



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc :

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax^2 + bx + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} a(x + x_0) + b = a(x_0 + x_0) + b$$

$$= 2ax_0 + b$$

Ainsi :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2ax + b$$

finalement :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

Exemples

3. Pourquoi : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$, soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{xx_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

*finale*ment :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ou encore (en notant x au lieu de x_0) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Les formules qui suivront sont aussi conséquence directe de la définition précédente :

b) Mémento du petit dériveur

fonction	fonction dérivée
$ax+b$	a
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}$
$\ln x$	$1/x$

fonction	fonction dérivée
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$

Plus général : (***u** désigne une fonction*)

fonction	fonction dérivée
$au+b$	au'
$u^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$	$\alpha u' \times u^{\alpha-1}$
$\sqrt{u}$	$u'/2\sqrt{u}$
$\ln u$	u'/u

fonction	fonction dérivée
e^u	$u' \times e^u$
$\sin u$	$u' \times \cos u$
$\cos u$	$-u' \times \sin u$
$\tan u$	$(1 + \tan^2 u) \times u'$

Sans oublier, lorsque la fonction se présente sous forme de « **blocs** », qu'on a :

fonction	fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
u/v	$(u'v - uv')/v^2$
$u \circ v$	$(u' \circ v) \times v'$

Exercice

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

2. $f(x) = \ln(x^2 + x - 3)$

3. $f(x) = \sqrt{x} e^{\sin x}$

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3}$

5. $f(x) = (x^2 + 1)^{2/15}$

c) Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction **f** est **dérivable** sur l'intervalle $[a ; b]$ **si** elle est **dérivable en tout point** de $[a ; b]$

Exemples

1. $f(x) = \sqrt{x}$ définie et continue sur $[0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ définie pour } x \in]0; +\infty[$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable sur $[0; +\infty[$ car f n'est pas dérivable en 0, mais dérivable seulement sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Exemples

2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ définie et continue IR

Question :

f est-elle **dérivable** sur l'intervalle **[0 ; 2]** ?

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$$

C'est-à-dire : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

donc **f** n'est pas dérivable en **x = 1**, et par conséquent **f n'est pas dérivable** sur l'intervalle [0 ; 2]

Remarques www.tifawt.com

1. f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0

2. f est dérivable sur $[a ; b] \Rightarrow f$ est continue sur $[a ; b]$

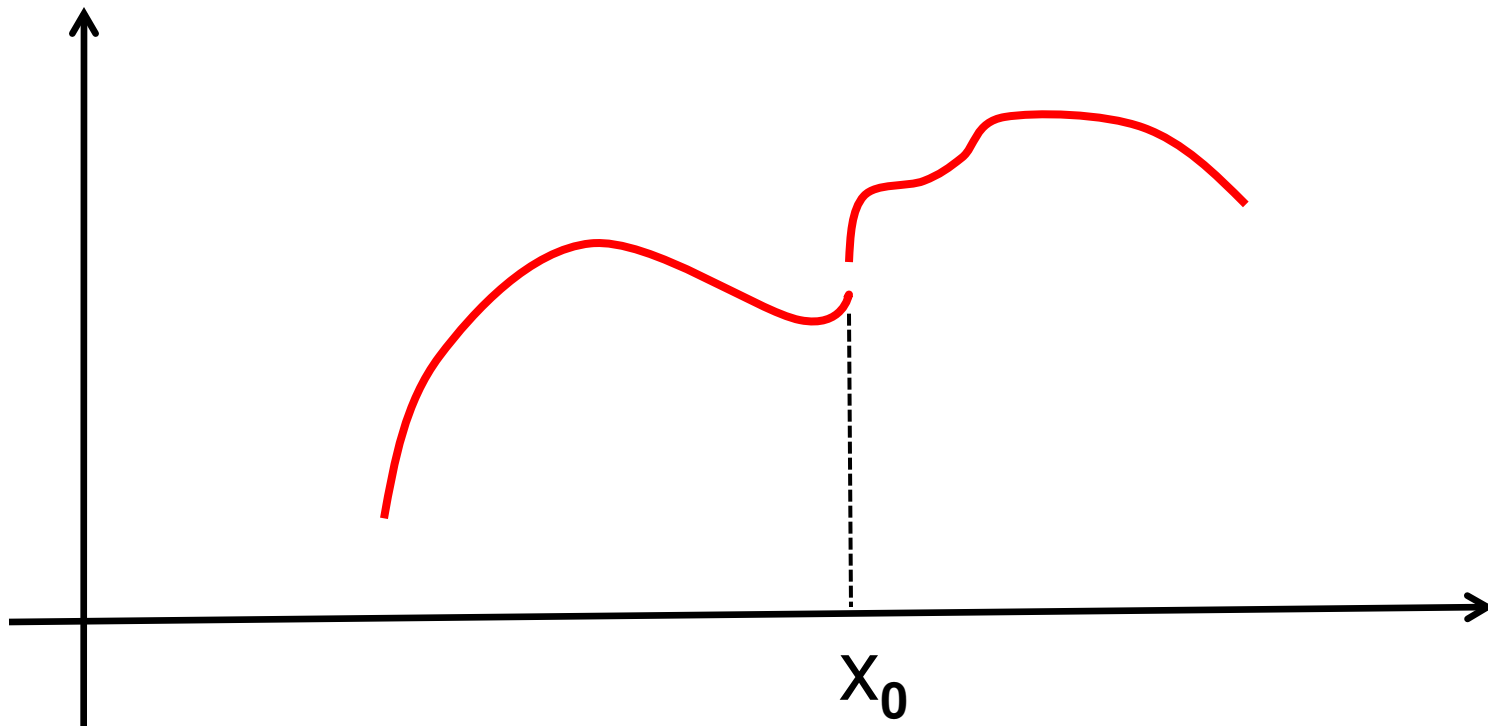
Donc « contraposée »

3. f est discontinue en $x_0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en x_0

4. f est discontinue sur $[a ; b] \Rightarrow f$ n'est pas dérivable sur $[a ; b]$

Contraposée : $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \text{non } q \Rightarrow \text{non } p$

la fonction f n'est pas dérivable en x_0
car elle est discontinue en x_0



Séance n° 4

Exercice « Corrigé »

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

2. $f(x) = \ln(x^2+x-3) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-3}$

3. $f(x) = \sqrt{x}e^{\sin x}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sin x} + \sqrt{x}\cos x e^{\sin x}$

Exercice « Corrigé »

4. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3} = (x+1)^{3/5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(x+1)^2}}$$

5. $f(x) = (x^2+1)^{2/15}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{15\sqrt[15]{(x^2+1)^{13}}}$$

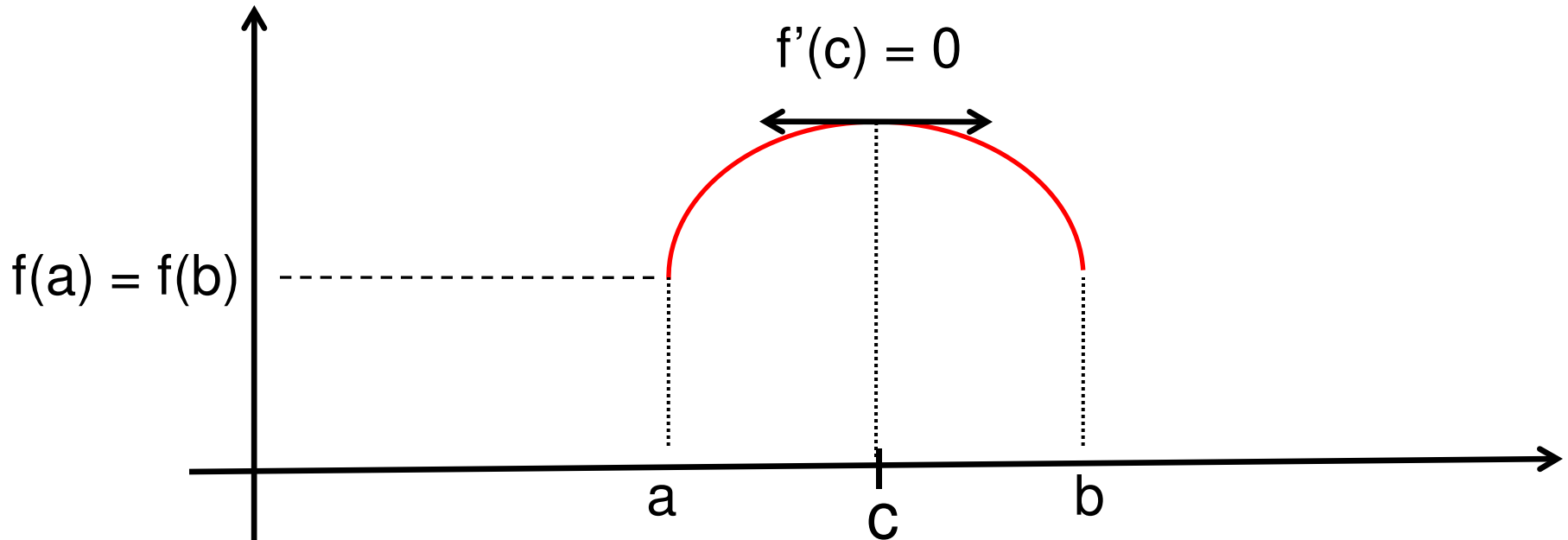
Théorème de Rolle

Théorème :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$; dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$ et : $f(a)=f(b)$ alors :

$\exists c \in]a ; b[$ tel que $f'(c)=0$

Interprétation géométrique



Il y a **au moins** un point **de la courbe**
où **la tangente** est **horizontale**

Remarque

Les hypothèses du **Théorème de Rolle** :

- a) f est continue sur $[a ; b]$
- b) f est dérivable sur $]a ; b[$
- c) $f(a) = f(b)$

sont nécessaires.

Exemple

Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction :

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

sur l'intervalle $[0 ; 2]$?

Réponse

a) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$: la racine cubique
« racine impaire » est définie sur $\mathbb{R}$, donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

- f est la somme d'une fonction constante
« 1 » et d'une fonction racine « $-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ »
donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}$,
en particulier f est continue sur l'intervalle $[0 ; 2]$

Réponse

$$\text{b)} \quad f(0) = 1 - \sqrt[3]{(0-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$$

$$f(2) = 1 - \sqrt[3]{(2-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 0$$

ainsi $f(0) = f(2)$

Réponse

c) Dérivabilité de f sur l'intervalle $]0 ; 2[$

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 1 - (x-1)^{2/3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

f n'est pas dérivable en $x = 1$ « $f'(1)$ n'est pas définie », donc f n'est pas dérivable sur l'intervalle $]0 ; 2[$

Conclusion

On ne peut pas appliquer le Théorème de

Rolle à la fonction $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

sur l'intervalle $[0 ; 2]$ car l'hypothèse de
dérivabilité n'est pas vérifiée !!!

Voir Exercice 5, Série de TD

Théorème des accroissements finis

« T.A.F »

Théorème : Si f est une fonction :

- a) continue sur $[a ; b]$
- b) dérivable sur $]a ; b[$

alors : $\exists c \in]a ; b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

2^{ème} version « T.A.F »

Théorème : Si **f** est une fonction :

- a) continue sur $[a ; b]$
- b) dérivable sur $]a ; b[$

alors : $\exists c \in]a ; b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

...premier développement limité

Théorème : Si f est une fonction :

- a) continue sur $[a ; b]$
- b) dérivable sur $]a ; b[$

alors : $\exists c \in]a ; b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

Remarque : Pourquoi on dit :

www.tifawt.com

accroissements finis ?

Comme $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$
« 1^{ère} version »

Si la dérivée première « f' » est une fonction

bornée : $|f'(x)| \leq M$ sur l'intervalle considéré,

alors on a : $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

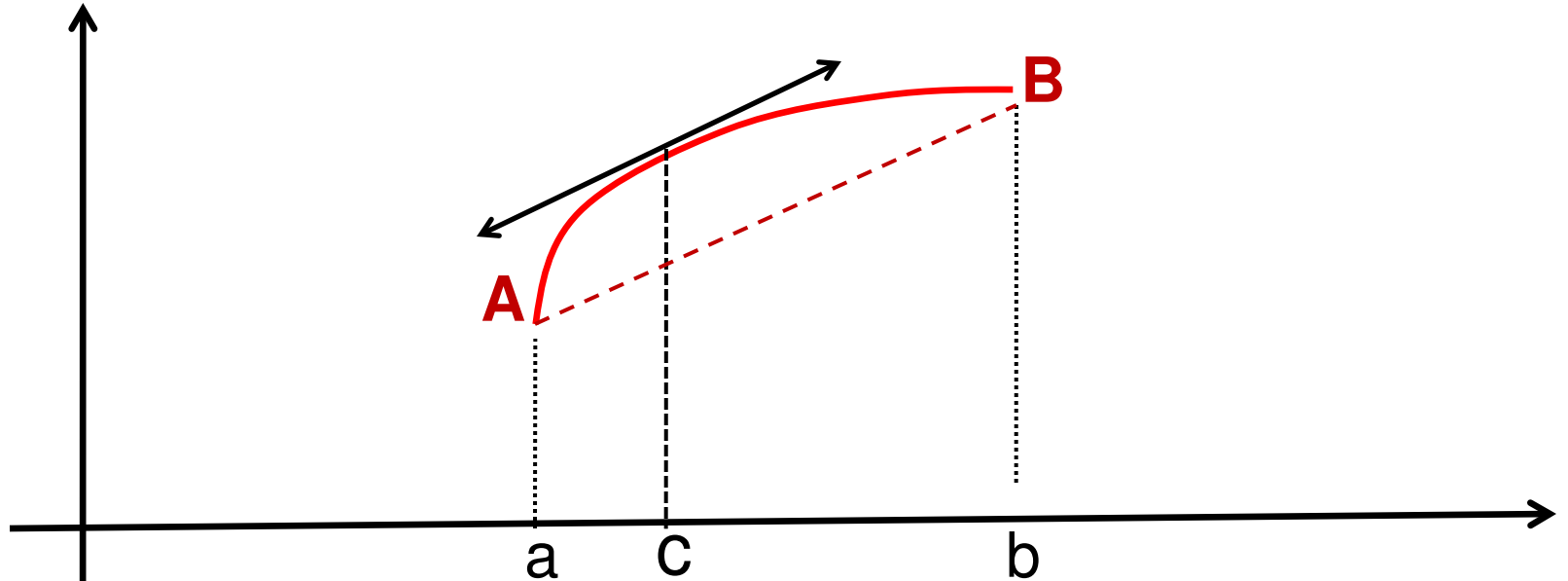
Ainsi, si l'ordre de grandeur de f' est fixé, les accroissements de la fonction $f \ll f(b) - f(a) \gg$ sont bornés « finis »

Interprétation géométrique

$$\exists c \in]a; b[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Veut dire : Il y a **au moins** un point **de la courbe** où **la tangente** est parallèle au segment AB

Interprétation géométrique



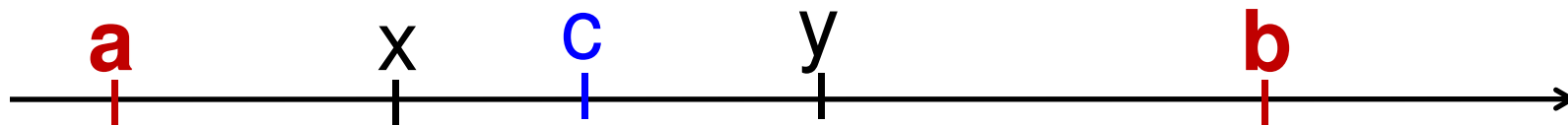
Il y a **au moins** un point **de la courbe**
où **la tangente** est parallèle au segment
AB

Conséquences

f est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a ; b]$:

- Si $f'(x)=0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est constante
 - Si $f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est croissante
 - Si $f'(x) \leq 0$ ($\forall x \in [a;b]$) alors f est décroissante
- ... sur l'intervalle $[a ; b]$

Preuve



Soient x et y deux nombres quelconques de l'intervalle $[a ; b]$ tels que : $x \leq y$

- Si $f'(x)=0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(c)=(y-x)\times 0=0$$

$\Rightarrow f(y)=f(x)$: f est donc constante sur l'intervalle $[a ; b]$

- Si $f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in [a;b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$$

$$y - x \geq 0$$

$$f'(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

f est donc **croissante** sur l'intervalle $[a ; b]$

- Si $f'(x) \leq 0$ ($\forall x \in [a; b]$), dans ce cas ; T.A.F :

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \leq 0$$

$$y - x \geq 0 \quad f'(c) \leq 0 \quad \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

f est donc **décroissante** sur l'intervalle $[a ; b]$

A. Fonctions à **une** variable réel

5. Calcul de limites

« Règle de l'HOSPITAL »

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Problème : lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad x \rightarrow 0$$

La forme indéterminée

$$\frac{0}{0}=?$$

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0;$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty;$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5 .$

La forme indéterminée

Nous avons une forme indéterminée lorsqu'on ne peut pas prévoir le résultat d'avance.

Les formes indéterminées :

$$\frac{0}{0}=? ; \frac{\infty}{\infty}=? ; \infty-\infty=? ; 0\times\infty=?$$

La forme indéterminée $\frac{0}{0}=?$

Pour la forme indéterminée $\frac{0}{0}=?$, on peut utiliser la Règle de l'Hospital :

R-H : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemples

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Exemples

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1/1 = 1$$

Exemples

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = ?$

Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Remarque

La règle de l'Hospital est un **outil puissant** pour le calcul des limites. Elle peut être utilisée **plusieurs fois** de suite.

Exemples

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

Règle de l'Hospital « 1^{ère} fois »:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Règle de l'Hospital « 2^{ème} fois »:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemples

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x - x^3}{x^4} = ?$

Règle de l'Hospital « 1^{ère} fois »:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1 - 3x^2}{4x^3}$$

Règle de l'Hospital « 2^{ème} fois »:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - 6x}{12x^2}$$

Exemples

Règle de l'Hospital « 3^{ème} fois »:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cos x - 6}{24x} = \frac{-7}{0^+} = -\infty$$

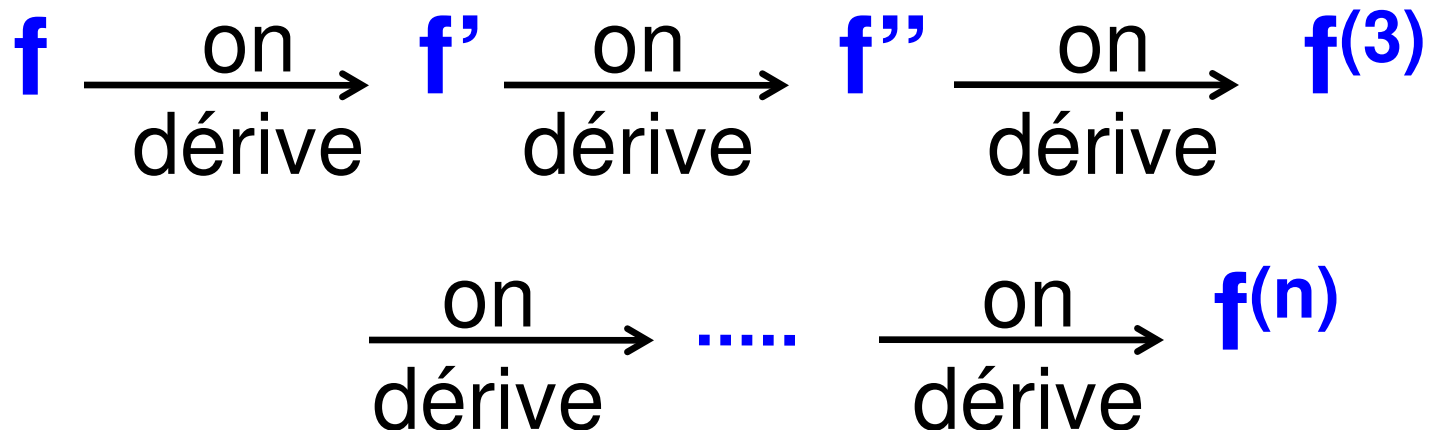
Séance n° 5

A. Fonctions à **une variable réel**

6. Dérivées d'ordre supérieur; Formule de Taylor Développements limités

Dérivées d'ordre supérieur

La dérivée d'ordre **n** (on dit aussi : la dérivée **n^{ème}**) s'obtient en dérivant **f** **n** fois :



Examples

1. $f(x) = \ln x$

• $f'(x) = 1/x$;

• $f''(x) = -1/x^2$;

• $f^{(3)}(x) = 2/x^3$; ... ;

• $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$

Examples

2. $f(x) = e^x$

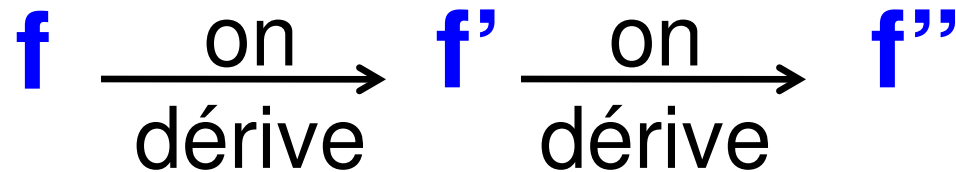
- $f'(x) = e^x$;

- $f''(x) = e^x$; ... ;

- $f^{(n)}(x) = e^x$

Utilisation de la dérivée seconde « f'' »

