Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales – Fès
Semestre 5 – Parcours Gestion – Section B
AU 2019-2020

Pr. Kh. BENMLIH

ELEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHES ET APPLICATIONS

(en bref)

Bibliographie (succinte) :

[1] F. Droesbeke, M. Hallin & Cl. Lefevre, *Les graphes par l'exemple*, Ed. Ellipses, 2001.

[2] Ch. Goujet & C. Nicolas, *Mathématiques appliquées à la gestion*, Ed. Elsevier Masson, 4e Ed, 1989.

I. Quelques notions de base

I.1 Définitions et représentations

I.1.1 Principales définitions

- Un graphe orienté $G = (X, U)$ est la donnée de deux ensembles :
  - Un ensemble $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés *sommets*;
  - Un sous-ensemble $U \subset X \times X$ noté $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ dont les éléments sont appelés *arcs*.
- Pour un arc $u = (x_i, x_j)$, le sommet x_i s'appelle extrémité initiale (ou origine) et x_j son extrémité finale (ou destination).
- Dans l'arc (x_i, x_j), on dit que le sommet x_j est un successeur de x_i. On dit aussi que le sommet x_i est un prédecesseur de x_j .
- Lorsque $x_i = x_j$, l'arc (x_i, x_i) s'appelle une *boucle*.
- Un arc privé de son orientation s'appelle *une arête*.
- Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont joints par un arc (ou une arête), et deux arcs sont dits adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune.
- Un *sous-graphe* est obtenu par suppression d'un certain nombre de sommets (et par conséquent de tous les arcs qui leur sont liés).
- Un *graphe partiel* est obtenu par suppression d'un certain nombre d'arcs.

I.1.2 Modes de représentation d'un graphe

a) Représentation par dictionnaire (liste) : Il s'agit d'un tableau à entrée simple où chaque ligne correspond à un sommet et comporte la liste de ses prédecesseurs (*dictionnaire des prédecesseurs*) ou de ses successeurs (*dictionnaire des successeurs*).

Exemple 1 :

b) Représentation sagittale :

c) Représentation par la matrice d'adjacence : Considérons un graphe $G = (X, U)$ contenant n sommets. La matrice d'adjacence (ou matrice booléenne) est une matrice carrée d'ordre n de terme général :

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ a_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Reprendre l'exemple précédent :

I.2 Chemins dans un graphe orienté

- Un chemin est une succession d'arcs adjacents de même sens.
- Un circuit est un chemin fermé dans le sens où les deux extrémités initiale et finale sont confondues.
- Un chemin est dit de longueur $p \in \mathbb{N}^*$ s'il est constitué de p arcs distincts.

II. Recherche de chemin optimal

Soit $G = (X, U)$ un graphe valué où à chaque arc $a \in U$ on associe une longueur $l(a)$. Cette longueur peut représenter une durée de parcours, un bénéfice de transport, ... etc

Le problème du plus court chemin (respectivement du plus long chemin) entre les sommets i et j consiste à trouver un chemin $\mu(i,j)$ dont la longueur $l(\mu) = \sum_{a \in \mu(i,j)} l(a)$ est minimale (respectivement maximale).

Remarque *Nous supposons que dans le cas de recherche de chemin de longueur minimale (respectivement maximale), le graphe ne contient aucun circuit de longueur strictement négative (respectivement strict. négative). Sinon, l'étude est sans objet.*

II.1 Principe d'optimalité

THÉORÈME. — *Tout sous-chemin d'un plus court chemin (respectivement d'un plus long chemin) est un chemin de longueur minimale (respectivement maximale).*

II.2 Recherche du plus court chemin à origine unique dans un graphe sans boucle et sans circuit

Lorsqu'on cherche un plus court chemin d'un sommet fixé x_1 à tous les autres sommets du graphe, plusieurs algorithmes peuvent être appliqués (algorithme de Bellman-Ford, algorithme de Dijkstra, $\cdots$) selon les propriétés et la nature du graphe. Le principe de ces algorithmes étant d'affecter à chaque sommet x_i une marque m_i. En fin d'algorithme, cette marque représente la longueur d'un plus court chemin de l'origine x_1 au sommet considéré x_i.

