



Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Semestre : S1

Module : M 3 (Introduction aux sciences économiques)

Instruments d'analyse économique

Fascicule de cours

Notes du cours

Salma DASSER

Dernière mise à jour
Juin 2010

CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE LOGIQUE ET LANGAGE ENSEMBLISTE

I- Quelques éléments de logique	2
I-1 Connecteurs	2
I-1-1 Equivalence.....	2
I-1-2 Négation.....	2
I-1-3 Conjonction et disjonction	3
I-1-4 Implication.....	5
I-2 Quantificateurs	6
I-2-1 Quantificateur existentiel.....	6
I-2-2 Quantificateur universel.....	7
I-2-3 Ordre d'écriture dans une phrase avec quantificateurs.....	7
I-2-4 Négation d'une phrase avec quantificateurs	7
I-3 Introduction à la démonstration	8
I-3-1 Démonstration par la contraposée.....	8
I-3-2 Démonstration par l'absurde	8
I-3-3 Démonstration par récurrence	8
II- Ensembles	9
II-1 Notion d'ensemble.....	9
II-1-1 Appartenance à un ensemble	9
II-1-2 Ensemble vide	9
II-1-3 Ensemble fini, infini	9
II-2 Écriture d'un ensemble	9
II-2-1 Écriture en extension	9
II-2-2 Écriture en compréhension	9
II-3 Inclusion et égalité	10
II-3-1 Inclusion	10
II-3-2 Égalité.....	10
II-3-3 Ensemble fini.....	10
II-4 Ensembles de parties d'un ensemble	11
II-5 Réunion et intersection	11
II-5-1 Réunion	11
II-5-2 Intersection	12
II-5-3 Distributivité.....	13
II-5-4 Ensemble fini.....	13
II-6 Complémentaire et partition d'un ensemble	14
II-6-1 Complémentaire	14
II-6-2 Partition d'un ensemble	14
II-7 Différence et différence symétrique	15
II-7-1 Différence	15
II-7-2 Différence symétrique	15
II-8 Produit d'ensembles.....	16
II-8-1 Définition.....	16
II-8-2 Propriétés.....	16
II-8-3 Généralisation :	16

I- Quelques éléments de logique

I-1 Connecteurs

- ❖ Une proposition mathématique P est une phrase formelle qui est soit vraie, soit fausse :
 - ↳ Lorsque P est une proposition vraie, on lui attribue la valeur logique 1 ou V .
 - ↳ Lorsque P est une proposition fausse, on lui attribue la valeur logique 0 ou F .
- ❖ A partir de propositions données, on peut en former d'autres à l'aide de signes logiques qu'on appelle connecteurs logiques. Dans ce paragraphe, on va étudier les différents types de ces connecteurs.

I-1-1 Equivalence

- ❖ Deux propositions P et Q sont dites équivalentes si elles ont la même valeur logique : elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses. On note par $P \Leftrightarrow Q$ ou par $Q \Leftrightarrow P$.
- ❖ La proposition $P \Leftrightarrow Q$ (ou $Q \Leftrightarrow P$) est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

a) Tableau de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

I-1-2 Négation

- ❖ La négation d'une proposition P c'est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On note $\text{non}P$ ou $\bar{P}$.

a) Négation de la négation :

$$(\text{non}(\text{non}(P))) \Leftrightarrow (P)$$

b) Tableau de vérité :

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

I-1-3 Conjonction et disjonction

a) Conjonction

- ❖ La conjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies et fausse si l'une des deux propositions P et Q est fausse (les deux propositions peuvent être fausses). On note $(P \text{ et } Q)$.

b) Disjonction

- ❖ La disjonction de deux propositions P et Q c'est la proposition qui est vraie si l'une des deux propositions P et Q est vraie (les deux propositions peuvent être vraies) et fausse si les deux propositions P et Q sont simultanément fausses. On note $(P \text{ ou } Q)$.

c) Tableaux de vérité :