Convexité & Concavité

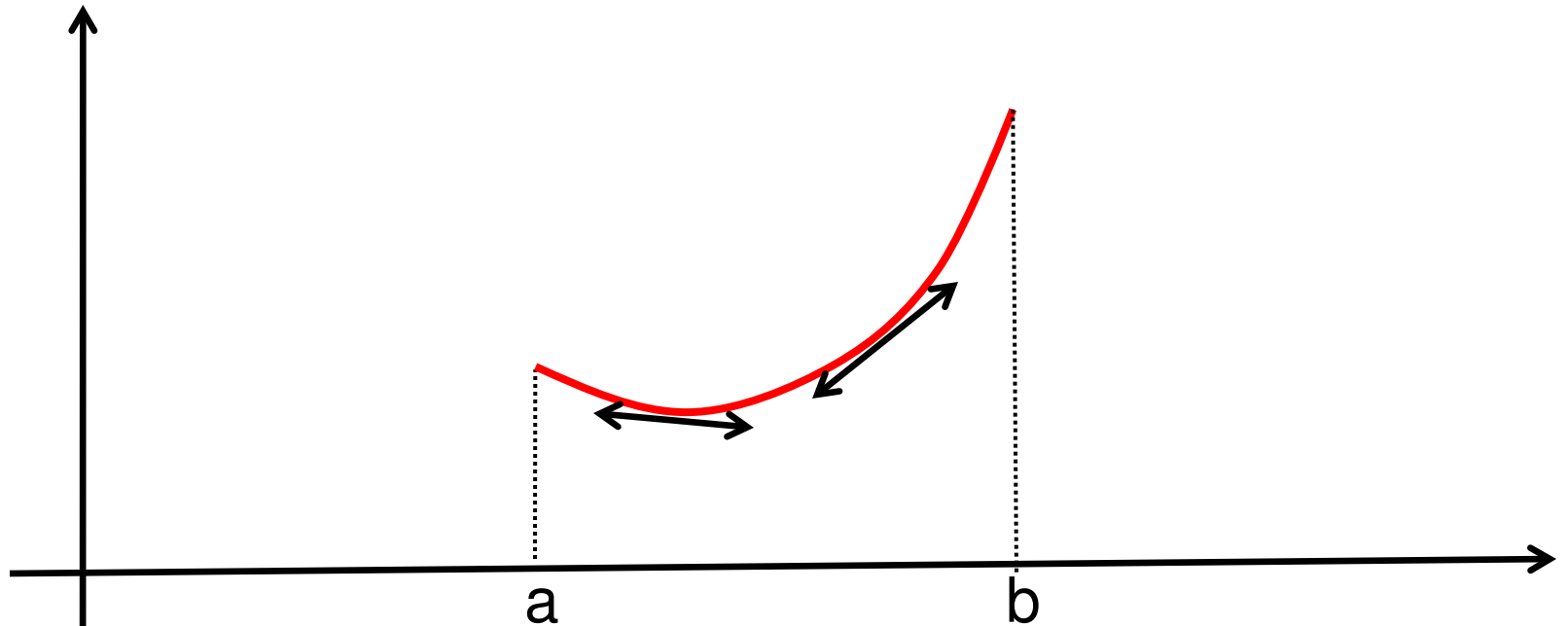


Convexité

Définition

Une fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle $[a ; b]$ lorsque sa courbe C_f sur l'intervalle $[a ; b]$ est **au dessus** de **toutes** ses **tangentes**

Interprétation géométrique



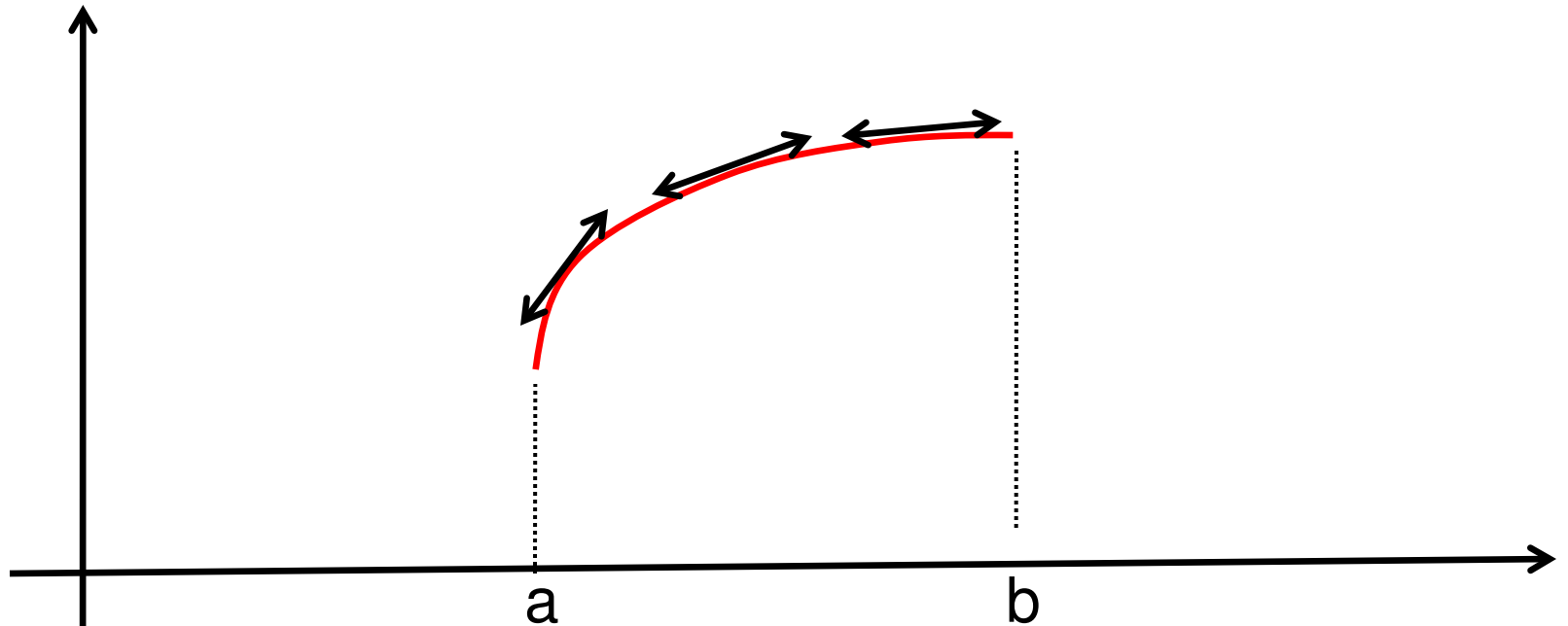
fonction convexe :
la courbe est au dessus de ses tangentes

Concavité

Définition

Une fonction f est dite **concave** sur l'intervalle $[a ; b]$ lorsque sa courbe C_f sur l'intervalle $[a ; b]$ est **au dessous** de **toutes** ses **tangentes**

Interprétation géométrique



fonction concave :
la courbe est au dessous de ses tangentes

Convexité

Théorème

Si $f''(x) \geq 0$ ceci $\forall x \in [a; b]$, alors
la fonction **f** est **convexe** sur l'intervalle $[a ; b]$

Concavité

Théorème

Si $f''(x) \leq 0$ ceci $\forall x \in [a; b]$, alors
la fonction **f** est **concave** sur l'intervalle $[a ; b]$

Exemples

Étudier la convexité des fonction suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $f(x) = \ln x$;

2. $f(x) = e^x$

1. $f(x) = \ln x$;

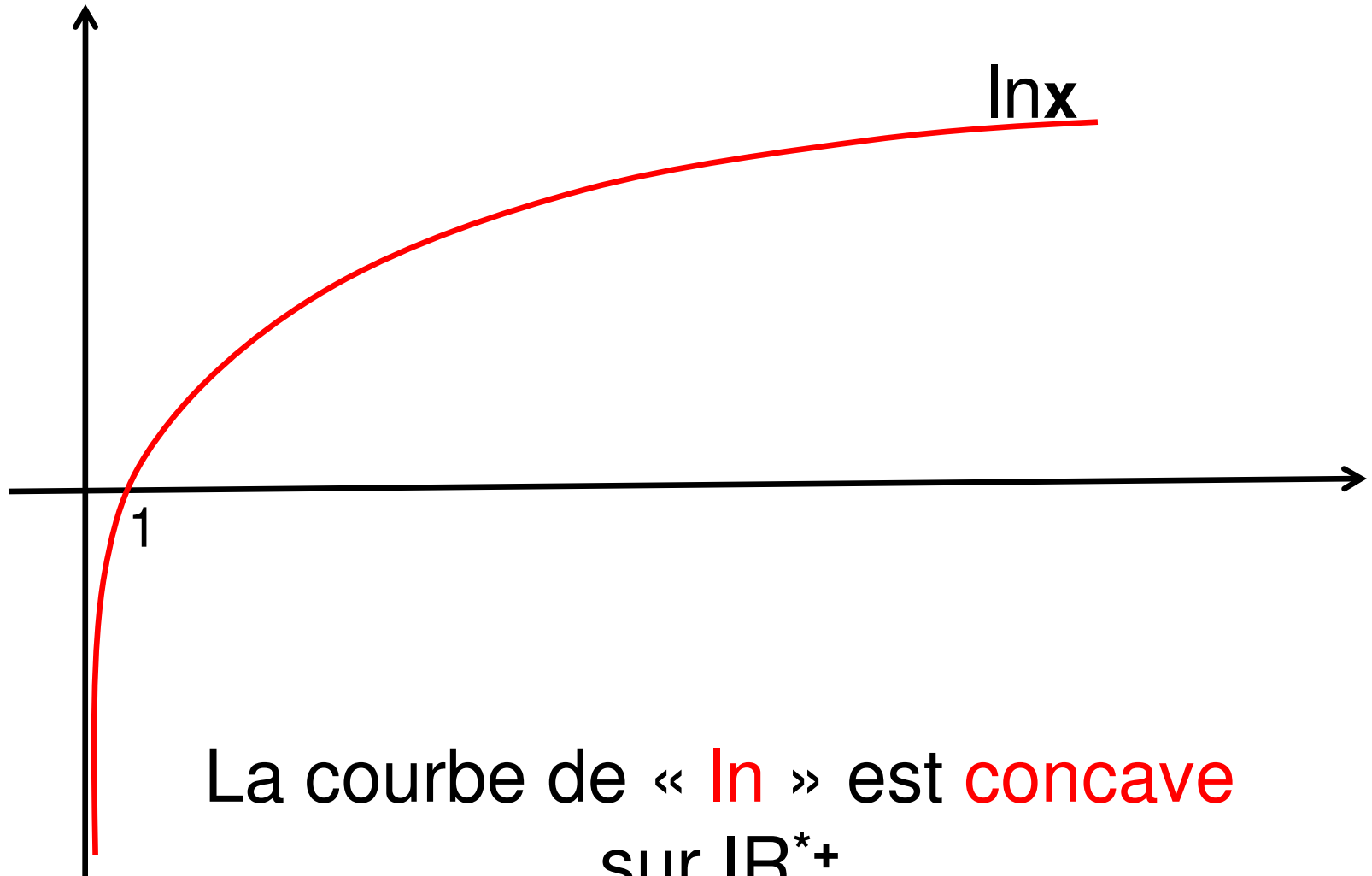
$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -1/x^2 \quad \text{avec} \quad x \in D_f = \mathbb{R}^{*+}$$

ainsi $\forall x \in D_f$ on a $f''(x) < 0$

La fonction « *ln* » est *concave* sur $\mathbb{R}^{*+}$

Interprétation géométrique

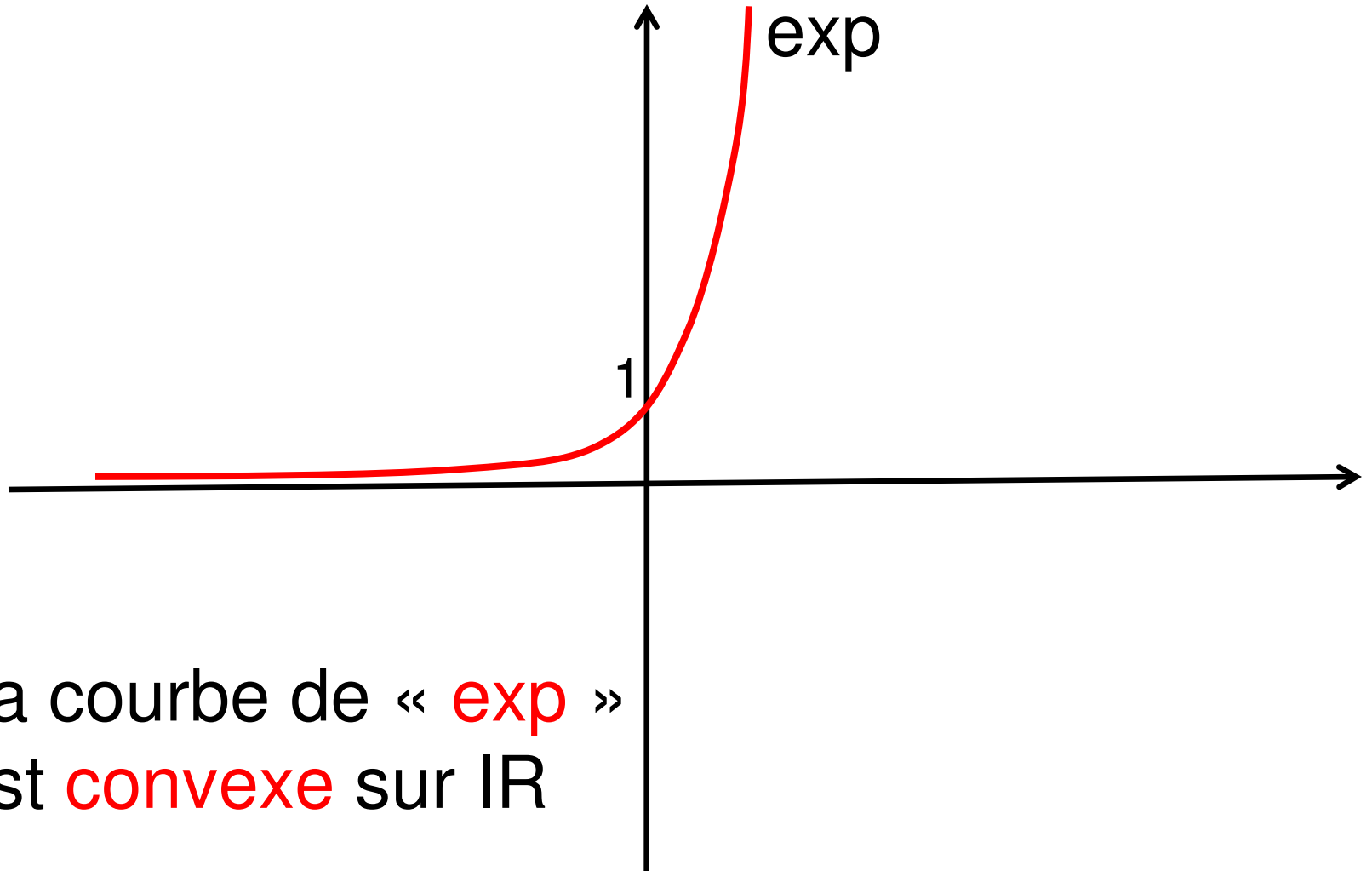


2. $f(x) = e^x$;

$f''(x) = e^x > 0$ ceci $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$

*La fonction « **exp** » est **convexe** sur $\mathbb{R}$*

Interprétation géométrique



La courbe de « **exp** »
est **convexe** sur $\mathbb{R}$

Exercice

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

1. $f(x) = \sqrt{x}$;

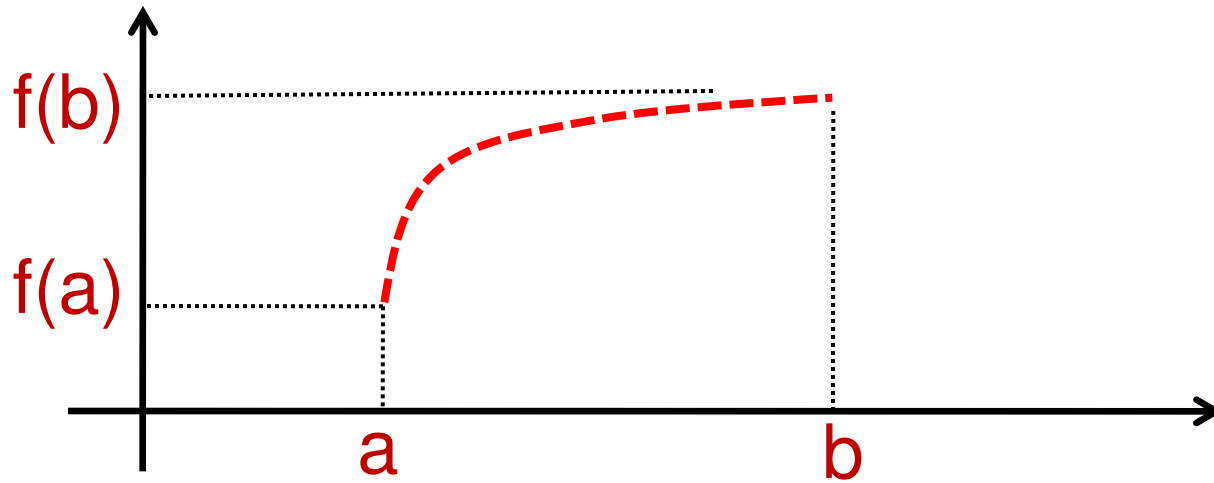
2. $f(x) = 1/\sqrt{x}$;

3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 5$

Dérivées d'ordre supérieur

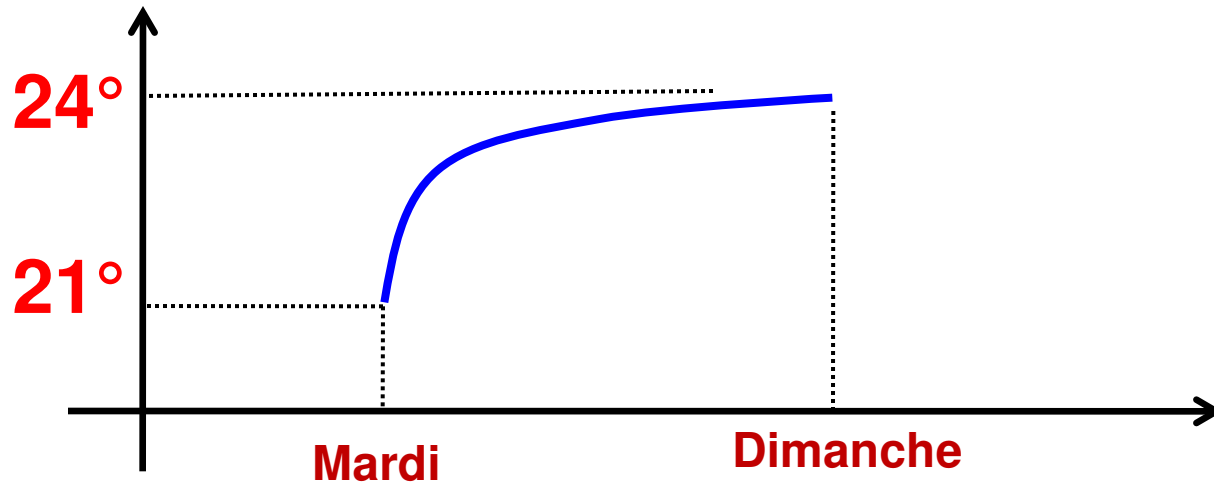
Formule de Taylor



Question fondamentale en Analyse :

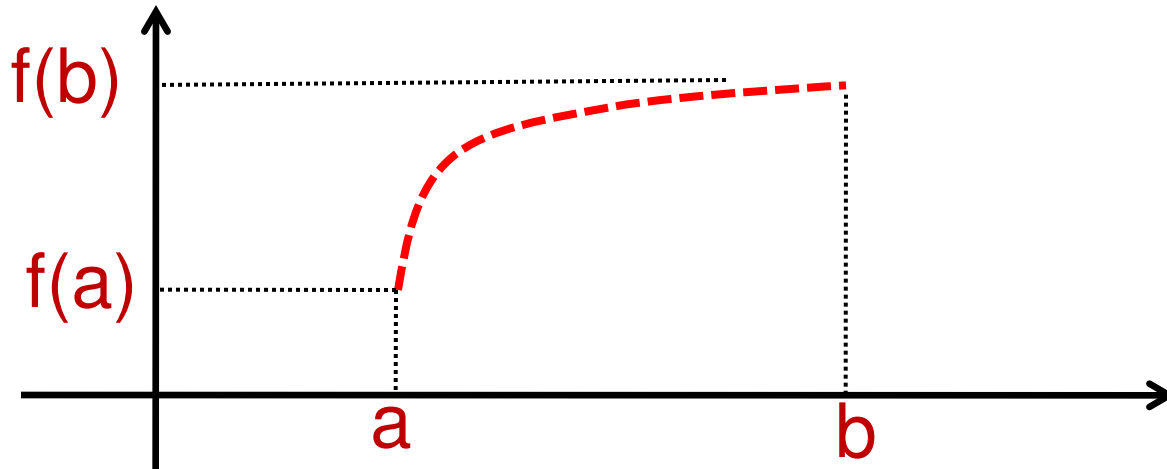
Connaissant la valeur de f au point a , peut-on donner une estimation de $f(b)$???

Exemple « Météo »



Connaissant la température enregistrée Mardi, peut-on prévoir la température de Dimanche prochain ???

