

Résumé de cours :

Introduction à l'économétrie

www.tifawt.com

Elaboré par : Mr Mohamed EL RHENDOR



Mohamed El Rhendor



mohamed.elrhendor@gmail.com



06 77 45 04 84

Année universitaire : 2018/2019

Résumé de l'économétrie

Le modèle de régression linéaire simple :

1) Le modèle dans la population

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

Avec :

Y_i : Une variable à expliquer, dépendante, endogène, non contrôlable, out put

X_i : Une variable explicative, indépendante, exogène, contrôlable, in put

β_0 : L'ordonnée à l'origine, la constante du modèle

β_1 : La pente, le coefficient directeur

u_i : L'erreur de spécification, le terme aléatoire, perturbation stochastique

➤ Les hypothèses du modèle :

H₁: Le modèle doit être linéaire (sous forme $y = ax + b$)

H₂: Les valeurs X_i sont observées sans erreurs (X_i non aléatoire)

H₃: $E(u_i) = 0$, l'espérance mathématique de l'erreur est nulle

H₄: $V(u_i) = \text{Constante} = \sigma_u^2$, la variance de l'erreur est constante (Homoscédasticité)

H₅: $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, les erreurs suivent une loi normale

H₆: $\text{COV}(u_i, u_j) = 0$, absence d'autocorrelation entre les erreurs

H₇: $\text{COV}(X_i, u_i) = 0$, l'erreur est indépendante de la variable explicative

H₈: $V(X_i) \neq 0$

Remarque : Les valeurs de β_0 , β_1 et u_i sont toujours inconnues, pour les estimer on prend un échantillon de taille n (en utilisant la méthode MCO = OLS)

➤ **MCO** : Moindres carrés ordinaire, c'est une méthode d'estimation consiste à minimiser la somme des carrés des écarts $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ pour ajuster le nuage de points (X_i, Y_i) selon une fonction linéaire

➤ **Fonction déterministe** : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$: Si on donne une valeur à X_i on trouve celle de Y_i directement

➤ **Fonction stochastique** : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$: Si on donne une valeur à X_i , la valeur de Y_i dépend d'une perturbation stochastique

2) Le modèle dans l'échantillon :

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i$$

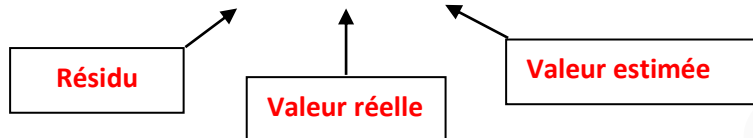
avec :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y}}{\frac{1}{n} \sum X_i^2 - \bar{X}^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \Rightarrow Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$

$$\Rightarrow \hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$$



$$\sum \hat{u}_i = 0$$

$$\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$$

Interprétation :

- $\hat{\beta}_1$: Si le facteur X varie d'une unité, le facteur Y varie de $\hat{\beta}_1$, il s'agit de la mesure de la sensibilité de Y suite à une modification de X d'une unité.
- $\hat{\beta}_0$: Si la variable X est nulle, la variable Y est égale à $\hat{\beta}_0$ en moyenne.

3) Variance de : $\hat{u}_i$, $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$

$$\text{Variance de } \hat{u}_i : V(\hat{u}_i) = \hat{\sigma}_{u_i}^2$$

La variance biaisée :

$$\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}$$

La variance non biaisée :

$$\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2}$$



Remarque : Pour le calcul des autres paramètres on utilise la variance non biaisée

$$\text{Variance de } \hat{\beta}_1 : V(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow \sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\text{Variance de } \hat{\beta}_0 : V(\hat{\beta}_0) = \frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2 \times \sum X_i^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2 \times n} = V(\hat{\beta}_1) \times \frac{\sum X_i^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2 \times \sum X_i^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2 \times n}}$$

4) Test de signification des coefficients β_1 et β_0 :

Il existe 3 méthodes pour tester la significativité des coefficients :

- a) Test de signification (Test de Student)
- b) Intervalle de confiance
- c) Probabilité critique