P	Q	$(P \text{ et } Q)$	$(P \text{ ou } Q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

d) Propriétés

i) Commutativité :

$$\begin{cases} (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P) \\ (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P) \end{cases}$$

ii) Loi de Morgan :

$$\Downarrow \quad (\text{non}(P \text{ ou } Q)) \Leftrightarrow (\text{non}P \text{ et } \text{non}Q)$$

P	Q	$\text{non}P$	$\text{non}Q$	$P \text{ ou } Q$	$\text{non}(P \text{ ou } Q)$	$(\text{non}P) \text{ et } (\text{non}Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

$$\Rightarrow (\text{non}(P \text{ et } Q)) \Leftrightarrow (\text{non}P \text{ ou } \text{non}Q)$$

P	Q	$\text{non}P$	$\text{non}Q$	$P \text{ et } Q$	$\text{non}(P \text{ et } Q)$	$(\text{non}P) \text{ ou } (\text{non}Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

iii) Distributivité :

Distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$

P	Q	R	$Q \text{ ou } R$	$P \text{ et } Q$	$P \text{ et } R$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$	$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$

P	Q	R	$Q \text{ et } R$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ ou } R$	$(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$	$P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

I-1-4 Implication

a) Définition

- ❖ Le sens d'une phrase formelle ($P \Rightarrow Q$) qu'on lit P implique Q est le suivant : Si la proposition P est vraie alors il en est de même pour la proposition Q .
- ❖ ($P \Rightarrow Q$) ne suppose pas que la proposition P est vraie, mais :
 - ↳ Si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie.
 - ↳ Si la proposition P est fausse, la proposition Q peut être vraie ou fausse.
- ❖ D'où : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}P \text{ ou } Q)$

b) Tableau de vérité :

P	Q	$\text{non}P$	$(\text{non}P \text{ ou } Q)$	$(P \Rightarrow Q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

c) Transitivité d'une implication

- ❖ Si ($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow R$) alors ($P \Rightarrow R$)

d) Réciproque d'une implication

- ❖ La réciproque de la proposition ($P \Rightarrow Q$) c'est la proposition ($Q \Rightarrow P$).
- ❖ Une proposition ($P \Rightarrow Q$) et sa réciproque ($Q \Rightarrow P$) n'ont pas nécessairement la même valeur logique.

e) Contraposée d'une implication

- ❖ La contraposée de la proposition ($P \Rightarrow Q$) c'est la proposition ($\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$).
- ❖ Une proposition ($P \Rightarrow Q$) et sa contraposée ($\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$) sont équivalentes (ont toujours la même valeur logique) : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$

f) Condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS)

- ❖ La phrase formelle ($P \Rightarrow Q$) signifie que si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie :
 - ↳ Il suffit alors que P soit vraie pour que Q soit vraie.
 - ↳ On dit que P est une condition suffisante (CS) pour Q .
- ❖ La phrase formelle ($P \Rightarrow Q$) équivalente à ($\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$) signifie que si la proposition Q est fausse ($\text{non}Q$ est vraie) alors la proposition P est fausse (puisque $\text{non}P$ est vraie) :
 - ↳ Pour que P soit vraie il faut alors que Q soit vraie.
 - ↳ On dit que Q est une condition nécessaire (CN) pour P .

g) Equivalence et implication

- ❖ Les deux propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$ sont équivalentes.
 - ↪ P est alors une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour Q
 - ↪ Q est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour P .
 - ↪ Transitivité de l'équivalence : Si $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$ alors $(P \Leftrightarrow R)$

h) Tableau de vérité :

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow P)$	$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$	$(P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

I-2 Quantificateurs

- Les quantificateurs sont les signes qui expriment dans le langage mathématique la quantification, c.à.d. la quantité d'objets (aucun, tous, certains) pour les quels une proposition est vraie.

I-2-1 Quantificateur existentiel

$\exists x \in E / P(x)$: Se lit il existe au moins un x dans E tel que $P(x)$

- Cette phrase formelle signifie qu'il y a au moins un x dans E qui vérifie la propriété (P) (Il peut y avoir plusieurs).
- S'il n'y a qu'un seul x dans E qui vérifie (P) , on écrit $\exists! x \in E / P(x)$ et on lit il existe un unique x dans E tel que $P(x)$.
- Les expressions $(\exists x \in E / P(x))$ et $(\exists y \in E / P(y))$ signifient exactement la même chose. x et y sont des variables muettes.