Réponse « Taylor »



On peut donner une **valeur approchée** de $f(b)$,
à condition de **connaître** $f(a)$...mais aussi :

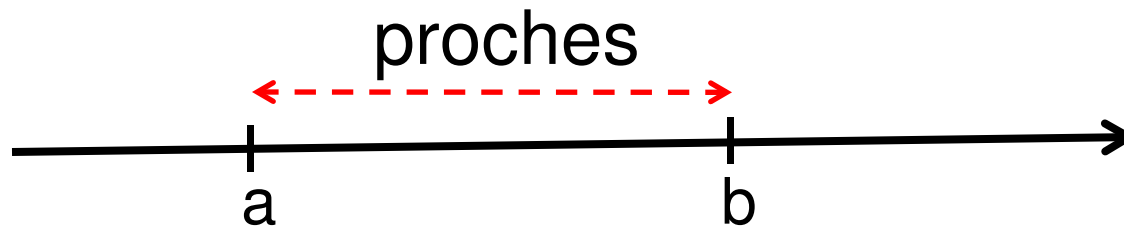
$$f'(a) ; f''(a) ; f^{(3)}(a) ; f^{(4)}(a) ; \dots ; f^{(n)}(a) ; \dots$$

A savoir :

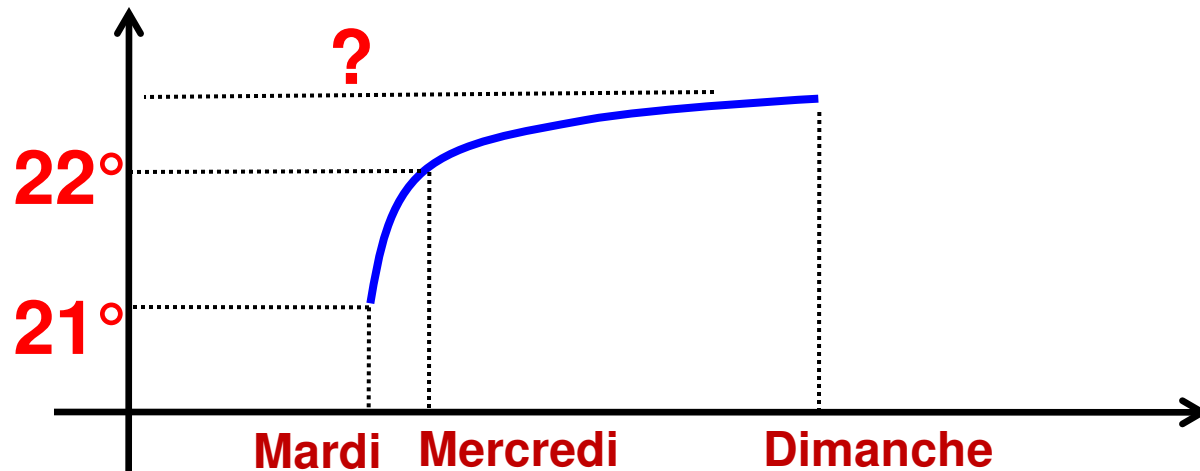
Notre estimation de $f(b)$ est meilleure lorsque :

n est grand

b est proche de a



Exemple « Météo »



Connaissant la température de **Mardi**, il est plus simple de prévoir la température de **Mercredi** « **proche** de **Mardi** » que celle de **Dimanche** « **loin** de **Mardi** »

La « fameuse » Formule de Taylor

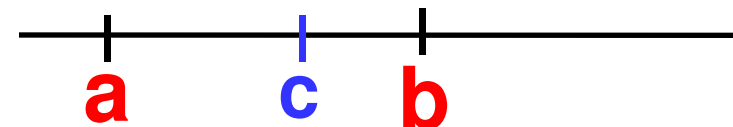
Théorème : Si **f** est une fonction dérivable à l'ordre **n+1** alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) +$$

$$\frac{(b-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) +$$

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

avec $c \in]a; b[$



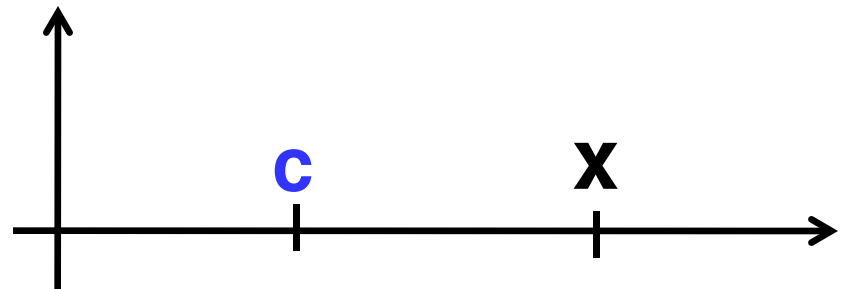
Développements limités : $a=0$ et $b=x$

Théorème : Si f est une fonction dérivable à l'ordre $n+1$ alors :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) +$$

$$\dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

avec $c \in]0; x[$



Notation de Young

Formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) +$$

$$\dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\mathfrak{E}(x)$$

avec $\mathfrak{E}(x) = \frac{x}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Remarque

1. $\mathcal{E}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$
2. $\mathcal{E}(x)$ n'est pas une fonction, c'est une manière symbolique d'écrire : quantité qui tend vers 0 avec x . Donc :

La différence de deux $\mathcal{E}(x)$ n'est pas 0 mais un $\mathcal{E}(x)$, prendre par exemple x^2 et x^3

Le produit de deux $\mathcal{E}(x)$ est un $\mathcal{E}(x)$

Développements limités importants

1. $f(x)=e^x$; La formule de Taylor-Young donne :

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \dots + \frac{x^n}{n!}e^0 + x^n\mathcal{E}(x)$$

Ainsi :

$$(D1) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\mathcal{E}(x)$$

c'est-à-dire : pour x proche de 0

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Exemple :

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \dots$$

$$e^{-0,1} \approx 1 - 0,1 + \frac{0,01}{2} - \dots$$

2.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

www.tifawt.com

:

La formule de Taylor-Young donne :

- $f(0)=1$;
- $f'(x) = -1 \times (1-x)^{-2} \times (-1) \Rightarrow f'(0)=1$;
- $f''(x) = -2 \times (1-x)^{-3} \times (-1) \Rightarrow f''(0)=2!$;
- $f^{(3)}(x) = -6 \times (1-x)^{-4} \times (-1) \Rightarrow f^{(3)}(0)=3!$
- $\dots f^{(n)}(0)=n!$ on obtient ainsi :

$$(D2) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

En remplaçant x par $-x$ on obtient : (D3)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

En **intégrant** D3 on obtient : (D4)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$$

Application : calcul de limites

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x} (x + x\varepsilon(x))}$$

Développement limité (D4) à l'ordre 1

Calcul de limites

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1+\varepsilon(x))} = e^1 = e$$

car $\varepsilon(x) \rightarrow 0$

Séance n° 6

Calcul de limites

« Exercice »

Calculer :

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) ;$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^x ;$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

corrigé

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e - (1 + \frac{1}{x})^x) = ?$

On a : $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$

Or lorsque $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

Or $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$

Développement limité (D4) à l'ordre 2 !!

Remarque :

C'est $\frac{1}{x}$ qui joue le rôle de x ici, car
 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{x}$ est proche de 0

Ainsi :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^1 \times e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Or pour t proche de 0 ($t \rightarrow 0$) on a :

$$e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$$

Développement limité (D1) à l'ordre 1 !!

Donc : ($t = -1/2x$)

$$e^{-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

Par conséquent :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 \times \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= e - \frac{e}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

finalement :

$$x\left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = x\left(\frac{e}{2x} - \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

C'est-à-dire :

$$x(e - (1 + \frac{1}{x})^x) = \frac{e}{2} + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e - (1 + \frac{1}{x})^x) = \frac{e}{2}$$

Car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$2. \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{X}\right)^X :$$

On a :

$$\left(1 + \frac{5}{X}\right)^X = e^{X \ln\left(1 + \frac{5}{X}\right)}$$

Or :

$$\ln\left(1 + \frac{5}{X}\right) = \frac{5}{X} + \frac{1}{X} \varepsilon\left(\frac{1}{X}\right)$$

Développement limité (D4) à l'ordre 1

Car $\frac{5}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Donc :

$$\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^{x\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

C'est-à-dire :

$$\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^{5 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$$

Car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} :$$

On a :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{3x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Or :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

Développement limité (D4) à l'ordre 1

Car $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Donc :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e$$

C'est-à-dire :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{3 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = e^3$$

Car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

Remarque

Refaire le calcul des 3 limites précédente en posant « au début » :

$$t = \frac{1}{x}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$:

Nous avons besoin des développements limités de **Cos x** et **Sin x** à l'ordre 3, car le dénominateur montre qu'il faut développer la fonction e^x à l'ordre 3

Développements limités à l'ordre 3 de $\cos x$ et $\sin x$

1. $f(x) = \cos x$ La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donne :

$$\cos x = \cos 0 + x \cos' 0 + \frac{x^2}{2!} \cos'' 0$$

$$+ \frac{x^3}{3!} \cos^{(3)} 0 + x^3 \varepsilon(x)$$

Or : $\cos 0 = 1$;

$$\cos' 0 = -\sin 0 = 0$$

$$\cos'' 0 = -\cos 0 = -1$$

$$\cos^{(3)} 0 = \sin 0 = 0$$

Donc : $\cos x = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + 0x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

C'est-à-dire : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$

De même pour la fonction Sinus

1. $f(x) = \sin x$ La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donne :

$$\sin x = \sin 0 + x \sin' 0 + \frac{x^2}{2!} \sin'' 0$$

$$+ \frac{x^3}{3!} \sin^{(3)} 0 + x^3 \mathcal{E}(x)$$

Or : $\sin 0 = 0$;

$$\sin' 0 = \cos 0 = 1$$

$$\sin'' 0 = -\sin 0 = 0$$

$$\sin^{(3)} 0 = -\cos 0 = -1$$

Donc :

$$\sin x = 0 + x \times 1 + \frac{x^2}{2} \times 0 + \frac{x^3}{6} \times (-1) + x^3 \varepsilon(x)$$

C'est-à-dire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

Par conséquent :

$$\frac{x \cos x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} =$$

$$\frac{x(1 - x^2/2) - (x - x^3/6) + x^3 \varepsilon(x)}{x^3/6 + x^3 \varepsilon(x)}$$

Nous avons utiliser le D. L. de e^x à l'ordre 3

$$= \frac{-x^3/3 + x^3 \varepsilon(x)}{x^3/6 + x^3 \varepsilon(x)} = \frac{-1/3 + \varepsilon(x)}{1/6 + \varepsilon(x)}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = -2$$

2^{ème} Partie du Cours

B. Fonctions à deux variables réelles

Exemples introductifs

www.tifawt.com

- I. Une entreprise commercialise 3 produits : A, B et C. Le prix de vente unitaire du produit A est 12 DH, celui du produit B est 15 DH et celui du produit C est 22 DH.

On vend une quantité x du produit A, une quantité y du produit B et une quantité z du produit C. La recette $R(x ; y ; z)$ est donnée par :

$$R(x ; y ; z) = 12x + 15y + 22z$$

La recette de cet exemple est une fonction de 3 variables x , y et z

Exemples introductifs

- II. Une entreprise fabrique 2 produits A et B. Si x désigne la quantité fabriquée de A et y celle de B, la recette escomptée lors de la vente de x articles de A et de y articles de B est donnée par :

$$R(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 220x + 140y$$

Le coût d'une unité de A (respectivement de B) qu'on note C_A (respectivement C_B) dépend des quantités x et y comme suit :

$$C_A = 2x + y \quad \text{et} \quad C_B = x + 3y$$

Exemples introductifs

- a. Exprimer en fonction de x et de y le coût $c(x, y)$ de fabrication de x unités de A et de y unités de B.

$$\begin{aligned} C(x, y) &= x C_A + y C_B \\ &= x (2x + y) + y (x + 3y) \\ &= 2x^2 + 3y^2 + 2xy \end{aligned}$$

On obtient une *fonction de 2 variables* x et y

Exemples introductifs

- b. Exprimer le bénéfice $B(x, y)$ réalisé lors de la vente de x articles de A et de y articles de B.

$$\begin{aligned} B(x, y) &= R(x, y) - c(x, y) \\ &= (-3x^2 - 2y^2 + 220x + 140y) - (2x^2 + 3y^2 + 2xy) \\ &= -5x^2 - 5y^2 - 2xy + 220x + 140y \end{aligned}$$

le bénéfice est une fonction de 2 variables x et y

Séance n° 7

Exemples de fonctions à www.tifawt.com plusieurs variables

a. $f(x, y) = xe^y + ye^x$: 2 variables

b. $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 100$: 2 variables

c. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$: 2 variables

Exemples de fonctions à www.tifawt.com plusieurs variables

d. $f(x, y, z) = xyz - x + 5y + 3z$: 3 var

e. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 4z)$: 3 var

f. $f(x, y, z, t) = x^3 + y^2 - z + \sqrt{t}$: 4 var

Remarque

1. Dans le cas de **n variables** ($n \geq 5$), on peut noter les variables :

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

la fonction **f** est notée dans ce cas :

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Remarque

2. On s'intéresse dans le cadre de ce cours aux fonctions de **deux** variables **x** et **y**

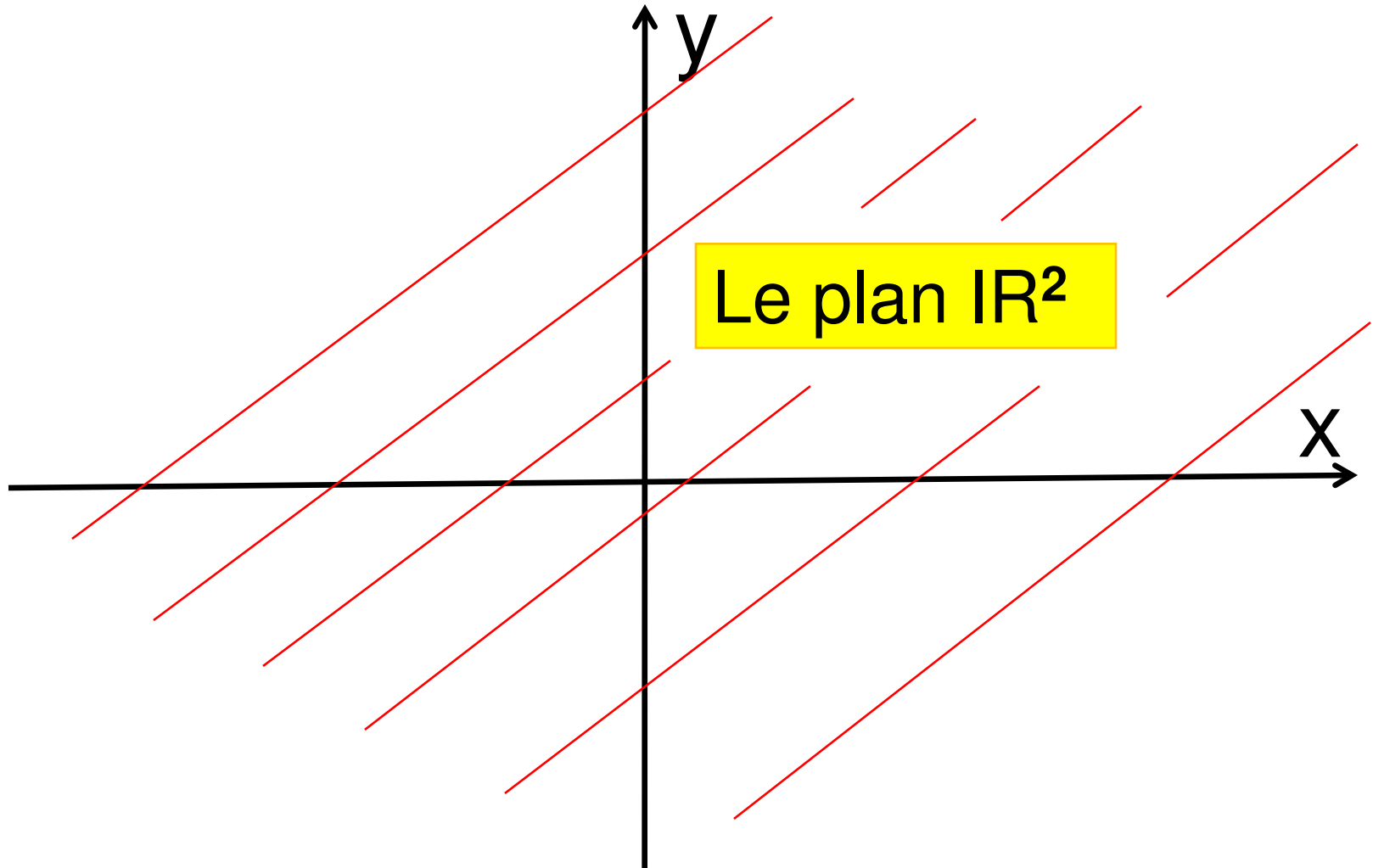
$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow f(x, y)$$

1. Domaine de définition

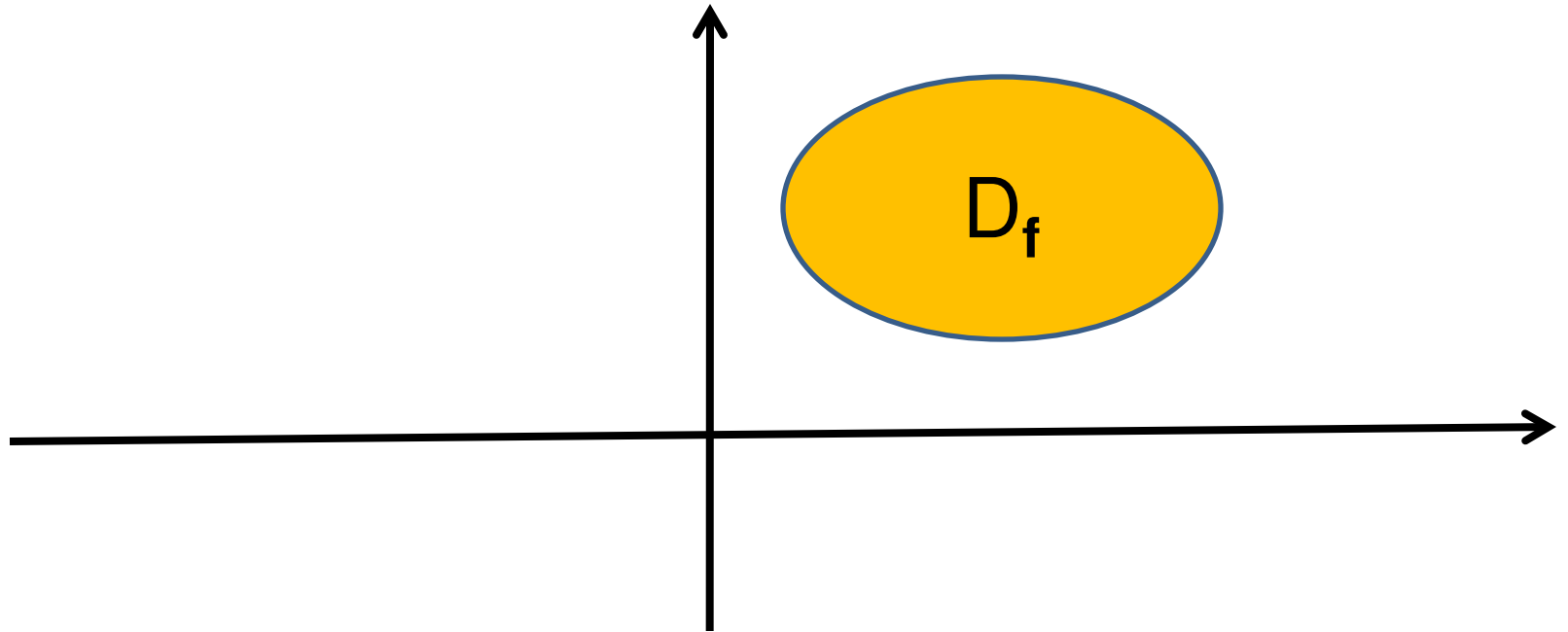
$$\begin{array}{ccc} D_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

Le domaine de définition est
un domaine du plan $\mathbb{R}^2$
($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Interprétation géométrique



Interprétation géométrique



$$D_f \subset \mathbb{R}^2$$

Exemples

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$:

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ on a :

$f(x, y)$ est définie (on peut la calculer)