✓ Pour le paramètre β_1

a) Test de signification (Test de Student) :

Le test de significativité de la pente consiste à vérifier l'influence réelle de l'exogène X sur l'endogène Y avec un niveau de risque α (généralement $\alpha = 5\%$), les hypothèses à confronter s'écrivent :

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

- **1^{ère} étape** : On calcule le ratio de Student t^c (t-calculé) :

$$t^c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \quad \text{Selon l'hypothèse nulle } \beta_1 = 0$$

- **2^{ème} étape** : On détermine t^t (t-tabulé) :

t^t est lu sur la table de Student (unilatéral) à $n-2$ degré de liberté

- **3^{ème} étape** : Règle de décision :

➤ Si : $|t^c| > t^t \Rightarrow$ Interprétation : On rejette H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement non nul c'est à dire la facteur X contribue à l'explication de Y

➤ Si : $|t^c| < t^t \Rightarrow$ Interprétation : On accepte H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement nul c'est à dire la facteur X ne contribue pas à l'explication de Y

b) Intervalle de confiance :

L'intervalle de confiance pour β_1 s'écrit avec un niveau de risque α :

$$IC = [\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \times \sigma_{\hat{\beta}_1} ; \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \times \sigma_{\hat{\beta}_1}]$$

- Si $0 \in IC$: $\Rightarrow$ Interprétation : On accepte H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement nul
c'est à dire la facteur X ne contribue pas à l'explication de Y
- Si $0 \notin IC$: $\Rightarrow$ Interprétation : On rejette H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement non nul c'est à dire la facteur X contribue à l'explication de Y

c) Probabilité critique :

La probabilité critique, noté généralement « p-critique », c'est la probabilité de rejeter H_0 sachant qu'il est vraie

$$P - critique = P(RH_0/Vraie) = P(|t^t| > t^c) \\ = 2P(t^t < t^c)$$

Déterminée à partir de la table (unilatérale) de student à $n - 2$ ddl

- Si $P - critique > \alpha \Rightarrow$ Interprétation : On accepte H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement nul
c'est à dire la facteur X ne contribue pas à l'explication de Y
- Si $P - critique < \alpha \Rightarrow$ Interprétation : On rejette H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement non nul c'est à dire la facteur X contribue à l'explication de Y

✓ Pour le paramètre β_0

Remarque : Pour tester la nullité de coefficient β_0 , il faut suivre les même étapes effectuées pour β_1

$$\begin{cases} H_0: \beta_0 = 0 \\ H_1: \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

Mais les interprétations deviennent :

- On accepte H_0 au seuil de α , β_0 est statistiquement nul donc le modèle est parfait sans β_0
- On rejette H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement non nul donc le modèle est parfait avec β_1

5) Le pouvoir explicatif (La qualité d'ajustement) :

Le coefficient de détermination est l'indicateur qui permet de juger la qualité d'ajustement, Il mesure l'adéquation entre le modèle et les données observées ou encore à quel point l'équation de régression est adaptée pour décrire la distribution des points. Il existe 4 formules pour calculer R^2

$$SCT = SCE + SCR$$

$\sum (Y_i - \bar{Y})^2$

$\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$

$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$

➤ $R^2 = \frac{COV(X,Y)^2}{V(X).V(Y)}$

➤ $R^2 = \frac{SCE}{SCT}$

➤ $R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT}$

➤ $R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$



$0 \leq R^2 \leq 1$

On peut constater que :

➤ $SCE = \hat{\beta}_1^2 \cdot \sum (X_i - \bar{X})^2$

Interprétation de R^2 :

Exemple $R^2 = 0.81 = 81\%$

La variabilité totale de Y est expliquée de 81% par le facteur X et le reste 19% est expliquée par d'autres facteurs inconnus (inobservables)

Examens avec correction

Université Moulay Ismaïl
Faculté Des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Meknès

Session du printemps 2017/18
Filière : SEG, Semestre 6



Elément du module : Méthodes Econométriques
Durée de l'épreuve : 45 mn

N.B : * *Aucun document n'est autorisé sauf les calculatrices non programmables.*
* *Prendre quatre chiffres après la virgule*

* Pour l'ensemble des questions de l'épreuve, on considère que le modèle $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ est linéaire dans les paramètres et le terme aléatoire $u_i \rightarrow N(0; \sigma_u^2)$.