I-2-2 Quantificateur universel

$\forall x \in E, P(x)$: Se lit pour tout x de E , on a $P(x)$

- Cette phrase formelle signifie que tous les x de E vérifient la propriété (P).
- Les expressions $(\forall x \in E, P(x))$ et $(\forall y \in E, P(y))$ signifient exactement la même chose. x et y sont des variables muettes.

I-2-3 Ordre d'écriture dans une phrase avec quantificateurs

- L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle :
 - ↪ Quand on écrit $(\forall x \in E), (\exists y \in F) / P(x, y)$, cela veut dire que pour chaque x dans E , il y a un y dans F qui dépend de ce x tel que $P(x, y)$
 - ↪ Quand on écrit $(\exists y \in F) / (\forall x \in E), P(x, y)$, cela veut dire que il y a un y dans F , le même pour tous les x de E , tel que $P(x, y)$.

I-2-4 Négation d'une phrase avec quantificateurs

- **Négation d'une phrase formelle**
 - ↪ avec quantificateur universel : $(\text{Non}(\forall x \in E, P(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E / \text{non}P(x))$
 - ↪ avec quantificateur existentiel : $(\text{Non}(\exists x \in E, P(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E / \text{non}P(x))$
- En général, pour nier une phrase formelle qui comporte plusieurs quantificateurs :
 - ↪ On commence par écrire la phrase formelle tout en respectant l'ordre d'écriture des quantificateurs.
 - ↪ On change le quantificateur $\forall$ en $\exists$ et le quantificateur $\exists$ en $\forall$.
 - ↪ On remplace la propriété P par sa négation $\text{non}P$

I-3 Introduction à la démonstration

I-3-1 Démonstration par la contraposée

- Parfois, il n'est pas simple de démontrer que $P \Rightarrow Q$ par une méthode directe. Dans ce cas, il convient d'utiliser la méthode de contraposée, qui revient à démontrer la contraposée de la proposition $P \Rightarrow Q$, soit $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$ ($(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P)$). Pour cela, on suppose que la proposition $\text{non}Q$ est vraie et on montre que la proposition $\text{non}P$ est vraie.

I-3-2 Démonstration par l'absurde

- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ par l'absurde revient à considérer les propriétés P et $\text{non}Q$ comme hypothèses et d'aboutir à une contradiction : On suppose que les propositions P et $\text{non}Q$ sont vraies et on trouve une conclusion impossible, par exemple, de type $(R \text{ et } \text{non}R)$.

I-3-3 Démonstration par récurrence

- C'est une démonstration propre aux propositions répétitives, de type : $P(n), n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$), qui se fait en deux étapes :
 - ↳ 1^{ère} étape : consiste à vérifier que la proposition est vraie pour le premier ordre : $P(n_0)$ est vraie
 - ↳ 2^{ème} étape : consiste à montrer que si $P(n)$ est vraie alors il en est de même pour $P(n+1)$.
 - ↗ $P(n)$ c'est l'hypothèse de récurrence.
 - ↗ $P(n+1)$ c'est la conclusion de récurrence.

Remarque :

- Supposer que $P(n)$ est vraie est équivalent à supposer que $P(m)$ est vraie pour tout $m \leq n$.

II- Ensembles

II-1 Notion d'ensemble

Définition :

- Un ensemble peut être défini comme une collection d'objets, dits éléments de cet ensemble.

Exemples :

- ↪ $\mathbb{N}$ c'est l'ensemble des entiers naturels et tout entier naturel est un élément de $\mathbb{N}$.
- ↪ $\mathbb{R}$ c'est l'ensemble des réels et les nombres réels sont les éléments de $\mathbb{R}$.
- ↪ Une droite c'est un ensemble de points et ses points sont les éléments d'une droite.

II-1-1 Appartenance à un ensemble

- Si x est un élément d'un ensemble E , on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.
- Sinon, on dit que x n'appartient pas à E et on note $x \notin E$.