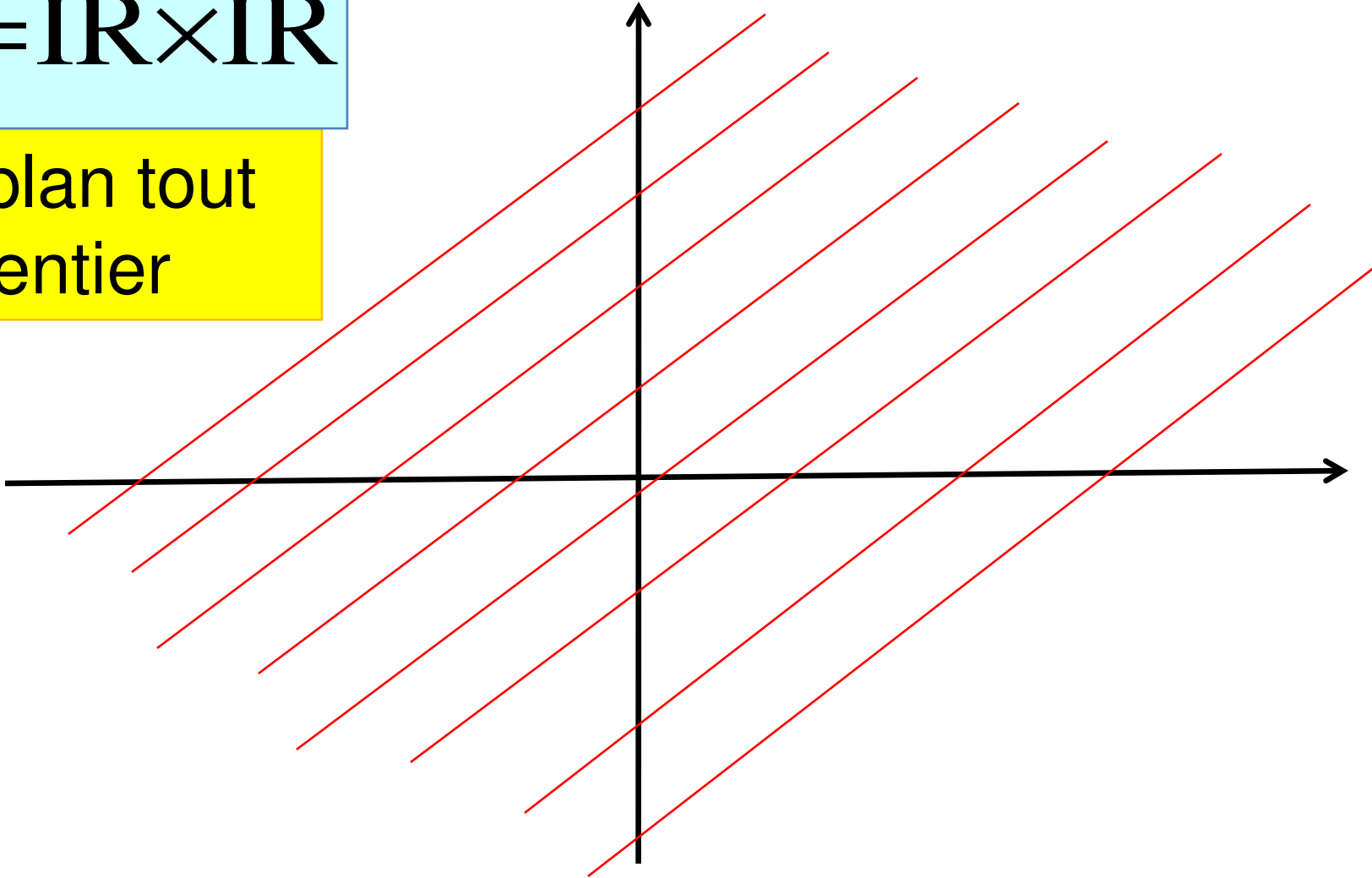
Donc $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y$

Interprétation géométrique

$$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

le plan tout
entier



Exemples

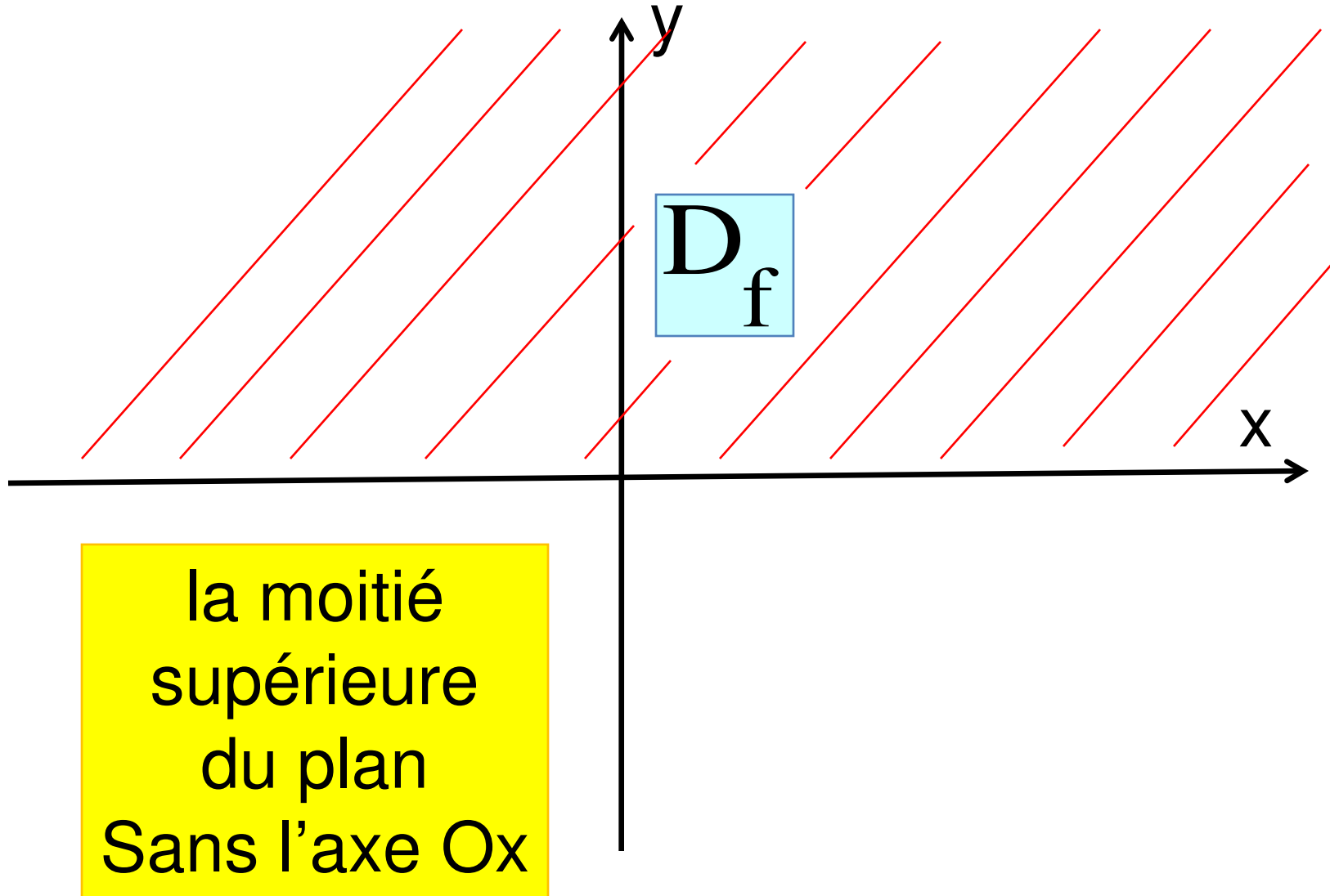
2. $f(x, y) = x \ln(y) + y^2 + 3$:

on doit avoir $y > 0$ pour que $f(x, y)$
soit **définie**, donc

$$D_f = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 x y

Interprétation géométrique



Exemples

3. $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y) + 1$:

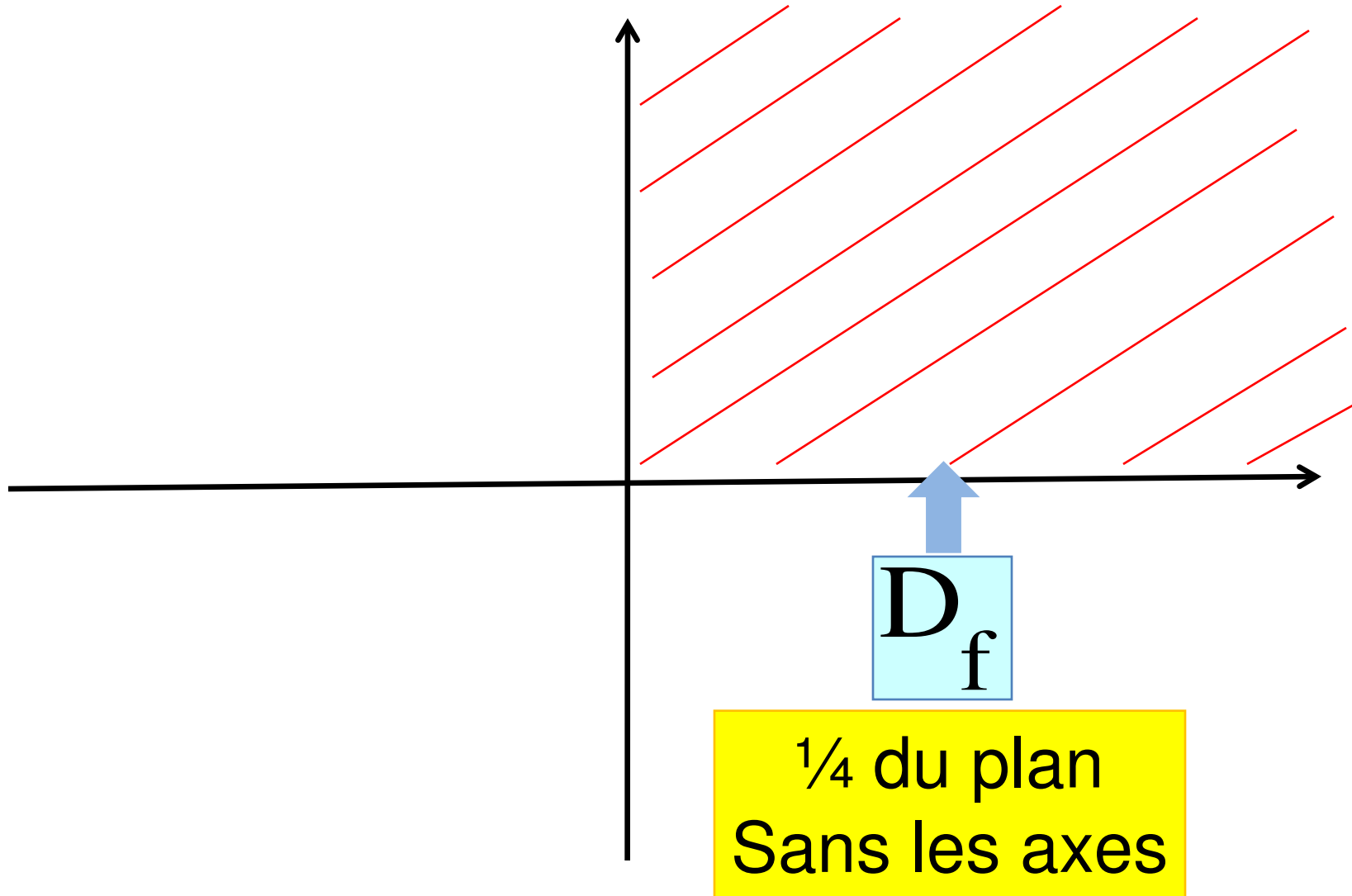
On doit avoir : $x > 0$ et $y > 0$

pour que $f(x, y)$ soit définie

Donc $D_f =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

$\uparrow$ $\uparrow$
 x y

Interprétation géométrique



Remarque

à réviser :

Équation d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$:

Une droite partage le plan en 3 zones.....

Équation d'un cercle dans le plan $\mathbb{R}^2$:

Un cercle partage le plan en 3 zones.....



Voir TD

Exercice

Voir Exercice 1
« TD, Partie 2 »

2. Courbes de niveaux & Sections

a) Courbes de niveaux :

Ce sont des sous ensembles du domaines de définition **D**.

Elles correspondent à des coupes horizontales de la surface $z = f(x, y)$ projetées sur le domaine de définition **D**.

a) Courbes de niveaux

Définition

La courbe de niveau k , notée C_k ou N_k , est l'ensemble des points du domaine de définition D tels que leur image $f(x, y)$ est égale à k :

$$C_k = \{(x, y) \in D / f(x, y) = k\}$$

Exemple

- $f(x, y) = y - x^2$:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

La Courbe de niveau k : On cherche les couples (x, y) du domaine de définition $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$f(x, y) = k$$

$$f(x,y)=k \Leftrightarrow y-x^2=k \Leftrightarrow y=x^2+k$$

La Courbe de niveau k est la parabole d'équation $y=x^2+k$:

C_0 : ($k=0$) parabole d'équation $y=x^2$

C_1 : ($k=1$) // // $y=x^2+1$

C_{-1} : ($k=-1$) // // $y=x^2-1$

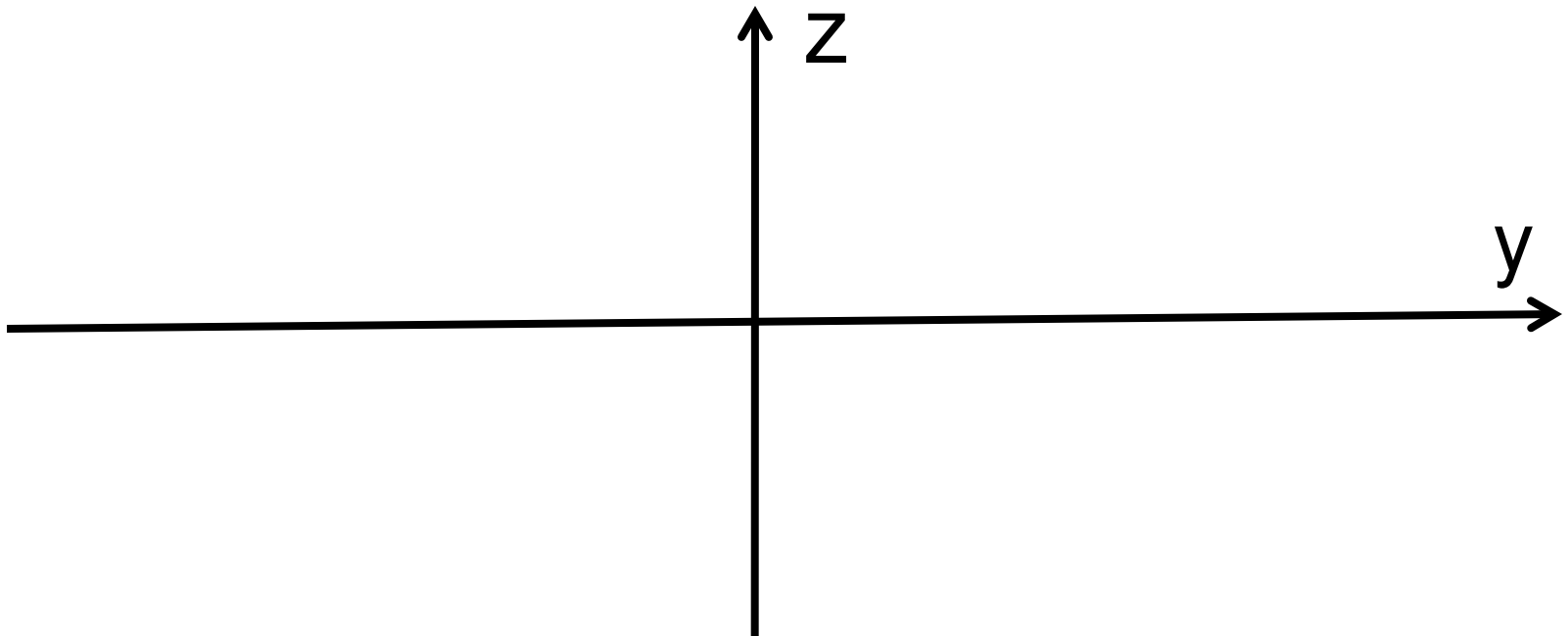
b) Sections ou « abaques »

Elles correspondent à des coupes
verticales de la surface $z = f(x, y)$

q Sections selon x

www.tifawt.com

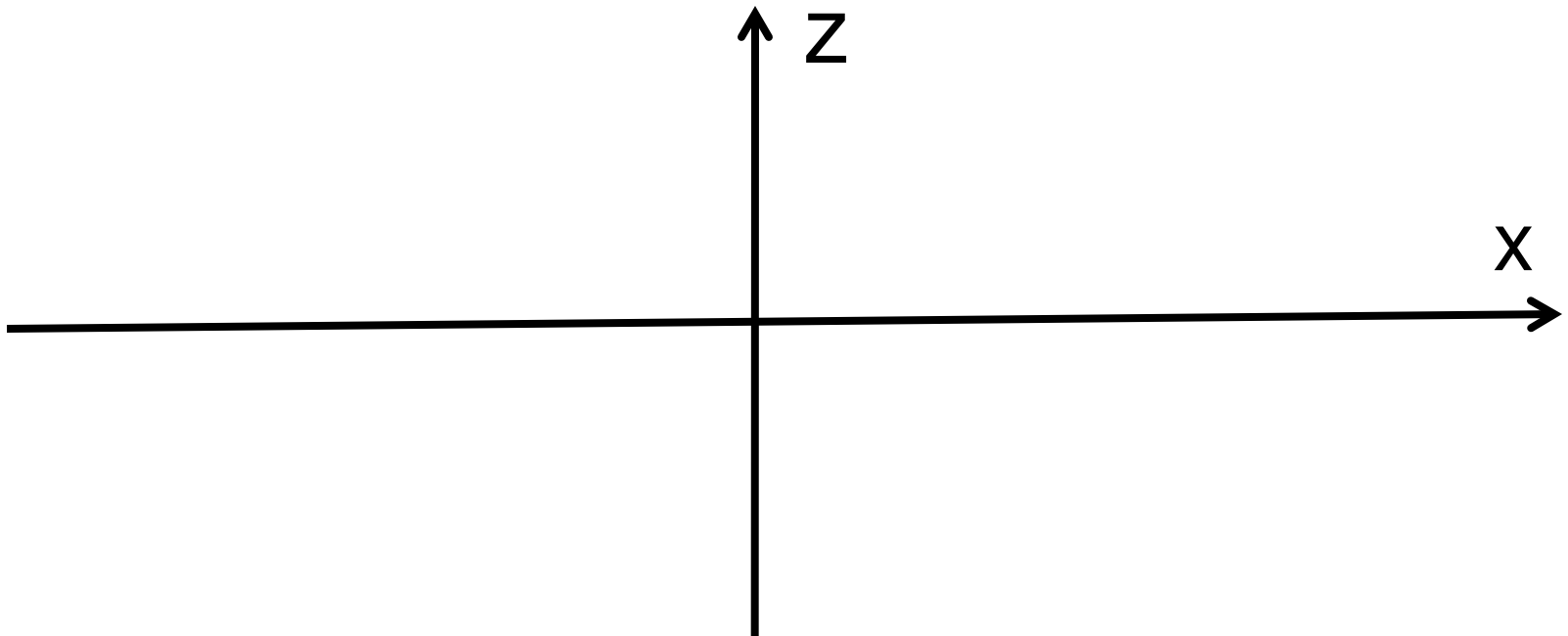
On fixe x : ($x = k$) et on trace la courbe $z = f(k, y)$ dans le plan Oyz



q Sections selon y

www.tifawt.com

On fixe y : ($y = k$) et on trace la courbe $z = f(x, k)$ dans le plan Oxz



Exemple

- $f(x,y)=\ln(xy)$:

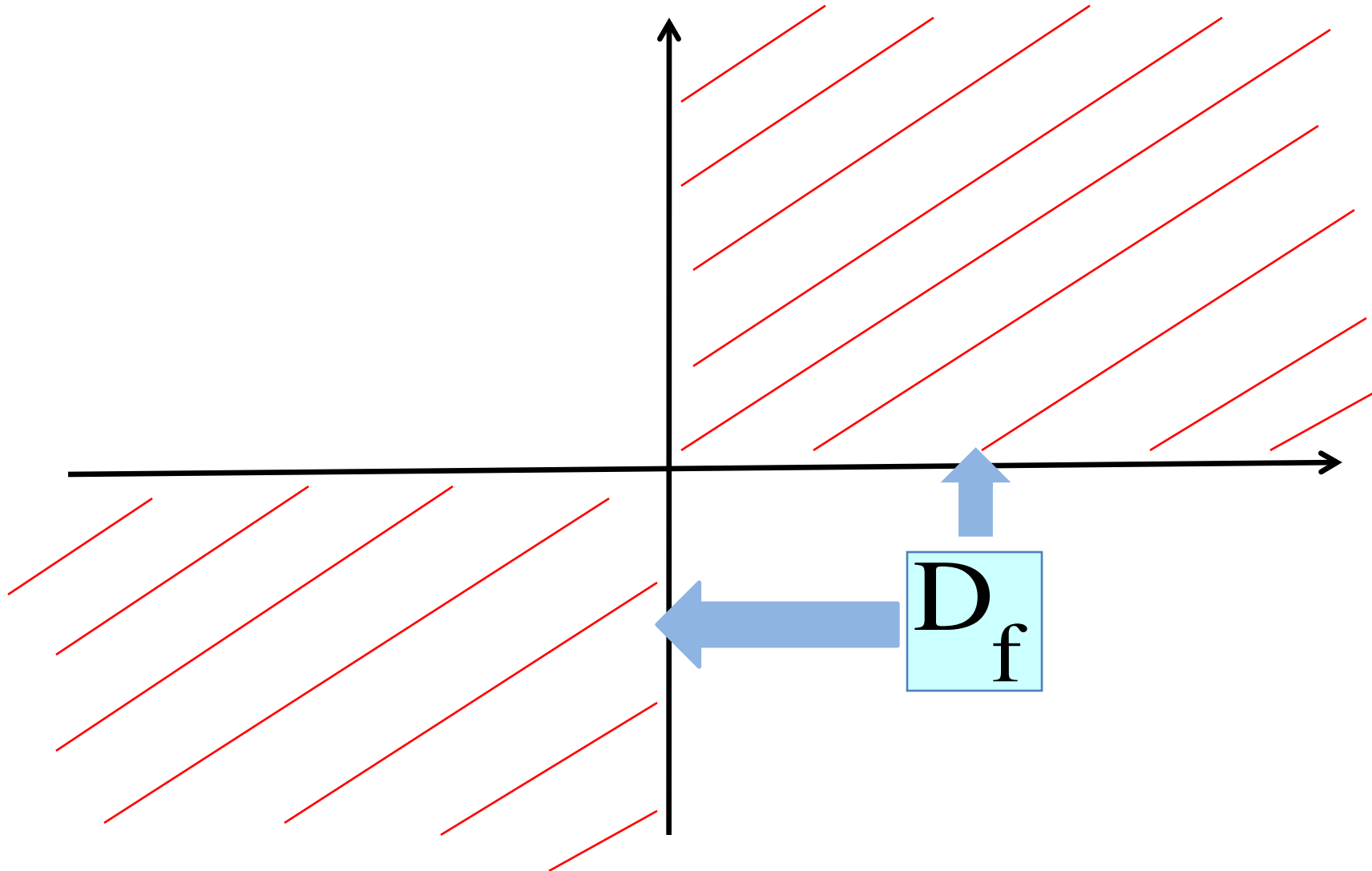
Domaine de définition :