Algorithme de Bellman-Ford (sans circuit, de longueurs quelconques) (1958)

Lorsque le graphe est sans circuit, on peut appliquer *l'algorithme de Bellman-Ford* consistant à affecter une marque à chaque sommet du graphe ordonné en niveaux.

a) *Décomposition en niveaux du graphe.*

DÉFINITION. — *On appelle niveau d'un sommet x_i la longueur maximale au sens des arcs allant de l'origine vers ce sommet.*

Procédure de détermination des niveaux

* L'ensemble du niveau 0 est donné par $N_0 = \{x \in X / P(x) = \emptyset\}$;

* D'un niveau à un autre immédiatement supérieur, on a $N_i = \{x \in X \setminus N_{i-1} \,/\, P(x) = \emptyset\}$;

* S'arrêter lorsque $\bigcup_i N_i = X$. (Autrement dit, les niveaux de tous les sommets du graphe sont déterminés)

Remarque *Si à une quelconque étape $k \geq 0$ on trouve que $N_k = \emptyset$, cela signifie que le graphe contient au moins un circuit.*

Le graphe ordonné en niveaux est représenté dans l'ordre croissant des niveaux des différents sommets. Lorsque l'origine n'est pas l'unique sommet de niveau 0, la suite de l'étude portera sur le **sous-graphe** obtenu en éliminant tous les autres sommets de niveaux inférieurs ou égaux à celui de l'origine. Une fois la marque de l'extrémité finale est déterminée, on arrête la procédure.

b) *Détermination des marques* :

* Pour l'origine x_1 (de niveau 0), on pose $m(x_1) = 0$

* D'un niveau à un autre immédiatement supérieur, on pose :

$$m(x_i) = \min\{m(x_j) + l(x_j, x_i)\,;\, x_j \in P(x_i)\}$$

Remarque *Dans le cas de la recherche d'un plus long chemin, on procède de la même manière en utilisant dans l'algorithme l'opération* "max" *au lieu de* "min".

c) *Identification d'un chemin de valeur optimale allant de x_1 à x_n* :

* On affecte à chaque sommet x_j sa marque définitive m_j.

* On pose $x_p = x_n$ et on cherche les sommets $x_j \in \Gamma^{-1}(x_p)$ vérifiant $m_j = m_p - l(x_j, x_p)$.

* Pour chaque chemin identifié, s'arrêter lorsque x_1 est atteint.

Exemple :

III. Problèmes d'ordonnancement

III.1 Introduction

L'objectif est d'ordonner dans le temps un ensemble d'opérations contribuant à la réalisation d'un même projet (construction d'un bâtiment, lancement d'un produit, ... etc).

Le déroulement de ces diverses tâches doit respecter certaines contraintes de type :

- contrainte de succession stricte,

- contrainte de date.

Il s'agit donc de minimiser la durée totale de réalisation du projet compte tenu des durées nécessaires à la réalisation de chaque opération et des contraintes qu'elles doivent respecter.

Le problème ainsi posé peut être schématisé sous forme d'un graphe sans circuit selon deux modes :

- la méthode M.P.M. (Méthode des potentiels Metra), appelée également méthode graphe-tâches ;
- la méthode PERT (Programm Evaluation Research Task), appelée également méthode graphe-étapes.

Exemple : Les opérations mises en jeu dans la construction d'un ensemble hydro-électrique sont notées par les lettres $a, b, \cdots, i$. On suppose que toutes les contraintes sont de type contraintes de succession. Les données du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Opération	Désignation	Durée (mois)	Opérations prérequises
Construction des voies d'accès	a	4	–
Travaux des terrassemets	b	6	a
Construction des bâtiments administratifs	c	4	–
Commande du matériel électrique	d	12	–
Construction de la centrale	e	10	b ; c ; d
Construction du barrage	f	24	b ; c
Installation des galeries et conduites forcées	g	7	a
Montage des machines	h	10	e ; g
Essais de fonctionnement	i	3	f; h

TAF :

- Durée minimale d'excecution du projet ?
- Calendrier de début d'excecution (au plus tôt et au plus tard) des différentes tâches ?
- Chemin critique ?