II-1-2 Ensemble vide

- C'est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

II-1-3 Ensemble fini, infini

- ↪ Si E est un ensemble constitué d'un nombre fini n d'éléments alors E est dit ensemble fini. Ce nombre n s'appelle le cardinal de l'ensemble E . On note $\text{card}(E) = n$.
- ↪ Sinon, on dit que E est un ensemble infini.

II-2 Écriture d'un ensemble

- Il y a deux manières d'écrire un ensemble :

II-2-1 Écriture en extension

- ↪ Quand on énumère les éléments d'un ensemble E , on dit qu'on a défini ou écrit l'ensemble E en extension.
- ↪ Cette définition n'est pas toujours utilisable : on ne peut pas toujours énumérer les éléments d'un ensemble.

II-2-2 Écriture en compréhension

- ↪ Quand on caractérise les éléments d'un ensemble E par une ou plusieurs propriétés, on dit qu'on a écrit ou défini l'ensemble E par compréhension.
- ↪ C'est l'écriture des ensembles la plus utilisée.

II-3 Inclusion et égalité

II-3-1 Inclusion

a) Définition :

- ⇒ Si tout élément d'un ensemble F appartient à un ensemble E , on dit que l'ensemble F est inclus dans l'ensemble E . On dit aussi que F est un sous ensemble ou partie de E :
- ⇒ On dit qu'on a une inclusion large si l'ensemble F peut être égal à l'ensemble E . On note $F \subseteq E$: $F \subseteq E \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \in E)$.
- ⇒ Sinon, on dit qu'on a une inclusion stricte. On note $F \subset E$.
- ⇒ Un ensemble F n'est pas inclus dans un ensemble E s'il existe au moins un élément de F qui n'appartient pas à E . On note $F \not\subseteq E$: $(F \not\subseteq E) \Leftrightarrow (\exists x \in F / x \notin E)$

b) Propriétés

- ⇒ Tout ensemble E est inclus dans lui-même : $E \subseteq E$
- ⇒ L'ensemble vide est inclus tout ensemble E : $\emptyset \subseteq E$
- ⇒ Si E, F et G sont trois ensembles, alors : $((E \subseteq F) \text{ et } (F \subseteq G)) \Rightarrow (E \subseteq G)$

II-3-2 Égalité

- Deux ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments. On note $E \equiv F$ ou simplement $E = F$: $(E \equiv F) \Leftrightarrow ((E \subseteq F) \text{ et } (F \subseteq E))$

II-3-3 Ensemble fini

- Si E et F sont deux ensembles finis alors:
 - ⇒ $E \subseteq F \Rightarrow \text{card}(E) \leq \text{card}(F)$
 - ⇒ $(E \subseteq F \text{ et } \text{card}(E) = \text{card}(F)) \Rightarrow E \equiv F$

II-4 Ensembles de parties d'un ensemble

- L'ensemble de parties d'un ensemble E , qu'on note $P(E)$, c'est l'ensemble de tous les sous ensembles de E .
- Les éléments de $P(E)$ sont les sous ensembles de E : $P(E) = \{F / F \subseteq E\}$

Remarques :

- Si x est un élément d'un ensemble E , alors il faut distinguer entre les différentes écritures :

- ↪ $x \in E$: x est un élément de E .
- ↪ $\{x\} \subset E$: $\{x\}$ est un sous ensemble de E , appelé singleton.
- ↪ $\{x\} \in P(E)$: $\{x\}$ est un élément de $P(E)$.
- ↪ $x \in \{x\}$: x est un élément du singleton $\{x\}$.