$$xy > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ ou } x < 0 \text{ et } y < 0$$

$$D_f =]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

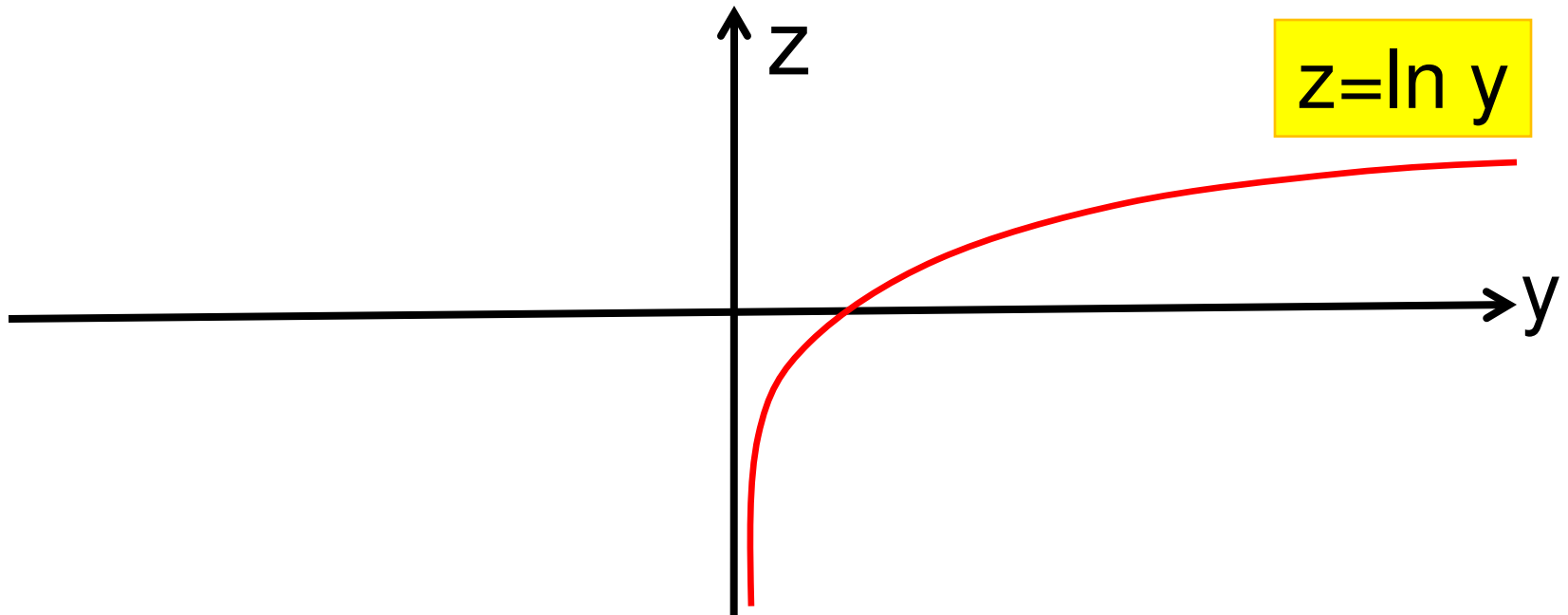
Interprétation géométrique

www.tifawt.com



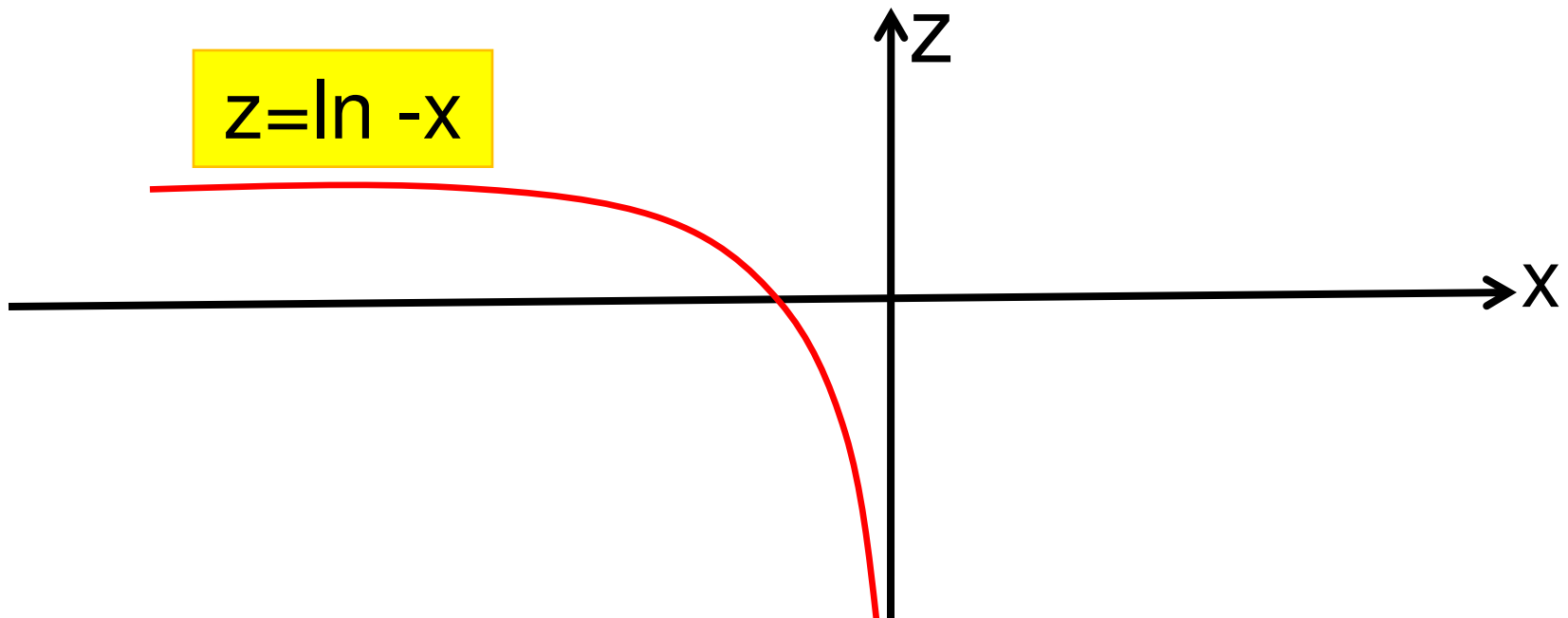
Section selon $x = 1$

On fixe x : ($x = 1$) et on trace la courbe : $z = f(1, y) = \ln y$ ($y > 0$) dans le plan Oyz



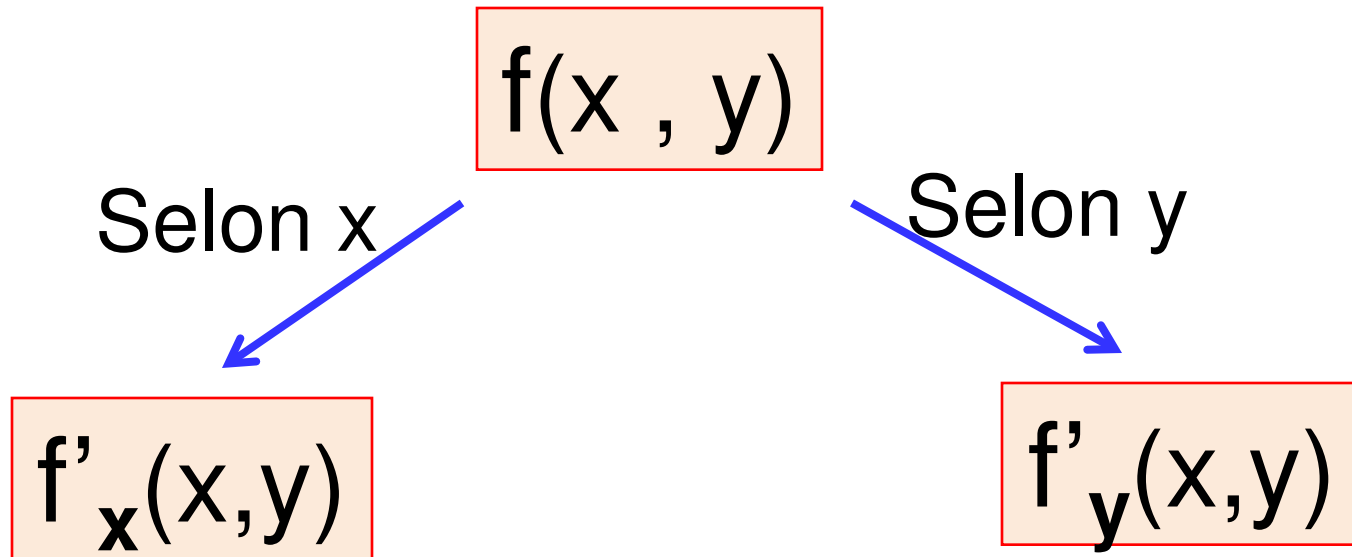
Section selon $y = -1$

On fixe y : ($y = -1$) et on trace la
courbe : $z = f(x, -1) = \ln -x$ ($x < 0$)
dans le plan Oxz



3. Dérivées **partielles** premières

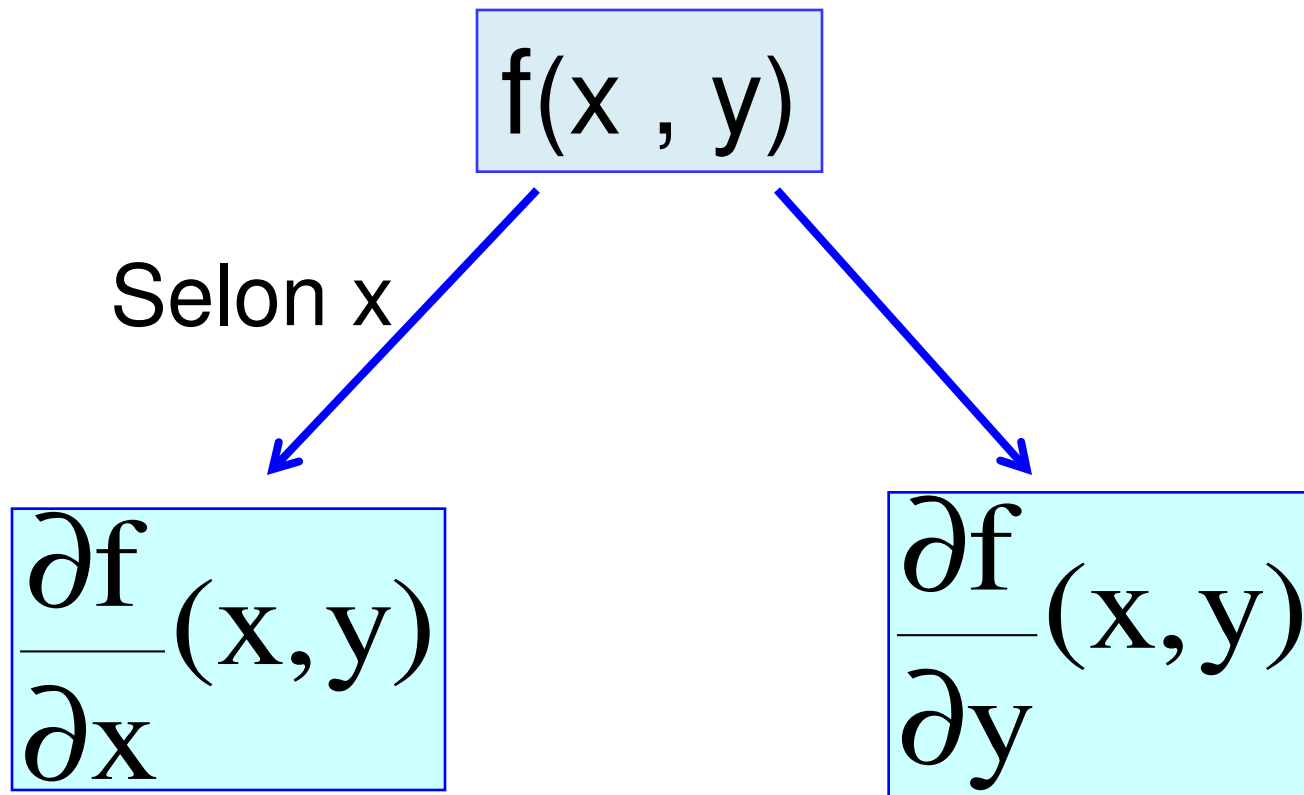
1^{ère} notation :



*Deux dérivées **partielles** premières*

2ème notation

∂ : Se prononce « d rond »



Règle de base

Les premiers pas... dans le calcul différentiel

Lorsqu'on **dérive** par rapport à **une** variable, **l'autre** variable est **supposée constante**

Dérivées partielle première www.tifawt.com

par rapport à x

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

x est **variable** et **tend** vers x_0 ,
alors que y est **fixé** : $y = y_0$

Dérivées partielles première www.tifawt.com

par rapport à y

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

x est fixé : $x = x_0$ alors que y est variable et tend vers y_0

Remarque

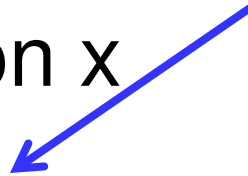
Lorsqu'on calcule une dérivée partielle, on utilise les règles de dérivation d'une fonction d'une variable réelle

« car une des deux variable est fixée »

Examples

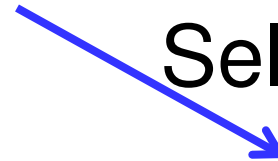
1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^4 + 3$:

Selon x



$$f'_x(x, y) = 2x + y$$

Selon y

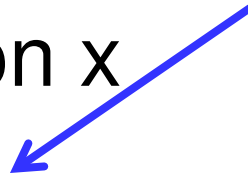


$$f'_y(x, y) = x + 4y^3$$

Examples

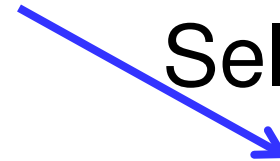
2. $f(x, y) = xe^y + x^2y$:

Selon x



$$f'_x(x, y) = e^y + 2xy$$

Selon y

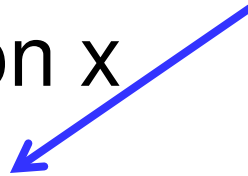


$$f'_y(x, y) = xe^y + x^2$$

Examples

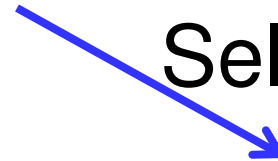
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$:

Selon x



$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y$$

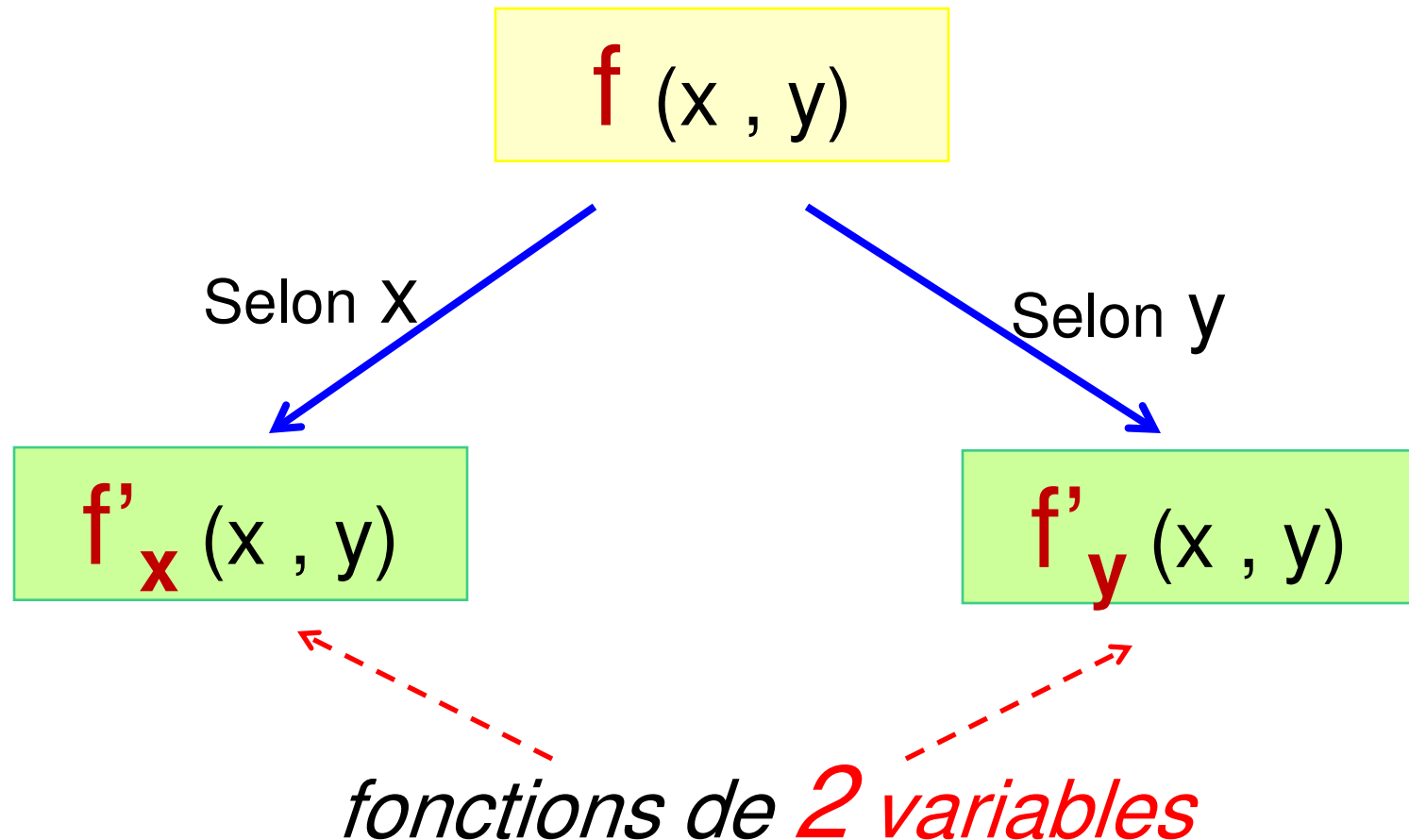
Selon y



$$f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Séance n° 8

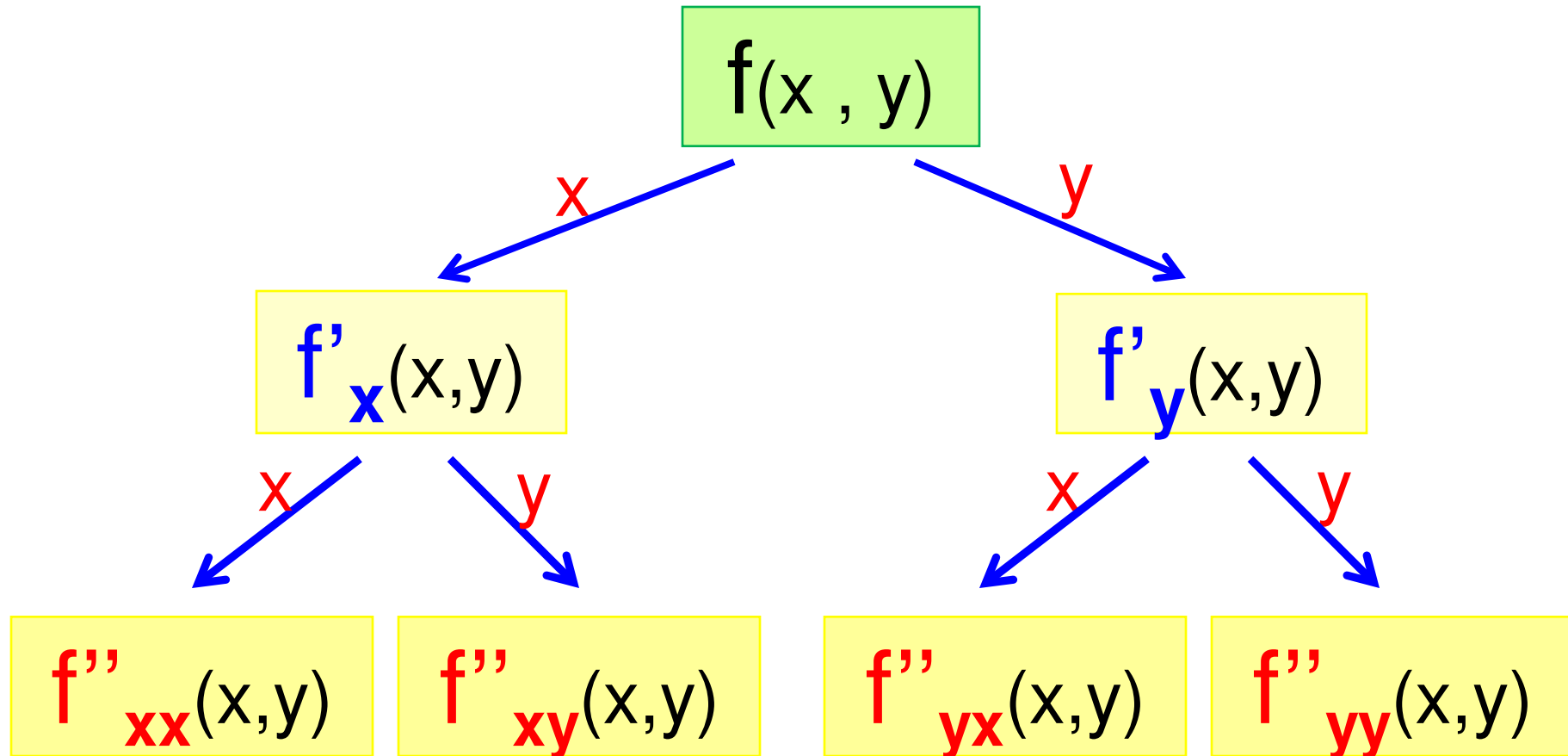
Dérivées **partielles** premières



Une **dérivée partielle** est une fonction de **deux variables x et y** , on peut alors **la dériver à son tour!**