A- Répondre à la question suivante : (4 pts)

1- Dans quel cas le t-Statistique calculé relatif au test sur β_0 et β_1 est négatif? expliquer

B- Exercice (16 pts):

On vous donne les statistiques suivantes :

$$\sum_{i=1}^{28} X_i Y_i = 25879$$

$$\sum_{i=1}^{28} X_i^2 = 18631$$

$$\sum_{i=1}^{28} Y_i^2 = 39747$$

$$\sum_{i=1}^{28} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 3607,375$$

$$\bar{\hat{Y}} = 33,1786$$

$$\bar{X} = 23,0357$$

- 1- Calculer les estimateurs des moindres carrés ordinaires, commenter (4 pts)
- 2- Calculer la variance de β_1 et déduire celle de β_0 (4 pts)
- 3- Peut-on accepter la nullité du coefficient β_1 ? prendre $\alpha = 1\%$ et $t_{(1\%)(26)} = 2,778$ (4 pts)
- 4- Calculer le pouvoir explicatif du modèle. Interpréter (4 pts)

Econométrie

Exercice A :

Le t-statistique calculé est négatif dans le cas :

- pour β_1 : Si les 2 variables X et Y varient dans le sens inverse c-à-d $\widehat{\beta}_1 < 0$
- pour β_0 : lorsque la valeur variable Y est négative quand X est nulle c-à-d $\widehat{\beta}_0 < 0$ (sous l'acceptation de H_0)

Exercice B :

1)

- L'estimateur $\widehat{\beta}_1$:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y}}{\frac{1}{n} \sum X_i^2 - \bar{X}^2}$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2}$$

$$\text{NB : } \bar{Y} = \bar{\bar{Y}}$$

en appliquant la 2ème formule

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{25879 - 28 \times 23,0357 \times 33,1786}{18631 - 28 \times 23,0357^2} = 1.187$$

Interprétation : Si la variable X varie d'une unité, la variable Y varie de 1.187 dans le même sens.

- L'estimateur $\widehat{\beta}_0$:

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X} \quad \widehat{\beta}_0 = 33.1786 - 1.187 \times 23.0357 = 5.8352$$

Interprétation : Si la variable X est nulle, la variable Y est égale à 5.8352

2)

- La variance de $\widehat{\beta}_1$:

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{V(\widehat{u}_i)}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \text{avec} \quad V(\widehat{u}_i) = \frac{\sum (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n-2} \quad \text{et} \quad \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\triangleright V(\widehat{u}_i) = \frac{3607.375}{28-2} = 138.7451$$

$$\triangleright \sum (X_i - \bar{X})^2 = 18631 - 28 \times 23.0357^2 = 3772,9827$$

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{138.7451}{3772.9827} = 0.0367$$

- La variance de $\widehat{\beta}_0$:

$$\begin{aligned} V(\widehat{\beta}_0) &= V(\widehat{\beta}_1) \times \frac{\sum X_i^2}{n} \\ &= 0.0367 \times \frac{18630}{28} = 24.4186 \end{aligned}$$

3)

Soient les deux hypothèses suivantes

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Calculons t^c :

$$t^c = \frac{|\widehat{\beta}_1 - \beta_1|}{\sigma_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{|1.187 - 0|}{0.1915} = 6.1984$$

et $t^t = 2.778$, alors :

$t^c > t^t$ on rejette H_0 au seuil de risque 1% c'est à dire β_1 est statistiquement non nul.