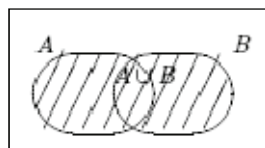
- Si E est un ensemble fini, $\text{card}(E) = n$, alors : $\text{card}(P(E)) = 2^n$

II-5 Réunion et intersection

II-5-1 Réunion

a) Définition

- ↪ La réunion de deux ensembles E et F c'est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles E et F .
- ↪ On note $E \cup F$: $E \cup F = \{x / x \in E \text{ ou } x \in F\}$:
 $x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F) \text{ ou } (x \notin E \text{ et } x \in F) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin F)$
- ↪ Par négation, on a : $x \notin E \cup F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ et } x \notin F)$



b) Propriétés

i) Le plus petit ensemble qui contienne à la fois les éléments de E et de F :

- $[(A \subset A \cup B) \text{ et } (B \subset A \cup B)]$ et $[(A \subset C \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C]$

ii) Idempotence :

- Soit E un ensemble : $E \cup E = E$

iii) Commutativité :

➤ Soient E et F deux ensembles : $E \cup F = F \cup E$

iv) Associativité :

➤ Soient E , F et G trois ensembles : $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$

➤ On note alors par $E \cup F \cup G$: $E \cup F \cup G = \{x / x \in E \text{ ou } x \in F \text{ ou } x \in G\}$

c) Généralisation :

➤ Soient $E_1, \dots, E_n$ n ensembles : $E_1 \cup \dots \cup E_n = \{x / x \in E_1 \text{ ou } \dots \text{ ou } x \in E_n\}$

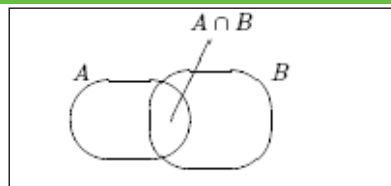
II-5-2 Intersection**a) Définition**

↪ L'intersection de deux ensembles E et F c'est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles E et F .

↪ On note $E \cap F$: $E \cap F = \{x / x \in E \text{ et } x \in F\}$;

↪ Par négation, on a : $x \notin E \cap F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ ou } x \notin F)$

$$x \notin E \cap F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \notin E \text{ et } x \in F) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin F)$$

**b) Propriétés****i) Le plus grand ensemble qui est contenu à la fois dans E et F :**

➤ $[(A \cap B \subset A) \text{ et } (A \cap B \subset B)]$ et $[(C \subset A \text{ et } C \subset B) \Rightarrow C \subset A \cap B]$

ii) Idempotence :

➤ Soit E un ensemble : $E \cap E = E$

iii) Commutativité :

➤ Soient E et F deux ensembles : $E \cap F = F \cap E$

iv) Associativité :

➤ Soient E , F et G trois ensembles : $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$

➤ On note alors par $E \cap F \cap G$: $E \cap F \cap G = \{x / x \in E \text{ et } x \in F \text{ et } x \in G\}$

c) Généralisation :

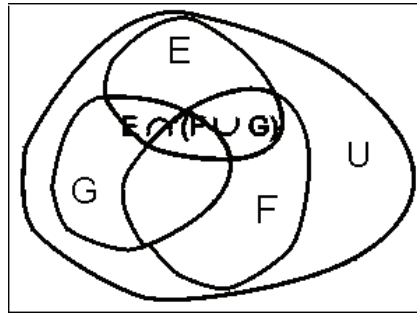
➤ Soient $E_1, \dots, E_n$ n ensembles : $E_1 \cap \dots \cap E_n = \{x / x \in E_1 \text{ et } \dots \text{ et } x \in E_n\}$

II-5-3 Distributivité

a) Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion

Conséquence de la distributivité de la conjonction par rapport à la disjonction

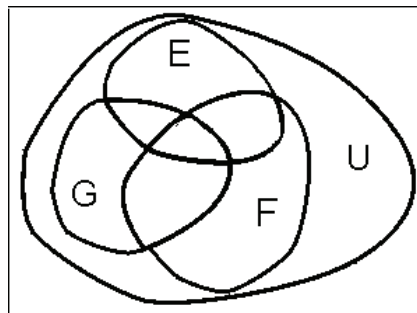
$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$



b) Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection

Conséquence de la distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$



II-5-4 Ensemble fini

- Si E et F sont deux ensembles finis alors $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$
- Si $E_1, \dots, E_m$ des sous ensembles d'un ensemble fini E alors $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^m E_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \text{card}(E_i)$

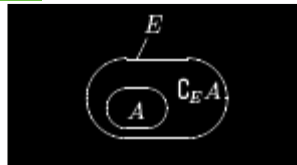
II-6 Complémentaire et partition d'un ensemble