Schème de dérivation

www.4ifawt.com



quatre dérivées partielles secondes

*Dérivées **partielles secondes** ou **d'ordre 2***

www.tifawt.com

$$f''_{xx}$$

: On **dérive** **f** **2 fois** par rapport à **x**

$$f''_{xy}$$

: On **dérive** **f** par rapport à **x** ensuite par rapport à **y** « **dérivée croisée** »

$$f''_{yx}$$

: On **dérive** **f** par rapport à **y** ensuite par rapport à **x** « **dérivée croisée** »

$$f''_{yy}$$

: On **dérive** **f** **2 fois** par rapport à **y**

Exercice

Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 3x^2y - xy^3 - x - y$;

2. $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$;

3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$1. f(x, y) = 3x^2y - xy^3 - x - y$$

x

y

$$f'_x(x, y) = 6xy - y^3 - 1$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2 - 3xy^2 - 1$$

x

y

x

y

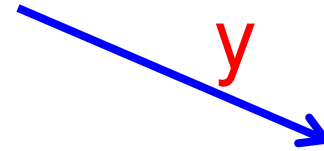
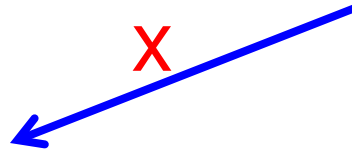
$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 6x - 3y^2$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6y$$

$$f''_{yy}(x, y) = -6xy$$

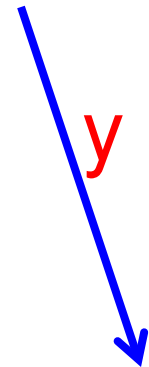
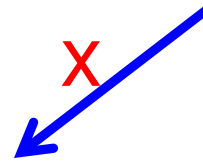
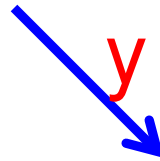
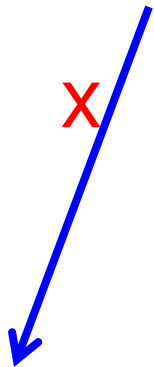
Remarque : $f''_{xy} = f''_{yx}$

2. $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$:



$$f'_x(x, y) = \ln y + y/x$$

$$f'_y(x, y) = x/y + \ln x$$



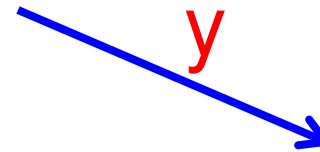
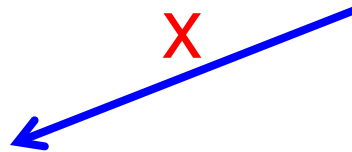
$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1/x + 1/y$$

$$f''_{xx}(x, y) = -y/x^2$$

$$f''_{yy}(x, y) = -x/y^2$$

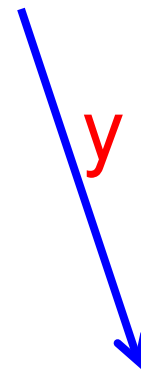
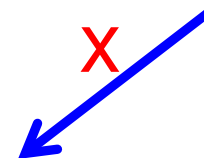
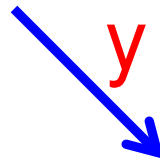
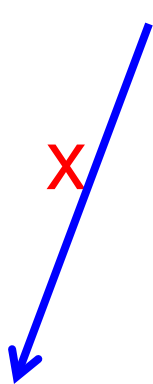
Remarque : $f''_{xy} = f''_{yx}$

3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ www.tifawt.com



$$f'_x(x, y) = x / \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f'_y(x, y) = y / \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f''_{xy} = f''_{yx} = -xy / \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f''_{xx} = y^2 / \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f''_{yy} = x^2 / \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$$

Remarque

a) Théorème de Schwartz

Si f est une fonction «de classe C^2 »
alors les dérivées secondes croisées
sont égales : $f''_{xy} = f''_{yx}$

*Toutes les fonctions économiques
considérées dans ce cours vérifient le
Théorème de Schwartz*

Remarque

b) Une fonction de **deux variables** admet :

1. **2** dérivées partielles d'ordre 1 « premières »
2. **4** dérivées partielles d'ordre 2
3. **8** dérivées partielles d'ordre 3
4. **16** dérivées partielles d'ordre 4 ... *etc*
- n . **2^n** dérivées partielles d'ordre n

4. Quelques définitions

a) *Les fonctions homogènes :*

Définition

f est homogène de degré k lorsque :

$$\forall (x, y) \in D_f \text{ et } \forall \alpha > 0$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y)$$

Exemples

1. $f(x, y) = 5x^2y - xy^2$:

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$f(\alpha x, \alpha y) = 5(\alpha x)^2(\alpha y) - (\alpha x)(\alpha y)^2$$

$$\Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = 5\alpha^3 x^2 y - \alpha^3 x y^2$$

$$= \alpha^3 (5x^2 y - x y^2) = \alpha^3 f(x, y)$$

f est homogène de degré 3

$$2. \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2} :$$

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)(\alpha y)}{\alpha^2 x^2 - \alpha^2 y^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) = \alpha^0 f(x, y)$$

f est homogène de degré 0

3. $f(x, y) = \frac{y}{x^5 + y^5} :$

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y}{\alpha^5 x^5 + \alpha^5 y^5} = \alpha^{-4} \frac{y}{x^5 + y^5}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-4} f(x, y)$$

f est homogène de degré -4

4. $f(x, y) = xy + x + y + 1$:

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 xy + \alpha x + \alpha y + 1$$

Si on prend par exemple $\alpha = 2$ et $x = 1, y = 1$

On obtient : $f(2 \times 1, 2 \times 1) = f(2, 2) = 9$

$$f(1, 1) = 4 \Rightarrow f(2 \times 1, 2 \times 1) \neq 2 \times f(1, 1)$$

f n'est pas une fonction homogène

Règle Pratique

*Pour montrer que f est **homogène** (ou **non homogène**), on peut utiliser :*

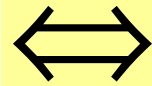
La définition

ou

Le Théorème d'Euler

Théorème d'Euler

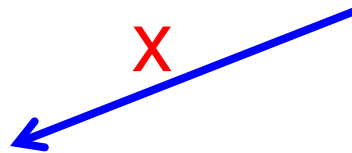
f est homogène de degré k



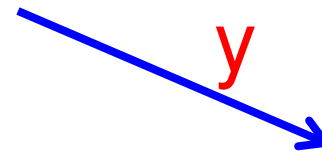
$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = k \times f(x, y)$$

Exemple

$$f(x, y) = 5x^2y - xy^2$$



$$f'_x(x, y) = 10xy - y^2$$



$$f'_y(x, y) = 5x^2 - 2xy$$

On a : $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 15x^2y - 3xy^2$

$$\Rightarrow xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = 3f(x, y)$$

f est homogène de degré 3

4. Quelques définitions

b) Elasticités

1. Cas d'une fonction d'une variable :

L'élasticité de f est par définition :

$$E_f^x = e(f, x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

Example

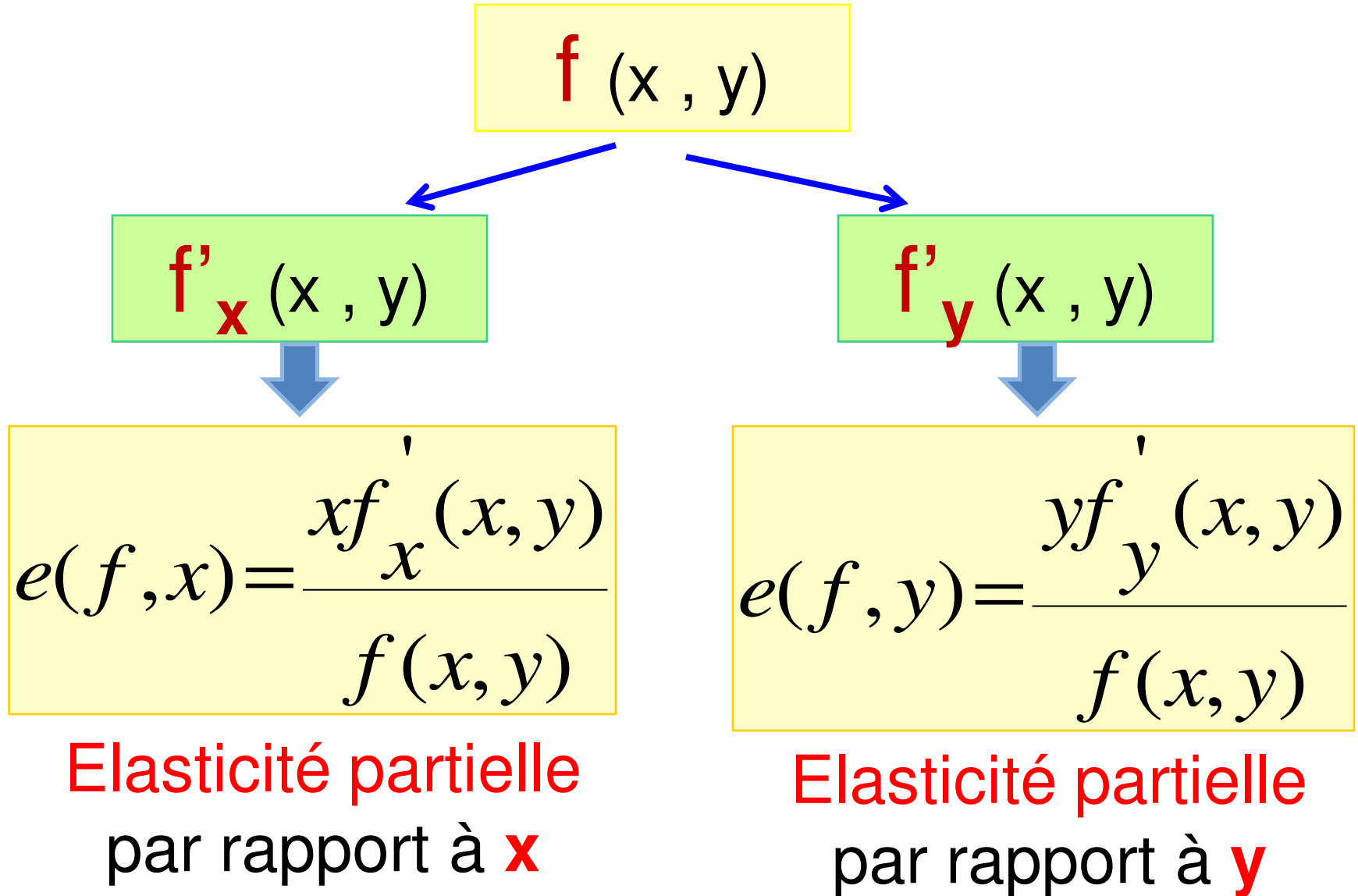
$$f(x) = x^2 + x - 2$$

On a :

$$e(f, x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x(2x+1)}{x^2 + x - 2} = \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

Example : $e(f, 2) = \frac{5}{2}$

2. Cas d'une fonction de **deux** variables



Examples

1. $f(x, y) = 5x^2y - xy^2$:



$$f'_x(x, y) = 10xy - y^2$$



$$e(f, x) = \frac{xf'_x(x, y)}{f(x, y)} = \frac{10x^2y - xy^2}{5x^2y - xy^2}$$

$$f(x, y) = 5x^2y - xy^2$$



$$f'_y(x, y) = 5x^2 - 2xy$$



$$e(f, y) = \frac{yf'_y(x, y)}{f(x, y)} = \frac{5x^2y - 2xy^2}{5x^2y - xy^2}$$

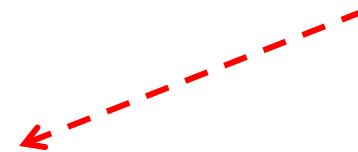
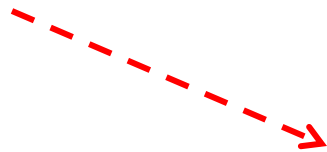
Ainsi

$$f(x, y) = 5x^2y - xy^2$$



$$e(f, x) = \frac{10x^2y - xy^2}{5x^2y - xy^2}$$

$$e(f, y) = \frac{5x^2y - 2xy^2}{5x^2y - xy^2}$$



Exemple : $x = 1$; $y = 1$

$$e(f, x) = 9/4 \quad \text{et} \quad e(f, y) = 3/4$$

Examples

2. $f(x, y) = x^{0,01} y^{0,99}$:



$$f'_x(x, y) = 0,01 x^{-0,99} y^{0,99}$$



$$e(f, x) = \frac{x f'_x(x, y)}{f(x, y)} = \frac{0,01 x^{0,01} y^{0,99}}{x^{0,01} y^{0,99}} = 0,01$$

$$f(x, y) = x^{0,01} y^{0,99}$$



$$f'_y(x, y) = 0,99 x^{0,01} y^{-0,01}$$

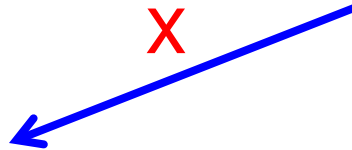


$$e(f, y) = \frac{y f'_y(x, y)}{f(x, y)} = \frac{0,99 x^{0,01} y^{0,99}}{x^{0,01} y^{0,99}} = 0,99$$

Ainsi

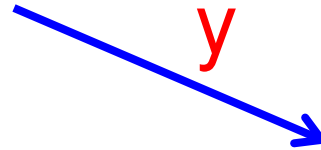
$$f(x, y) = x^{0,01} y^{0,99}$$

x



$$e(f, x) = 0,01$$

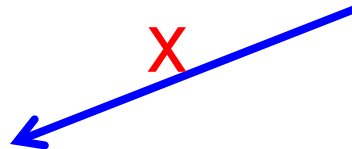
y



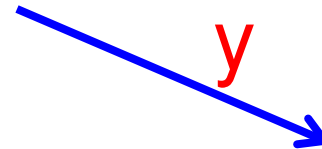
$$e(f, y) = 0,99$$

D'une manière générale

$$f(x, y) = kx^\alpha y^\beta$$



$$e(f, x) = \alpha$$



$$e(f, y) = \beta$$

Séance n° 9

4. Quelques définitions

c) Différentielle totale

Définition

La différentielle totale de f au point (x_0, y_0) avec les accroissements dx et dy est la quantité :

$$df_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) \times dx + f'_y(x_0, y_0) \times dy$$

Exemple

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$$

Calculer la différentielle totale de f au point $(20, 30)$ avec les accroissements $dx = 1$ et $dy = -1$

Réponse

$$df_{(20,30)} = f'_x(20,30) \times 1 + f'_y(20,30) \times (-1)$$

Or :

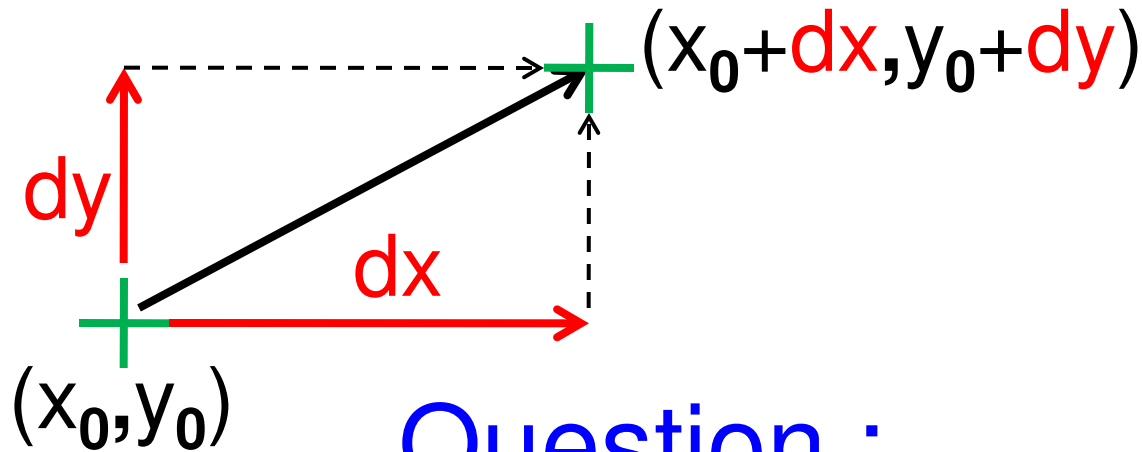
$$f'_x(x, y) = 2xy + y^2 \Rightarrow f'_x(20, 30) = 2100$$

$$f'_y(x, y) = x^2 + 2xy \Rightarrow f'_y(20, 30) = 1600$$

$$\Rightarrow df_{(20,30)} = 2100 \times 1 + 1600 \times (-1) = 500$$

Interprétation

www.tifawt.com



Question :

Lorsque x subit une légère variation dx «ou Δx » (on passe de x_0 à $x_0 + dx$) et y subit une légère variation dy «ou Δy » (on passe de y_0 à $y_0 + dy$), de combien varie la fonction f « $\Delta f = ?$ » ?

Réponse

1. Calcul direct :

$$\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

2. Valeur approchée :

$$\Delta f \cong df_{(x_0, y_0)}$$

Exemple

Soit la fonction **U** (appelée **fonction** d'**utilité**) donnée par :

$$U(x, y) = x^{1/3} y^{2/3}$$

Calculer **U**(x,y) pour **x=8** et **y=1**

De combien **varie** la fonction d'utilité **U** si **x augmente** de **dx=0,1** et **y** diminue de **dy=0,01**

*(Utiliser **deux méthodes**)*

Réponse

1. Calcul direct :

On a :

$$x_0 = 8 ; y_0 = 1 ; dx = 0,1 ; dy = -0,01$$

$$\Delta U = U(x_0 + dx; y_0 + dy) - U(x_0; y_0)$$

$$= U(8,1;0,99) - U(8;1)$$

$$= \sqrt[3]{8,1} \times \sqrt[3]{0,99^2} - 2 = -0,00511..$$

Réponse

2. Valeur approchée :

$$\Delta U \cong dU_{(8,1)}$$

avec les accroissements

$$\begin{cases} dx = 0,1 \\ dy = -0,01 \end{cases}$$

$$dU_{(8,1)} = U'_x(8,1) \times 0,1 + U'_y(8,1) \times (-0,01)$$

$$U'_x(x, y) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3} \Rightarrow U'_x(8, 1) = \frac{1}{12} ;$$

$$U'_y(x, y) = \frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3} \Rightarrow U'_y(8, 1) = \frac{4}{3} ;$$

Donc : $dU_{(8,1)} = 1/12 \times (0, 1) + 4/3 \times (-0, 01)$

C'est-à-dire : $dU_{(8,1)} = -0,005$

On obtient ainsi : $\Delta U \cong -0,005$

Quelques Interprétations Economiques

Variation &
Variation relative

Exemple

Le salaire **S** d'un employé a été augmenté de **1300 DH**

On parle ici de **variation** du Salaire :

$$\Delta S = 1300$$

Le nouveau salaire est :

$$S' = S + \Delta S = S + 1300$$

Exemple

Le salaire **S** d'un employé a été augmenté de **5%** : $\Rightarrow \Delta S = 5\% \times S$

On parle ici de **variation relative** du Salaire :

$$\frac{\Delta S}{S} = 5\%$$

Le nouveau salaire est :

$$S' = S + \Delta S = S + 0,05 \times S = 1,05 \times S$$

A. Cas d'une fonction « économique » d'une variable

q *Variation de f :*

On rappelle que :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lorsque $x \rightarrow x_0$; $f(x) \rightarrow f(x_0)$ (**f** est **continue**)

On note : $df = f(x) - f(x_0)$ et $dx = x - x_0$

que l'on appelle respectivement **différentielle** de **f** et **différentielle** de **x**, on a donc :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ ou encore } df = f'(x) \times dx$$

Exemples :

- $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow df = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$;

- $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow df = -\frac{1}{x^2} dx$

Notations

dx : Variation **infinitement** **petite** de x

df : Variation **infinitement** **petite** de f

Δx : Variation **très** **petite** « **faible** » de x

Δf : Variation **très** **petite** « **faible** » de f

En pratique

si la variation Δx que subit x est faible :
la variation subit par la fonction f est faible
et on a :

$$\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x$$

Remarque : dans la formule $df = f'(x) \times dx$
nous avons remplacé :

$$dx \text{ par } \Delta x \quad \text{et} \quad df \text{ par } \Delta f$$

Exemple

Le coût global de la fabrication d'un bien en quantité x est donnée par la formule :

$$C(x) = 250 - x^2$$

Pour une quantité $x=10$ (par exemple) :

$$C(10) = 250 - 100 = 150$$

Calculons l'écart (de 2 façons différentes)
résultant d'une augmentation $\Delta x = 1$

1) Calcul direct :

$$C(11) = 250 - 11^2 = 250 - 121 = 129$$

donc

$$\Delta C = C(11) - C(10) = 129 - 150 = -21$$

2) Valeur approchée : en appliquant la formule :

$$\Delta C \cong C'(x) \times \Delta x$$

On obtient :

$$C'(x) = -2x \Rightarrow \Delta C \cong (-20) \times (1)$$

$$\Delta C \cong -20$$

A retenir

- Si x subit une faible variation Δx , une valeur approchée de la variation Δf de f est donnée par la formule :

$$\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x$$

q *Variation relative*

On a : $\Delta f \cong f'(x) \times \Delta x \Leftrightarrow f'(x) \cong \frac{\Delta f}{\Delta x}$

L'élasticité de f au point x est :

$$e(f, x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} \cong \frac{x \frac{\Delta f}{\Delta x}}{f(x)} \Rightarrow e(f, x) \cong \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{f}{x}}$$

Elasticité de f au point x :

$$e(f, x) \cong \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} \iff \frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{f}$$

représente la variation relative de f

$$\frac{\Delta x}{x}$$

représente la variation relative de x

Exemple

$f(x)$ représente une fonction économique dépendant de la quantité x d'un bien distribué.