4) Le pouvoir explicatif du modèle est déterminé à partir le R^2

Il y a plusieurs méthodes pour calculer R^2

- $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCE}{SCE+SCR}$

➤ $SCE = \widehat{\beta}_1^2 \times \sum (X_i - \bar{X})^2 = 1.187^2 \times 3772,9827 = 5316.0156$

➤ $SCR = \sum (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 = 3607.375$

➤ $SCT = SCE + SCR = 5316.0156 + 3607.375 = 8923.3906$

$$R^2 = \frac{5316.0156}{8923.3906} = 59.57\%$$

La variabilité totale de Y est expliquée de 59.57% par la variabilité totale de X et le reste (40.43%) par d'autres facteurs inconnus.

Elément du module : Méthodes économétriques
Durée de l'épreuve : 45 mn



N.B : * *Aucun document n'est autorisé sauf les calculatrices non programmables.*

* *Prendre quatre chiffres après la virgule*

* *Pour l'ensemble des questions de l'épreuve, on considère que le modèle*

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ est linéaire dans les paramètres et le terme aléatoire $u_i \rightarrow N(0; \sigma_u^2)$.

Soient deux variables macroéconomiques X et Y observées sur un échantillon de 4 pays de la zone euro.

Pays	Y (en milliers d'euros)	X (en milliers d'euros)
1	2	8
2	4	6
3	6	4
4	4	2

- 1- Calculer les estimateurs $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ par la méthode M.C.O (4 pts)
- 2- Donner la signification économique de $\hat{\beta}_1$ (2 pts)
- 3- Calculer les moyennes conditionnelles estimées $(\hat{Y})$ et vérifier si $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$ (2pts)
- 4- Donner la formulation du test statistique bilatéral relative au coefficient β_1 (2pts)
- 5- Peut-on accepter l'éventuel influence de X sur Y ? Utiliser la question 4 et justifier votre raisonnement. (6 pts)
- 6- Calculer le pouvoir explicatif du modèle et donner son interprétation économique. (4 pts).

Pour la question 5, on vous donne $\alpha = 10\%$, $\sum_{i=1}^4 \hat{u}_i^2 = 4,8$ et le t-théorique tabulé :

$$t_{(\alpha, n-2)}^T = 2,92.$$

Econométrie

1) calculer les estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$ par la méthode M.C.O :

Pays	Y_i	X_i	$Y_i X_i$	X_i^2	$\hat{Y}_i$	X_i^2
1	2	8	16	64	2.8	64
2	4	6	24	36	3.6	36
3	6	4	24	16	4.4	16
4	4	2	8	4	5.2	4
Total	16	20	72	120	16	120

Avec : $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$ $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{16}{4} = 4$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum X_i Y_i - \bar{X} \bar{Y}}{\frac{1}{n} \sum X_i^2 - \bar{X}^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - n \bar{X}^2} \\ &= \frac{72 - 4 \times 5 \times 4}{120 - 4 \times 5^2} = -0.4 \end{aligned}$$

La formule utilisée

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 4 - (-0.4) \times 5 = 6$$

2) La signification économique de $\hat{\beta}_1$:

Si le facteur X vari d'une unité le facteur Y vari de 0.4 dans le sens inverse

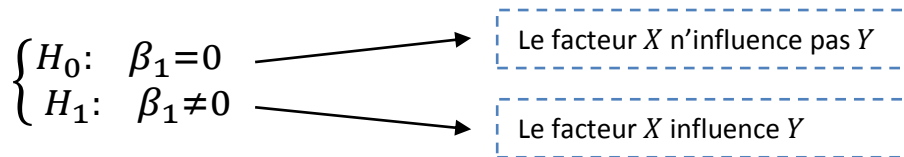
3) Les moyennes conditionnelles $\bar{\hat{Y}}$ sont calculées dans le tableau ci-dessus :

A partir du tableau on a : $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{16}{4} = 4$ et $\bar{\hat{Y}} = \frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{16}{4} = 4$

Donc : $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$

4) Le test de significativité de la pente consiste à vérifier l'influence réelle de l'exogène X sur l'endogène Y avec un niveau de risque $\alpha = 10\%$, les hypothèses à confronter s'écrivent :

$$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$



• **1^{ère} Méthode :**

$$t^c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \quad \text{Selon l'hypothèse nulle } \beta_1 = 0$$