II-6-1 Complémentaire

a) Définition

- Le complémentaire d'un sous ensemble E d'un ensemble U dans U c'est l'ensemble de tous les éléments de U qui n'appartiennent pas à E . On note C_U^E

$$C_U^E = \{x \in U / x \notin E\} : \quad x \in C_U^E \Leftrightarrow (x \in U \text{ et } x \notin E)$$



b) Propriétés

- Si le sous ensemble E est défini par la propriété (P) alors son complémentaire est défini par la propriété $(nonP)$.
- Soient E et F deux sous ensembles d'un ensemble U , alors :

$$1) C_U^{C_U^E} = E$$

$$2) E \cup C_U^E = U$$

$$3) E \cap C_U^E = \phi$$

$$4) E \subseteq F \Rightarrow C_U^F \subseteq C_U^E$$

$$5) C_U^{E \cup F} = C_U^E \cap C_U^F$$

$$6) C_U^{E \cap F} = C_U^E \cup C_U^F$$

II-6-2 Partition d'un ensemble

a) Définition

- Une partition d'un ensemble U est un sous ensemble $\{E_1, \dots, E_n\}$ de $P(U)$ formé de parties $E_1, \dots, E_n$ vérifiant :

$$1) E_i \neq \phi, \forall i = 1, \dots, n$$

$$2) E_i \cap E_j = \phi, \forall i \neq j$$

$$3) E_1 \cup \dots \cup E_n = U$$

Remarque :

- Si E est un sous ensemble d'un ensemble U , alors $\{E, C_U^E\}$ est une partition de U

b) Ensemble fini

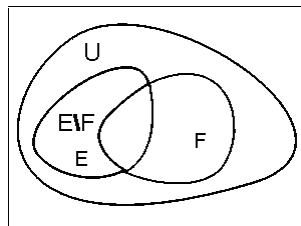
- Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ une partition d'un ensemble fini U alors $\text{card}(\bigcup_{i=1}^m E_i) = \sum_{i=1}^m \text{card}(E_i) = \text{card}(U)$

II-7 Différence et différence symétrique**II-7-1 Différence**

- Soient E et F deux sous ensembles de U .

- ↪ La différence E "moins" F c'est l'ensemble des éléments de U qui sont dans E et qui ne sont pas dans F . On note $E \setminus F$:

$$E \setminus F = \{x \in U / x \in E \text{ et } x \notin F\} = E \cap C_U^F$$



- ↪ La différence F "moins" E c'est l'ensemble des éléments de U qui sont dans F et qui ne sont pas dans E :

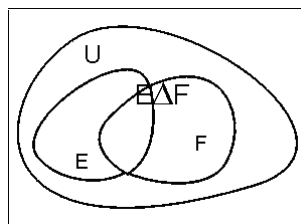
$$F \setminus E = \{x \in U / x \in F \text{ et } x \notin E\} = F \cap C_U^E$$

II-7-2 Différence symétrique

- Soient E et F deux sous ensembles de U .
- La différence symétrique entre les deux sous ensembles E et F c'est la réunion des deux différences $E \setminus F$ et $F \setminus E$. On note $E \Delta F$:

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

- $E \Delta F = \{x \in U / (x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E)\} = (E \cap C_U^F) \cup (F \cap C_U^E)$

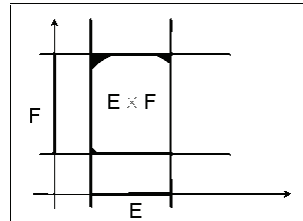


II-8 Produit d'ensembles

II-8-1 Définition

- Le produit de deux ensembles E par F c'est l'ensemble des couples (x, y) , où x est un élément de E et y est un élément de F . On note $E \times F$:

$$E \times F = \{x \in U, y \in U / x \in E \text{ et } y \in F\}$$



II-8-2 Propriétés

- Soient x est un élément de E et y est un élément de F .
- ↳ Il ne faut confondre entre le couple (x, y) et la paire $\{x, y\}$:
 - ↳ Il ne faut confondre entre le couple (x, y) et le couple (y, x) :
 - ↗ (x, y) est un élément de $E \times F$
 - ↗ (y, x) est un élément de $F \times E$
- En général : $E \times F \neq F \times E$
- $E \times E$ ($E = F$) est appelé produit carré et est noté E^2 .
- Si les ensembles E et F sont finis, alors $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