On suppose connaître la valeur de f pour une quantité $x=1000$ et que l'élasticité en $x=1000$ est : $e(f, 1000) = 5$.

Exemple

La quantité distribuée à **baissé** de **2%**
(**980 unités** ont été **distribuées** au lieu de **1000**),

cela entrainera une **variation relative** de **f** :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x} = 5 \times -2\% = -10\%$$

f a **baissé** d'environ 10%

A retenir

- Si **x** subit une faible variation relative $\Delta x/x$, une **valeur approchée** de la **variation relative** de **f** est donnée par

la formule :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x}$$

$e(f, x)$ désigne l'**élasticité** de **f** au point x

B. Cas d'une fonction www.tifawt.com « économique » de deux variables

q *Variation de f :*

Nous avons vu que : $\Delta f \cong df_{(x_0, y_0)}$

C'est-à-dire :

$$\Delta f \cong f'_x(x_0, y_0) \times dx + f'_y(x_0, y_0) \times dy$$

En pratique : si la variation Δx que subit x est faible et la variation Δy que subit y est faible : la variation subit par la fonction f est faible et on a :

$$\Delta f \cong f'_x(x_0, y_0) \times \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \times \Delta y$$

*Voir exemple précédent
« paragraphe 4 c) : différentielle totale »*

A retenir

- Si **x** subit une faible variation Δx et **y** subit une faible variation Δy , une valeur approchée de la variation de **f** est donnée par la formule :

$$\Delta f \cong f'_x(x_0, y_0) \times \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \times \Delta y$$

q *Variation relative*

On a : $\Delta f \cong f'_x(x, y) \times \Delta x + f'_y(x, y) \times \Delta y$

En divisant par $f(x, y)$:

$$\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} \times \Delta x + \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \times \Delta y$$

On fait apparaître les variations relatives de **x** et de **y** :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong \frac{x f'_x(x, y)}{f(x, y)} \times \frac{\Delta x}{x} + \frac{y f'_y(x, y)}{f(x, y)} \times \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f, y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

Variation relative de f

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f, y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

$\frac{\Delta f}{f}$ représente la variation relative de f

$\frac{\Delta x}{x}$ et $\frac{\Delta y}{y}$ représentent les variations relatives de **x** et de **y**

$e(f, x)$ et $e(f, y)$ représentent les élasticités partielles par rapport à **x** et à **y**

Exemple

$f(x,y)$ représente une fonction économique dépendant de deux quantités x et y de deux biens fabriqués.

On suppose connaître la valeur de f pour une quantité $x=1000$ et $y=500$. Supposons aussi que les élasticités partielles en $x=1000$ et $y=500$ sont : $e(f, x) = 5$ et $e(f, y) = 3$

Exemple

Suite à un incident technique, la fabrication des deux biens a légèrement varié : **x** a diminué de 4% et **y** a augmenté de 5%. Quelle variation cela entraînera sur la fonction économique **f** ?

$$\frac{\Delta f}{f} \cong 5 \times (-4\%) + 3 \times 5\% = -5\%$$

la fonction économique **f** subira une baisse d'environ 5%

A retenir

- Si **x** subit une faible variation relative $\Delta x/x$ et **y** subit une faible variation relative $\Delta y/y$, une valeur approchée de la variation relative de **f** est donnée par la formule :

$$\frac{\Delta f}{f} \cong e(f, x) \times \frac{\Delta x}{x} + e(f, y) \times \frac{\Delta y}{y}$$

Fin de l'interprétation Economique

Suite du Cours

Séance n° 10

4. Quelques définitions

d) Hessien de f

Rappel : déterminant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Définition

Le Hessien de f au point (x, y) est la quantité :

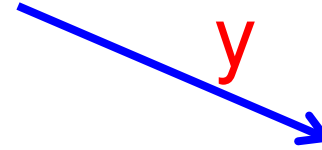
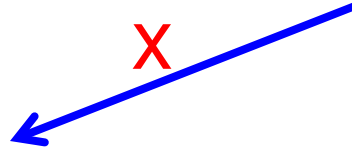
$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit la fonction $f(x, y) = x^2y - xy^3$

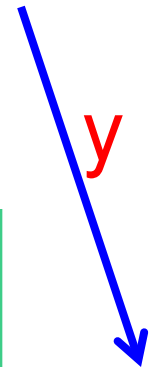
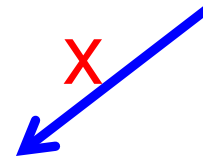
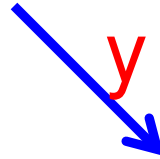
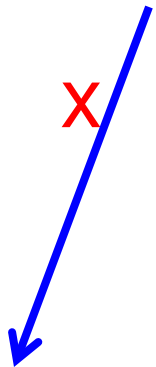
Calculer le Hessien de f aux points $(0;0)$, $(1;2)$ et $(-2;1)$

$$f(x, y) = x^2y - xy^3$$



$$f'_x(x, y) = 2xy - y^3$$

$$f'_y(x, y) = x^2 - 3xy^2$$



$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2x - 3y^2$$

$$f''_{xx}(x, y) = 2y$$

$$f''_{yy}(x, y) = -6xy$$

Donc *Le Hessien* de f au point (x, y) est donné par :

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x - 3y^2 \\ 2x - 3y^2 & -6xy \end{vmatrix}$$

Ainsi

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$H_f(1,2) = \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -10 & -12 \end{vmatrix} = -48 - 100 = -148$$

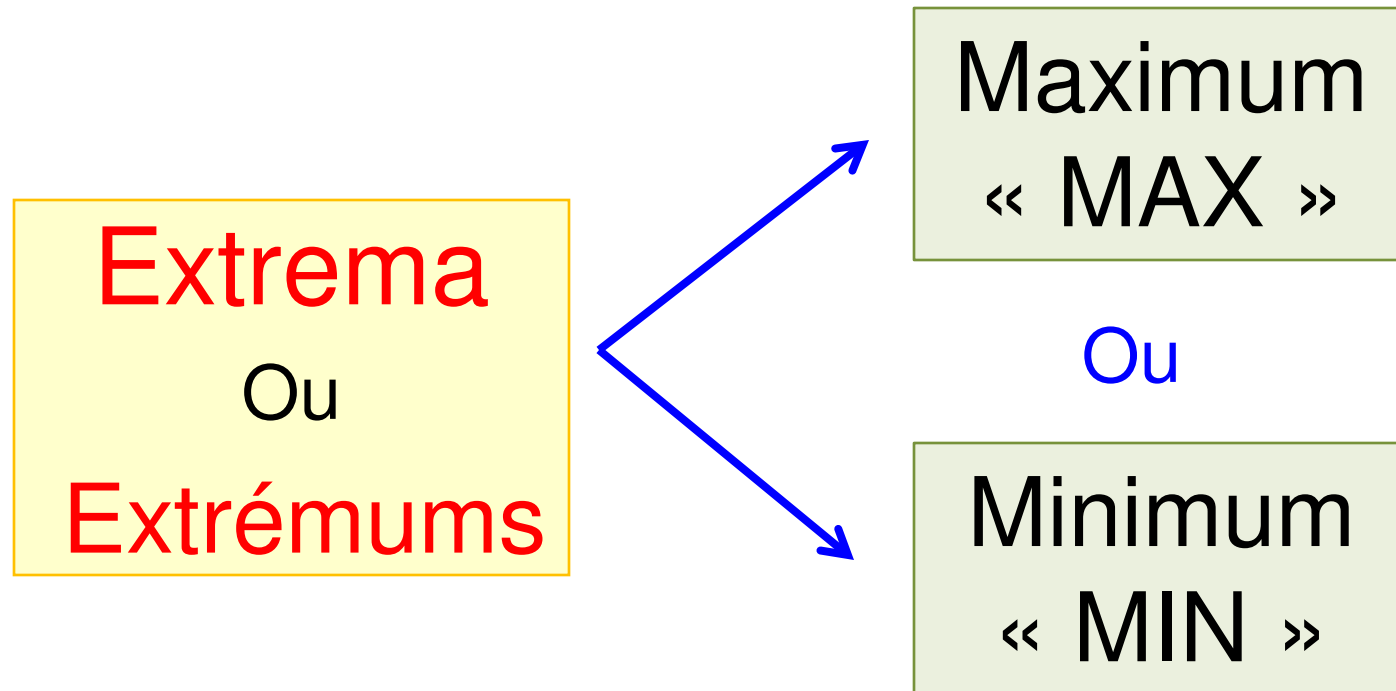
$$H_f(-2,1) = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 49 = -25$$

5. Optimisation

Ou

Recherche d'Extrema

Remarque



Problème

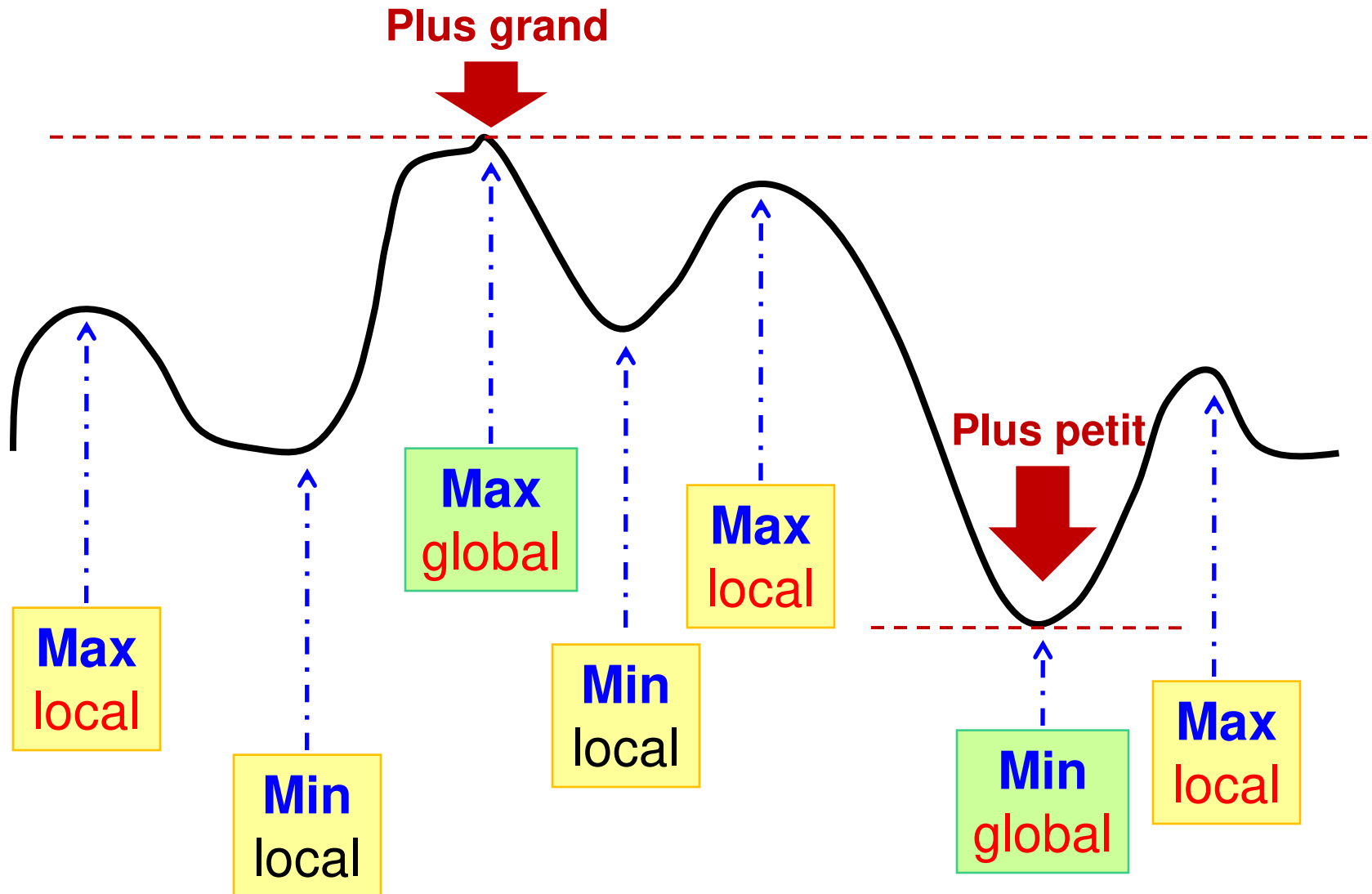
Soit $f(x, y)$ une fonction de **deux** variables définie sur un domaine **D**

$$((x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2)$$

On cherche les couples **(x, y)** qui rendent **f** **maximale** ou **minimale**

Extrémum local ou global

www.tifawt.com



Un maximum global (s'il existe) est un point (x_0, y_0) du domaine **D** qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Un minimum global (s'il existe) est un point (x_0, y_0) du domaine **D** qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

a) Extrémums "locaux" libres

On cherche les extrémums "locaux" de la fonction f sachant qu'il n'y a aucune contrainte sur les variables x et y : on dit que les variables x et y sont indépendantes ou libres

On parle alors d'**extrémums libres**
de la fonction **f** sur le domaine **D**

Méthode à suivre

I. Etape 1 : Recherche des candidats

Remarque : On dit aussi points critiques ou points stationnaires

Ce sont les couples (x, y) solutions du système :

$$S : \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

On doit *résoudre* le système ***S*** “*étape un peu difficile !*” et donner ses solutions :

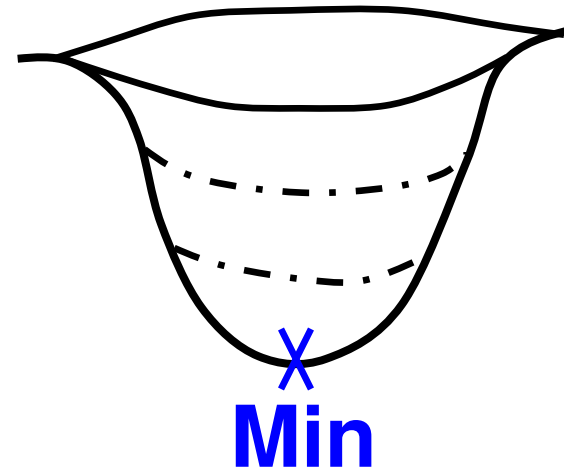
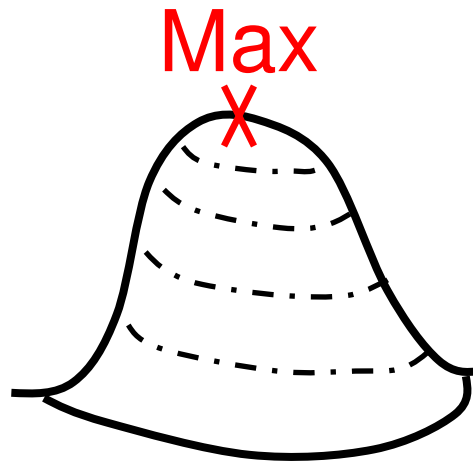
(x_0, y_0) ; (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; etc...

Les couples (x_0, y_0) ; (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ... sont *les candidats* (...pour être extrémums), ou *les points critiques* de la fonction ***f***

(on dit aussi : *points stationnaires* de ***f***)

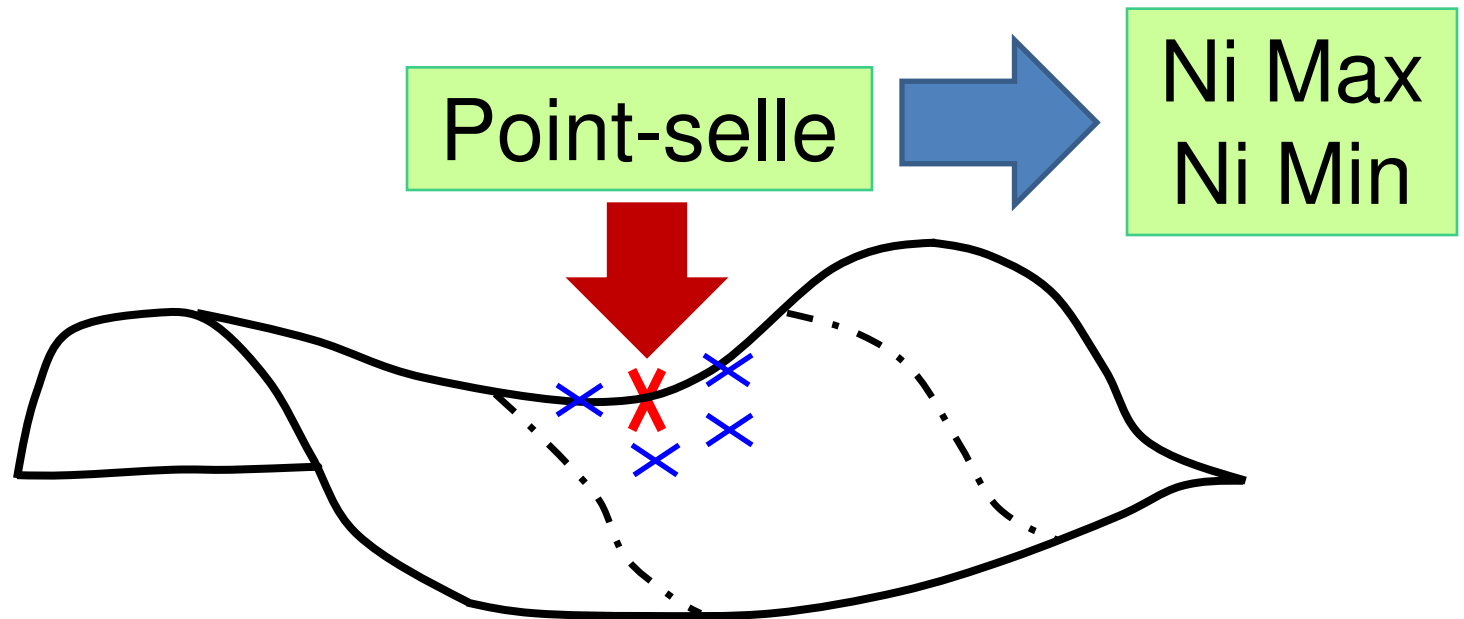
II. Etape 2

Nature des candidats



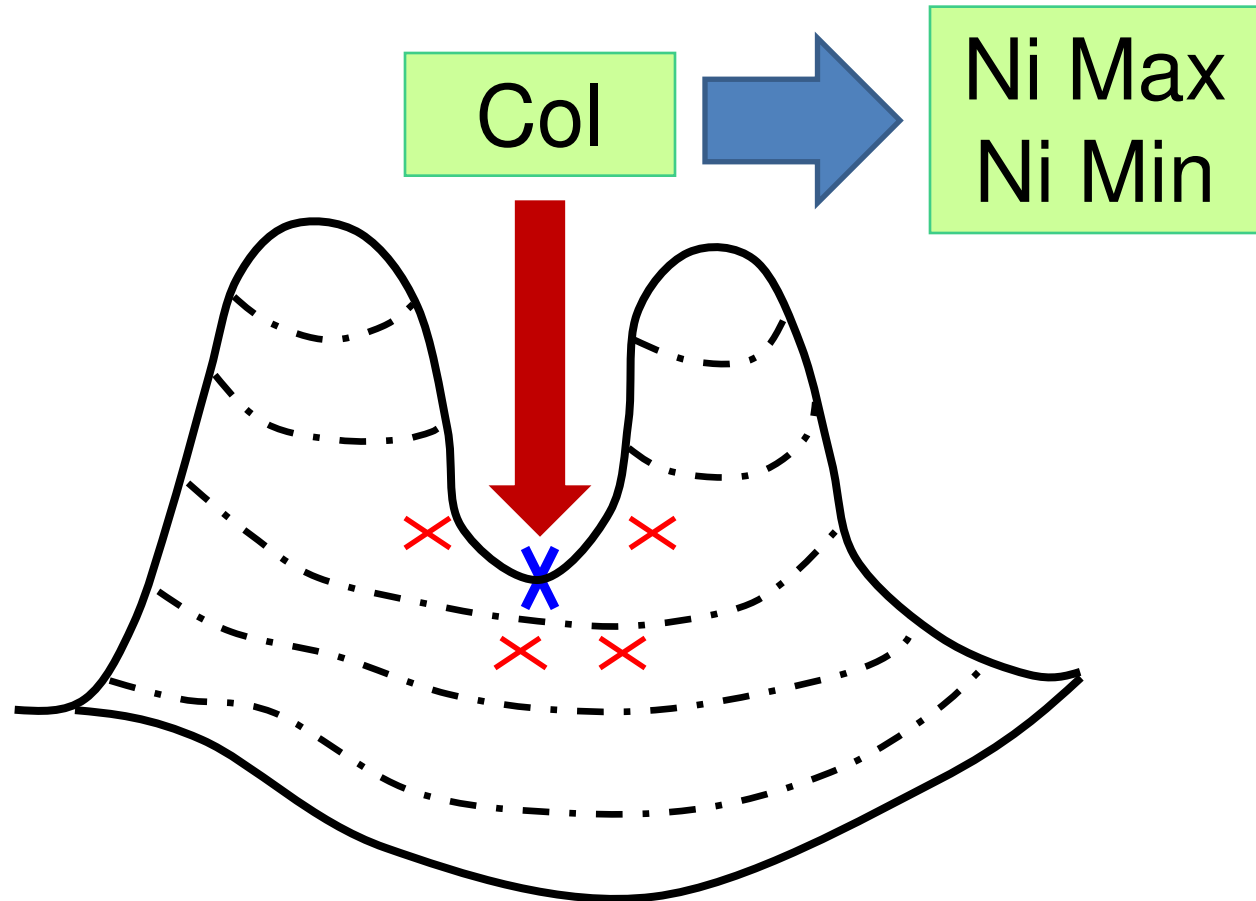
II. Etape 2

Nature des candidats



II. Etape 2

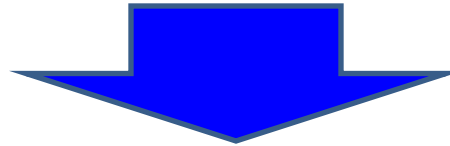
Nature des candidats



Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessien de f pour chaque candidat.