Calculons d'abord $V(\hat{\beta}_1) \Rightarrow V(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow \frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$

➤ La variance résiduelle : $\hat{\sigma}_{u_i}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2} = \frac{4.8}{4-2} = 2.4$

➤ La variance de $\hat{\beta}_1$: $V(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_{u_i}^2}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{2.4}{120 - 4 \times 5^2} = 0.12$

➤ L'écart type de $\hat{\beta}_1$: $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{0.12} = 0.3464$

$$t^c = \frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{-0.4}{0.3464} = -1.1547 \quad \text{Et} \quad t^t = 2.92$$

Alors $|t^c| = 1.1574 < t^t = 2.92$

Interprétation : On accepte H_0 au seuil de α , β_1 est statistiquement nul c'est à dire la facteur X n'influence pas de Y

• **2^{ème} Méthode :**

L'intervalle de confiance pour β_1 s'écrit avec un niveau de risque $\alpha = 10\%$:

$$\begin{aligned}
 IC &= [\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \times \sigma_{\hat{\beta}_1} ; \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \times \sigma_{\hat{\beta}_1}] \\
 &= [-0.4 - 2.92 \times 0.3464 ; -0.4 + 2.92 \times 0.3464] \\
 &= [-1.4114 ; 0.6114]
 \end{aligned}$$

➤ Si $0 \notin IC$: $\Rightarrow$ **Interprétation :** On rejette H_0 au seuil de $\alpha = 10\%$, β_1 est statistiquement non nul c'est à dire la facteur X contribue à l'explication de Y

5) Le pouvoir explicatif du modèle est déterminé à partir le R^2 :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCE}{SCE + SCR}$$

$$\text{➤ } SCE = \widehat{\beta}_1^2 \times \sum (X_i - \bar{X})^2 = (-0.4)^2 \times 20 = 3.2$$

$$\text{➤ } SCR = \sum \widehat{u}_i^2 = 4.8$$

$$\text{➤ } SCT = SCE + SCR = 3.2 + 4.8 = 8$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCE}{SCE + SCR} = \frac{3.2}{8} = 0.4 = 40\%$$

Interprétation : La variabilité totale de Y est expliquée de 40% par le facteur de X et le reste 60% par d'autres facteurs inconnus.

Durée : 45 mn



N.B : * *Aucun document n'est autorisé sauf les calculatrices non programmables.*
* *Prendre quatre chiffres après la virgule*

Pour l'ensemble des questions on considère que le modèle $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ est linéaire dans les paramètres et le terme aléatoire $u_i \rightarrow N(0; \sigma_u^2)$.

1) Quelle est la conséquence de la non-normalité des résidus sur les intervalles de confiance des paramètres β_0 et β_1 . (Maximum 5 lignes) (4 pts)

2) Les résultats d'estimation du modèle ci-dessus par la méthode O.L.S et d'autres informations complémentaires sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{Y}_i = 2,536 + 0,137X_i \\ \text{La somme des carrés expliquée : SCE} = 2,146 \\ \text{La somme des carrés résiduelle : SCR} = 2,806 \\ \text{t - Student étant défini à une probabilité } \alpha = 1\% \text{ et 10 degrés de liberté est de } 3,169 \\ \text{La taille de l'échantillon est } n = 12 \end{array} \right.$$

2.1 Donnez la signification économique de $\hat{\beta}_1 = 0,137$; (2 pts)

2.2 Calculer l'estimation sans biais de la variance des résidus ; (2 pts)

2.3 Calculez l'écart type de l'estimateur $\hat{\beta}_1$ (3 pts)

2.4 Calculez l'intervalle de confiance du paramètre β_1 à un niveau de confiance de 99%. (3 pts)

2.5 Peut-on rejeter l'éventuelle influence du facteur X sur Y. Utilisez la question 2.4. (3 pts)

2.6 Calculez le pouvoir explicatif du modèle et donner son interprétation économique. (3 pts).

Econométrie

Exercice 1 :