II-8-3 Généralisation :

- Par généralisation de la définition du produit de deux ensembles, le produit de n ensembles $E_1, \dots, E_n$ est défini par : $E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 \in E_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n\}$

CHAPITRE 2 : APPLICATIONS ET RELATIONS BINAIRES

I- Applications.....	18
I-1 Généralités	18
I-1-1 Définitions	18
I-1-2 Egalité	18
I-1-3 Prolongement et restriction d'une application	19
I-1-4 Composition.....	19
I-2 Image et image réciproque par une application	20
I-2-1 Image d'une partie par une application	20
I-2-2 Image réciproque d'une partie par une application	20
I-3 Application particulières	21
I-3-1 Injection	21
I-3-2 Surjection	21
I-3-3 Bijection et bijection réciproque.....	22
I-4 Application caractéristique	23
II- Relations binaires.....	24
II-1 Généralités.....	24
II-1-1 Définitions	24
II-1-2 Représentation d'une relation binaire	24
II-1-3 Propriétés.....	25
II-2 Relation d'équivalence.....	26
II-2-1 Définition.....	26
II-2-2 Classe d'équivalence et ensemble quotient	27
II-2-3 Partition d'un ensemble.....	28
II-3 Relation d'ordre	28
II-3-1 Définition.....	28
II-3-2 Préordre	29
II-3-3 Ordre total et partiel.....	29

I- Applications

I-1 Généralités

I-1-1 Définitions

Définition :

Soit E et F deux ensembles.

- Une application f de E vers F c'est la donnée d'une partie G du produit cartésien $E \times F$ telle que : $\forall x \in E, \exists ! y \in F / (x, y) \in G$.
- On note $y = f(x)$
- On dit que y est l'image de x ou encore x est un antécédent de y .
- L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de l'application f .
- L'ensemble F s'appelle l'ensemble d'arrivée de l'application f .

Remarque :

- Une application de E vers F est une fonction dont le domaine de définition est égal à E .

Notations :

- On note une application f de E vers F par : $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : E \rightarrow F$
- On note aussi une application f de E vers F par :
$$\begin{array}{ccc} f : & E & \rightarrow & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$
- On note $A(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E vers F .
- Si $E \equiv F$, on note $A(E)$ l'ensemble de toutes les applications de E vers E .

Exemples :

- 1) On définit l'application identité de E vers E , notée Id_E par : $\forall x \in E, Id_E(x) = x$
- 2) Une application $f : E \rightarrow F$ est une constante si $\exists C \in F / \forall x \in E, f(x) = C$

I-1-2 Egalité

- Deux applications f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F et si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

I-1-3 Prolongement et restriction d'une application

Définition : (restriction)

Soit f une application de E vers F . Soit A une partie de E ($A \subseteq E$).

- Une application g de A vers F est une restriction de l'application f à A si $\forall x \in A, g(x) = f(x)$. On note f_A .

Définition : (prolongement)

Soit f une application de E vers F . Soit U un ensemble contenant E ($E \subseteq U$).

- Une application h de U vers F est un prolongement de l'application f à U si f est la restriction de h à E .

I-1-4 Composition

a) Définition :

Définition :

Soient f une application de E vers F ($f \in A(E, F)$) et g une application de F vers G ($g \in A(F, G)$) :

- La composée de f par g , notée $g \circ f$, c'est l'application définie de E vers G ($g \circ f \in A(E, G)$) par $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

b) Propriétés :

- Si $f \in A(E, F)$, $g \in A(F, G)$ et $h \in A(G, H)$ alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Si $f \in A(E, F)$ alors $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$
- Si $f \in A(E)$. On pose $f^0 = Id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1}$
- Soient $f, g \in A(E)$. On dit que les applications f et g commutent si $f \circ g \equiv g \circ f$
 - L'application Id_E commute avec toute application de $A(E)$
 - Si $f \in A(E)$, les puissances f^n de f commutent entre elles.