Soit (x_0, y_0) un candidat issu de l'étape 1 :



$$H_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

Etape 2 : Nature des candidats

q Si $H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ **pas d'extrémum** en (x_0, y_0)

« Ni **Max** ni **Min** »

Il s'agit d'un **Col** ou un **point-selle** en (x_0, y_0)

q Si $H_f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ **f présente un extrémum**
en (x_0, y_0)

*Pour savoir s'il s'agit d'un **Max** ou d'un **Min**, on regarde le signe de **la dérivée seconde** par rapport à **x** (ou par rapport à **y**) :*

Si $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$:

f présente un **Maximum** en (x_0, y_0)

Si $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$:

f présente un **Minimum** en (x_0, y_0)

3^{ème} cas : On ne peut pas conclure

q Si $H_f(x_0, y_0) = 0$:

Dans ce cas, on ne peut **rien conclure**

Remarque : Dans ce cas, on peut faire appel à d'autres méthodes : Des **estimations locales** de **la fonction** au **voisinage** du point (x_0, y_0) par exemple. Voir « *TD : Partie 2 - Exercice 3* »

Exemple 1

Soit la fonction :

$$f(x, y) = -3x^2 - 4y^2 - 3xy + 69x + 93y$$

Trouver les extrémums « locaux » de la fonction f

Réponse

I. Etape 1 : Recherche des candidats

On doit résoudre le système :

$$S : \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y + 69 = 0 \\ -8y - 3x + 93 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 69 \\ 3x + 8y = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases}$$

Nous avons un seul candidat : le couple (7, 9)

Réponse

II. Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessian de f au point $(7, 9)$:

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(x, y) = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = 39$$

Réponse

Le Hessien de f ne dépend ici de (x, y) , nous avons alors au point $(7, 9)$:

$$\Rightarrow H_f(7,9) = 39 > 0$$

f présente donc un *extrémum* au point $(7, 9)$

Pour savoir s'il s'agit d'un **Max** ou d'un **Min**, on regarde le signe de la dérivée seconde par rapport à x :

Réponse

$$f''_{xx}(x, y) = -6 \Rightarrow f''_{xx}(7, 9) = -6 < 0$$

***f** présente donc un **Maximum « local »** au point (**7** , **9**)*

La valeur de ce **maximum** est :

$$f(7, 9) = 660$$

Exemple 2

Soit la fonction :

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Trouver **les extrémums** « locaux » de la fonction **f**

I. Etape 1 : Recherche des candidats

On doit résoudre le système :

$$S : \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y - x^2) = 0 \\ 3(x - y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = (x^2)^2 = x^4 \end{cases}$$

Etape 1 : Recherche des candidats

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x - x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(1 - x^3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Nous avons ici *deux candidats* $(0, 0)$ et $(1, 1)$

Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessien de f aux points $(0,0)$, $(1,1)$:

$$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow \text{pas d'extrémum en } (0,0)$$

$$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow$$

Extrémum en $(1,1)$

Réponse

On regarde le signe de la dérivée seconde de f par rapport à x au point $(1, 1)$:

$$f''_{xx}(x, y) = -6x \Rightarrow f''_{xx}(1, 1) = -6 < 0$$

f présente donc un **Maximum « local »** au point $(1, 1)$

La valeur de ce maximum est :

$$f(1, 1) = 1$$

Séance n° 11

« Dernière Séance »

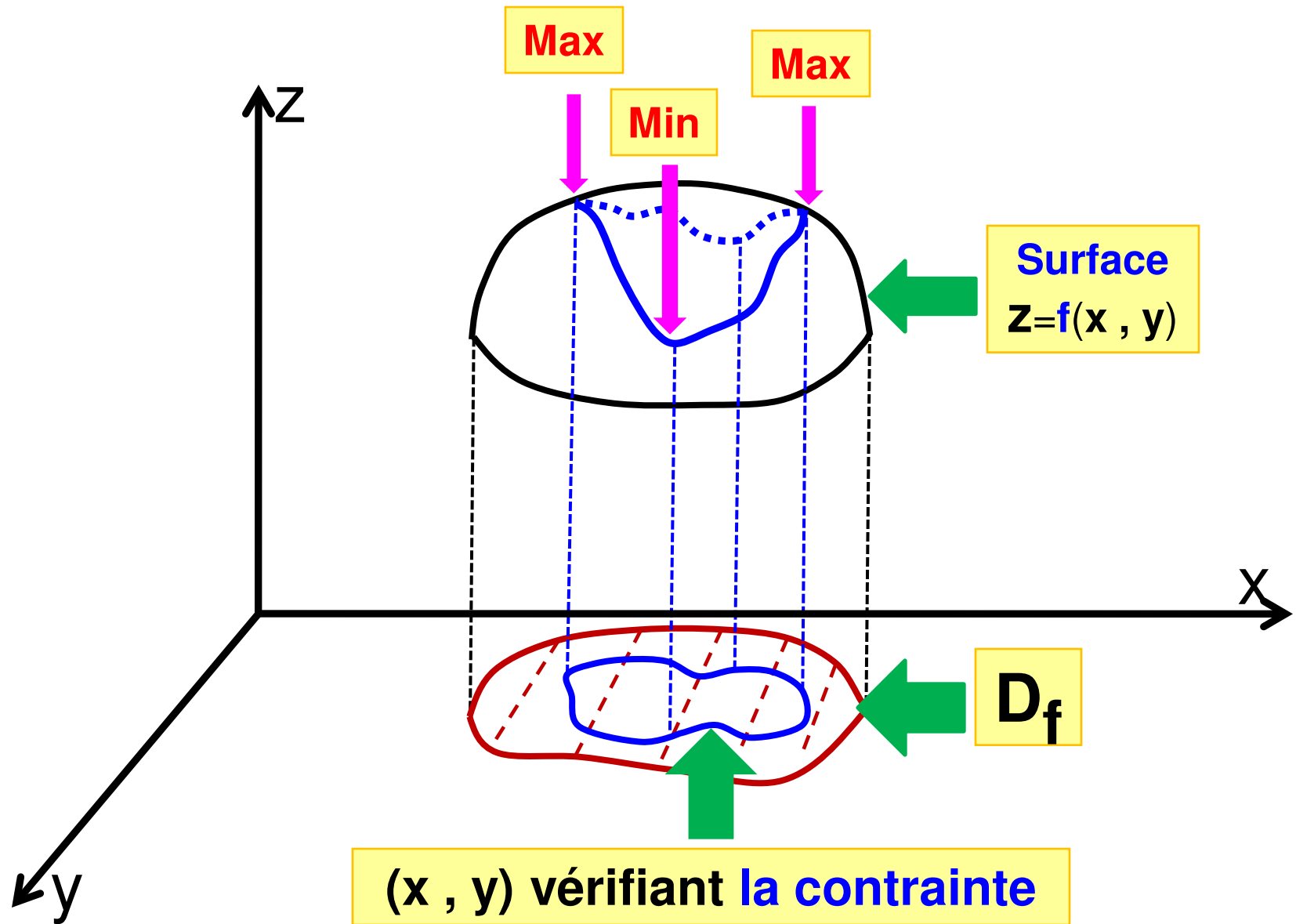
b) Extrémums "locaux" liés

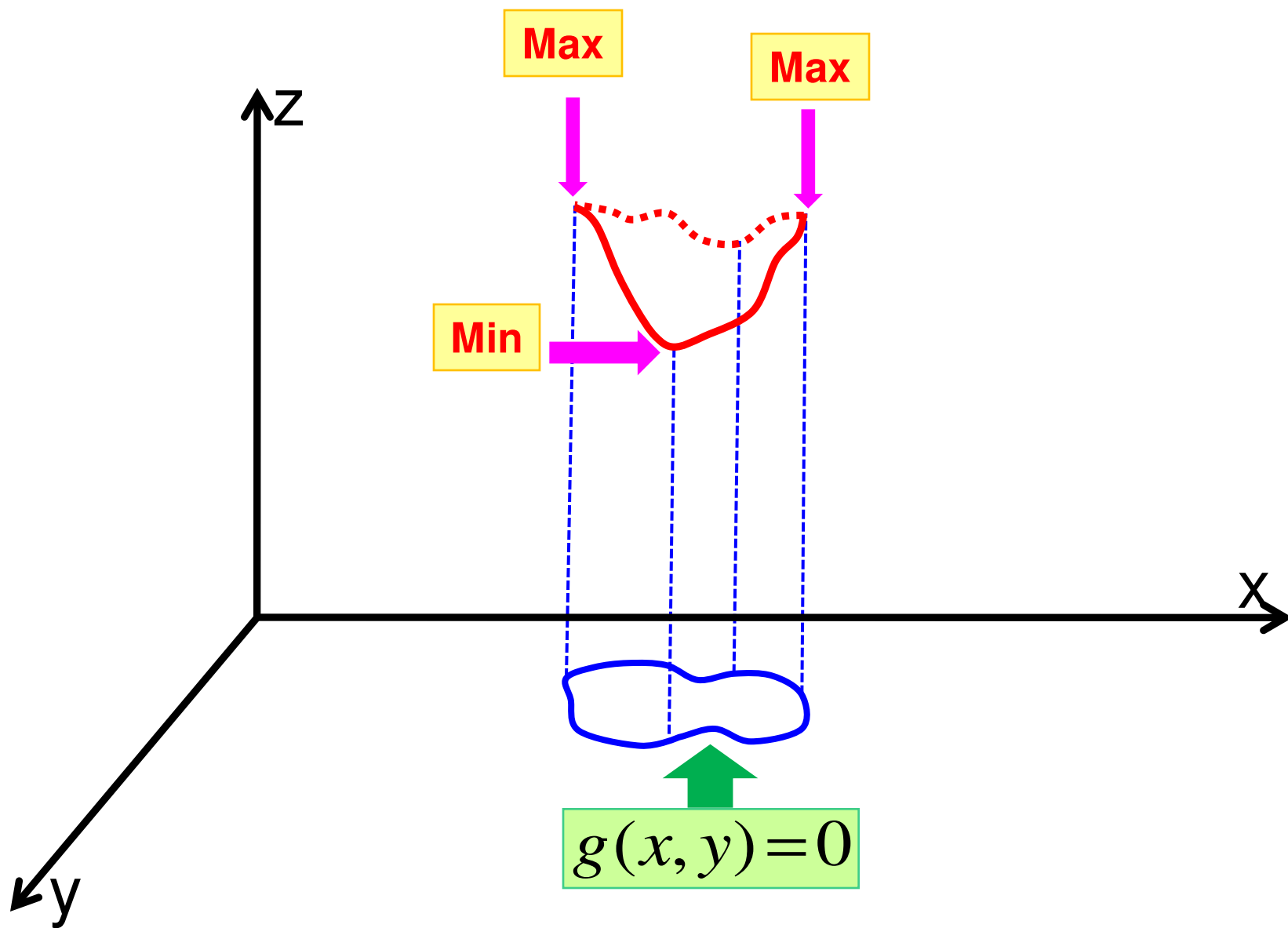
On cherche les extrémums "locaux"
de la fonction **f** sachant que les variables
x et **y** sont liées par une équation
appelée "contrainte"

Contrainte : $g(x, y) = 0$

On parle alors d'**extrémums** de la fonction **f** sur le domaine **D** liés par la **contrainte** $g(x, y) = 0$

Le problème est **plus simple** que celui des **extrémums libres** :





Deux méthodes :

I. Méthode de substitution

Ou

**II. Méthode du multiplicateur
de Lagrange**

I. Méthode de substitution

A partir de la contrainte $g(x, y) = 0$, on exprime y en fonction de x (ou x en fonction de y) et on remplace dans la fonction $f(x, y)$

On obtient alors une fonction d'une variable réelle :

on cherche ses extrémums

Exemple

Chercher les **extrémums** de la fonction :

$$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$$

Sous la contrainte $x + y = 2$

Réponse

On pose :

$$g(x, y) = x + y - 2$$

« **contrainte** »

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x$$

on remplace **y** par sa valeur dans f (**x** , **y**) :

Réponse

$$f(x, y) = f(x, 2 - x)$$

$$= 3x(2 - x) - x^2 - (2 - x)^2$$

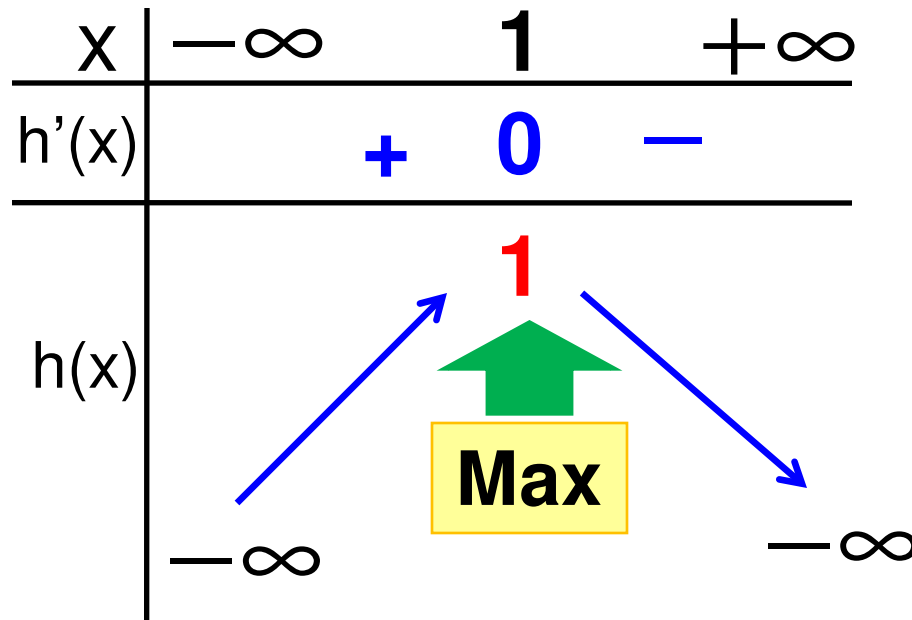
$$= -5x^2 + 10x - 4 = h(x)$$

On obtient une fonction d'une variable : $h(x)$

Réponse

On cherche les **extrémums** de la fonction **$h(x)$** :

$$h'(x) = -10x + 10 = 10(1 - x)$$



Réponse

La fonction **h** présente un **extrémum** en $x=1$

$$x=1 \Rightarrow y=2-x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Conclusion

La fonction **f** présente un **seul extrémum** sous la **contrainte** $x+y=2$: un **Maximum** en (**1** , **1**)

La valeur de ce **maximum** est : $f(1,1)=1$

Remarque

On utilise la méthode de substitution lorsque la contrainte g permet d'exprimer facilement y en fonction de x (ou x en fonction de y)

II. Méthode de Lagrange

On intègre *la contrainte* dans le problème en considérant *la fonction de Lagrange* « à 3 variables » suivante :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$



λ est le multiplicateur de Lagrange

II. Méthode de Lagrange

*On cherche alors les **extrémums** « libres » de la fonction **L** :*

q *Deux étapes :*

v *Recherche des candidats*

v *Nature des candidats*

*Problème à **3 variables** !!*

Etape 1 : Recherche des candidats

On commence par résoudre le système :

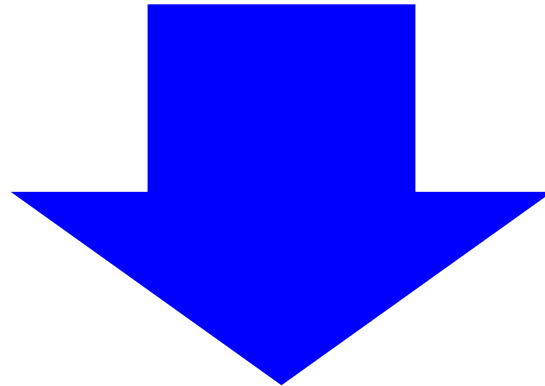
$$S : \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

*Les solutions $(x_1, y_1, \lambda_1) ; (x_2, y_2, \lambda_2) \dots$
du système S sont les candidats*

Etape 2 : Nature des candidats

On calcule le Hessien de L pour chaque candidat.

Soit (x_1, y_1, λ_1) un candidat issu de l'étape 1



$$H_L(x_1, y_1, \lambda_1)$$

$$H_L(x_1, y_1, \lambda_1) = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

Calculé au point (x_1, y_1, λ_1)

q Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) > 0$

f présente un **Maximum** en (x_1, y_1)

q Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) < 0$

f présente un **Minimum** en (x_1, y_1)

3^{ème} cas : On ne peut pas conclure

q Si $H_L(x_1, y_1, \lambda_1) = 0$

Dans ce cas, on ne peut rien conclure

Exemple

Soit la fonction :

$$f(x, y) = x + y + 5$$

Chercher les extrémums de f sous la
contrainte : $x^2 + y^2 = 1$

Réponse

On pose : $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

La **fonction** de **Lagrange** est donnée par :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$= x + y + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

I. Etape 1 : Recherche des candidats

On doit résoudre le système :

$$S : \begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1/2x \\ \lambda = -1/2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Egalité des deux premières équations :

$$\lambda = -1/2x = -1/2y \Rightarrow x = y$$

On remplace dans la 3^{ème} équation :

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{car } x=y \quad \text{et} \quad \lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda = -\frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nous avons donc *deux* candidats :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ avec } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ avec } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Etape 2 : Nature des candidats

Calcul du Hessien de **L** :

$$H_L(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$$

En **développant** suivant la **1^{ère} ligne** par exemple :

On obtient :

$$H_L(x, y, \lambda) = 2\lambda \begin{vmatrix} 2\lambda & 2y \\ 2y & 0 \end{vmatrix} + 2x \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2\lambda & 2y \end{vmatrix}$$

$$= -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2$$

$$= -8\lambda(x^2 + y^2)$$

Ainsi :

$$H_L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2} > 0 :$$

Maximum en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$$H_L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{2} < 0 :$$

Minimum en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

Conclusion

La fonction **f** présente **deux extrêmes** sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$:

Un **Maximum** en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Un **Minimum** en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. Fonction composée

Cas simple

« Une variable »

Exemple

On considère la fonction à deux variables suivante : $f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$

On pose : $F(t) = f(t+1, t^2-2)$

Calculer $F'(t)$

Réponse

1) Méthode directe :

On calcule $F(t)$ puis on dérive :

$$F(t) = f(t+1, t^2-2)$$

$$= 3(t+1)(t^2-2) - (t+1)^2 - (t^2-2)^2$$

$$= -t^4 + 3t^3 + 6t^2 - 8t - 11$$

$$\Rightarrow F'(t) = -4t^3 + 9t^2 + 12t - 8$$

2) Formule de dérivation

On pose : $F(t) = f(u(t), v(t))$

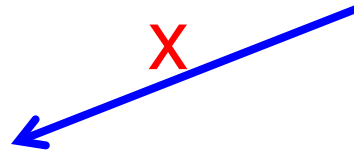
avec $u(t) = t + 1$ et $v(t) = t^2 - 2$

On a alors :

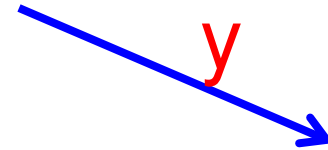
$$F'(t) = f'_x(u(t), v(t)) \times u'(t) + f'_y(u(t), v(t)) \times v'(t)$$

*Cette formule de dérivation fait intervenir
les dérivées partielles de f :*

$$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$$



$$f'_x(x, y) = 3y - 2x$$



$$f'_y(x, y) = 3x - 2y$$

Ainsi :

$$f'_x(u(t), v(t)) = 3v(t) - 2u(t) = 3t^2 - 2t - 8,$$

$$f'_y(u(t), v(t)) = 3u(t) - 2v(t) = -2t^2 + 3t + 7,$$

On applique la formule :

$$F'(t) = f'_x(u(t), v(t)) \times u'(t) + f'_y(u(t), v(t)) \times v'(t)$$

$$= (3t^2 - 2t - 8) \times 1 + (-2t^2 + 3t + 7) \times 2t$$

$$= -4t^3 + 9t^2 + 12t - 8$$

A retenir

On considère la fonction à **une variable** définie par : $F(t) = f(u(t), v(t))$

où **f** est une fonction de **deux variables** notées **x** et **y** : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

On a alors :

$$F'(t) = f'_x(u(t), v(t)) \times u'(t) + f'_y(u(t), v(t)) \times v'(t)$$

« Fin du Cours »