Dans le modèle de régression linéaire simple, l'hypothèse de la normalité des résidus permet de fonder les tests statistiques et les intervalles de confiance, alors si les résidus ne suivent pas une loi normale on peut pas élaborer les intervalles de confiance relatifs aux coefficients, car la statistique $t = \frac{\hat{\beta}}{\sigma_{\hat{\beta}}}$ suit une loi student qui est exprimé par un rapport entre une loi normale et une loi de Khi-2

Exercice 2 :

$$\widehat{Y}_i = 2.536 + 0.137X_i$$

$\widehat{\beta}_0$ $\widehat{\beta}_1$

$$SCE = \sum_{i=0}^{12} (\widehat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 2.146 \quad \text{et} \quad SCR = \sum_{i=0}^{12} (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 = 2.806$$

2.1) L'interprétation économique de $\widehat{\beta}_1=0.137$

Si le facteur X varie d'une unité, le facteur Y varie de 0.137 dans le même sens (car $\widehat{\beta}_1 > 0$), il s'agit de la mesure de la sensibilité de Y suite à une modification de X d'une unité

2.2) L'estimation sans biais de la variance des résidus

$$V(\widehat{u}_i) = \frac{\sum_{i=0}^{12} (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n - 2}$$

$$= \frac{2.806}{12-2} = 0.2806$$

Rappel

La variance biaisée :

$$V(\widehat{u}_i) = \frac{\sum_{i=0}^n (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n}$$

La variance non biaisée :

$$V(\widehat{u}_i) = \frac{\sum_{i=0}^n (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n - 2}$$

2.3) L'écart type de $\widehat{\beta}_1$:

Calculons la variance de $\widehat{\beta}_1$:

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{V(\widehat{u}_i)}{\sum_{i=0}^{12} (X_i - \bar{X})^2}$$

On détermine $\sum_{i=0}^{12} (X_i - \bar{X})^2 = ?$

On sait que $SCE = \widehat{\beta}_1^2 \times \sum_{i=0}^{12} (X_i - \bar{X})^2$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{12} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{SCE}{\widehat{\beta}_1^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{12} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{2.146}{0.137^2} = 114.33$$

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{0.2806}{114.33} = 0.0045$$

Alors l'écart type de $\widehat{\beta}_1$ $\sigma_{\widehat{\beta}_1} = \sqrt{0.0045} = 0.06$

Rappel

La variance de $\widehat{\beta}_1$:

$$V(\widehat{\beta}_1) = \frac{V(\widehat{u}_i)}{\sum_{i=0}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

La variance de $\widehat{\beta}_0$:

$$V(\widehat{\beta}_0) = \frac{\sum_{i=0}^n X_i^2 \times V(\widehat{u}_i)}{n \times \sum_{i=0}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

2.4) L'intervalle de confiance pour β_1 au niveau de 99% s'écrit :

$t_{\alpha/2}$: t student tabulé

$$IC_{\beta_1} = [\widehat{\beta}_1 - t_{\alpha/2} \times \sigma_{\widehat{\beta}_1} ; \widehat{\beta}_1 + t_{\alpha/2} \times \sigma_{\widehat{\beta}_1}]$$

$$IC_{\beta_1} = [0.137 - 3.169 \times 0.06 ; 0.137 + 3.169 \times 0.06]$$

$$IC_{\beta_1} = [-0.05314 ; 0.32714]$$

2.5) soient les deux d'hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0: \beta_1=0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Le facteur X n'influence pas le facteur Y

Le facteur X influence le facteur Y

Puisque $0 \in IC_{\beta_1}$ donc on accepte H_0 (l'hypothèses de nullité du coefficient β_1) c'est-à-dire le facteur X ne contribue pas à l'explication de Y

2.6) Le pouvoir explicatif du modèle est déterminé à partir le R^2

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCE}{SCE + SCR} \\ &= \frac{2.146}{2.146 + 2.806} = 0.4333 \Rightarrow R^2 = 43.33\% \end{aligned}$$

La variabilité totale de Y est expliquée de 43.33 par la variabilité totale de X et le reste (56.67%) par d'autres facteurs non observables