III.2 Méthode MPM

1. Principe :

Le graphe pour ce mode de représentation est construit comme suit :

- Chaque tâche x_i est représentée par un sommet i.
- Toute relation d'antériorité immédiate est représentée par un arc.
- La longueur $l(i,j)$ d'un arc (i,j) est égale à la durée minimale qui doit s'écouler entre le début de la tâche x_i et le début de la tâche x_j. Lorsque les contraintes sont uniquement de type "succession stricte", cette longueur est égale à la durée de la tâche origine x_i.

2. Construction du graphe MPM

- Le graphe MPM est ordonné par niveaux (graphe sans circuit).
- Chaque sommet sera représenté par un rectangle de type : où

  x : désigne la tâche ;

T_x : désigne la date de début au plus tôt de la tâche x ;

T_x^* : désigne la date de début au plus tard de la tâche x.

• On introduit à la fin un sommet représentant une tâche fin (notée souvent par la lettre z) auquel seront reliés tous les sommets qui n'ont pas de successeurs. Cette tâche permettra de dater la fin des travaux.

3. Détermination du calendrier au plus tôt (T_x)

• Pour les sommets x de niveau 0 : on pose $T_x = 0$.

• Pour les sommets de niveaux supérieurs : on pose T_x = longueur du chemin le plus long allant d'un sommet de niveau 0 à ce sommet. Autrement dit : $T_x = \text{Max}\ \{T_y + l(y,x)\, ;\, y \in P(x)\}$.

Par conséquent, **la durée minimale de réalisation du projet est** T_z où z désigne la tâche finale.

4. Détermination du chemin critique

Le chemin critique est le chemin le plus long allant d'un sommet de niveau 0 au sommet final z.

Tout retard observé sur l'exécution de l'une des tâches situées sur le chemin critique retardera la date à laquelle peut s'achever au plus tôt l'ensemble des travaux du projet.

5. Détermination du calendrier au plus tard (T_x^*)

• Procédure :

- On pose $T_z^* = T_z$
- D'un niveau à un autre inférieur, on pose $T_x^* = \text{Min}\ \{T_y^* - l(x,y)\, ;\, y \in S(x)\}$.

• La marge totale d'une tâche : C'est le retard maximum que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche, sans remettre en cause la date de la fin des travaux. Elle est donc égale à $(T_x^* - T_x)$.

III.3 Méthode PERT

1. Principe :

Le graphe pour ce mode de représentation est construit comme suit :

• Chaque tâche x est représentée par un arc (i,j) dont la longueur est égale à la durée de la tâche.

• Chaque sommet du graphe est une étape signifiant que :

- toutes les tâches qui arrivent sont achevées,
- toutes les tâches qui partent peuvent commencer.

Remarque : La représentation de certaines relations d'antériorité nécessite l'introduction de certaines tâches *fictives* de durée 0.

Exemple 1 :

Exemple 2 :

2. Construction du graphe PERT

• La décomposition en niveaux n'est pas demandée puisque les sommets ne correspondent pas aux tâches.

• Chaque sommet sera représenté par un cercle de type : où

x : désigne le numéro de l'étape ;

t_x : désigne la date attendue de l'étape x ;

t_x^* : désigne la date limite de l'étape x.

• On introduit un sommet initial d'où partent toutes les tâches sans contrainte d'antériorité ; et un sommet final auquel arrivent toutes les tâches sans suivantes. Ce sommet permettra de dater la fin des travaux.

3. Détermination du calendrier au plus tôt

• Pour le sommet initial $n°1$, on pose $t_1 = 0$.

• Pour les sommets x suivants : $t_x =$ longueur du chemin le plus long allant d'un sommet 1 au sommet x. c'est la date attendue de de létape x ; elle est égale à la date de début au plus tôt de toutes les tâches qui partent de x.

Donc, si une tâche K est représentée par un arc (i, j), alors la date de début au plus tôt pour cette tâche est $T_K = t_i$.

4. Détermination du chemin critique

Même procédure que dans la méthode MPM.

5. Détermination du calendrier au plus tard

• Procédure :

- Pour le sommet final z, on pose $t_z^* = t_z$

- pour les autres sommets, on procède de la même manière que pour le calcul des T_x^* dans la méthode MPM.

- La date de début au plus tard pour la tâche K, représentée par l'arc (i, j), de durée d_K est $T_K^* = t_j^* - d_K$.

• La marge totale d'une tâche K est donnée par $(T_K^* - T_K)$.