I-2 Image et image réciproque par une application

I-2-1 Image d'une partie par une application

a) Définition :

Définition :

Soit f une application de E vers F et A une partie de E ($A \subseteq E$).

- On appelle image de A par f et on note $f(A)$ le sous ensemble de F :
- $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / f(x) = y$
- $f(E)$ c'est l'ensemble de toutes les images par f . On dit que $f(E)$ c'est l'ensemble image de f .

Exemple :

- Si $f \in A(E, F)$ alors :
 - $f(\emptyset) = \emptyset$,
 - $\forall a \in E, f(\{a\}) = \{f(a)\}$

b) Propriétés :

Soit $f \in A(E, F)$, A et B deux parties de E , alors :

- $(A \subseteq B) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

I-2-2 Image réciproque d'une partie par une application

a) Définition :

Définition :

Soit f une application de E vers F et B une partie de F ($B \subseteq F$).

- On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous ensemble de E :
- $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$ $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exemples :

- Si $f \in A(E, F)$ alors :
 - $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,
 - $\forall b \in F, f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E / f(x) = b\}$
 - $f^{-1}(F) = E$

b) Propriétés :

Soit $f \in A(E, F)$, A et B deux parties de E , alors :

- $f^{-1}(C_F^A) = C_E^{f^{-1}(A)}$
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

I-3 Application particulières**I-3-1 Injection****a) Définition :****Définition :**

- Soit f une application de E vers F . On dit que f est une application injective, ou une injection, si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E .

b) Propriétés :

- Soit $f \in A(E, F)$:
 - f est une injection ssi $\forall (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
 - f est une injection ssi $\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
 - f est une injection ssi $\forall (A, B) \in (P(E))^2 \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- Soient $f \in A(E, F)$ et $g \in A(F, G)$:
 - Si f et g sont injectives alors $h = g \circ f$ est injective
 - Si $h = g \circ f$ est injective alors f est injective

I-3-2 Surjection**a) Définition :****Définition :**

- Soit f une application de E vers F . On dit que f est une application surjective, ou une surjection, si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E .

b) Propriétés :

- Soit $f \in A(E, F)$:
 - f est une surjection ssi $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$
 - f est une surjection ssi $f(E) = F$
- Soient $f \in A(E, F)$ et $g \in A(F, G)$:
 - Si f et g sont surjectives alors $h = g \circ f$ est surjective
 - Si $h = g \circ f$ est surjective alors g est surjective

I-3-3 Bijection et bijection réciproque**a) Définition :****Définition :**

- Soit f une application de E vers F . On dit que f est une application bijective, ou une bijection, si tout élément de F possède un antécédent et un seul dans E .

b) Propriétés :

- Soit $f \in A(E, F)$:
 - f est une bijection ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E / y = f(x)$
 - f est une bijection ssi f est à la fois injective et surjective
- Soit $f \in A(E, F)$ et $g \in A(F, G)$:
 - Si f et g sont bijectives alors $h = g \circ f$ est bijective

c) Application réciproque :**i) Définition :****Définition :**

- Soit f une bijection de E vers F . On appelle application réciproque de f et on note f^{-1} , l'application définie de F vers E et qui associe à tout élément de F son unique antécédent dans E par la bijection f .

Remarque :

- Ne pas confondre l'application réciproque d'une bijection et l'image réciproque qui existe, même lorsque n'est pas bijective.

ii) Propriétés de la réciproque :

- Soit $f \in A(E, F)$ une bijection :
 - f^{-1} est une bijection
 - f c'est la réciproque de sa réciproque : $(f^{-1})^{-1} = f$
 - $\forall x \in E, \forall y \in F : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$
 - $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$
- Soit $f \in A(E, F)$:
 - f est bijective ssi $\exists g \in A(F, E) / f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$, et alors $g = f^{-1}$

I-4 Application caractéristique**a) Définition :****Définition :**

- Soit E un ensemble. On appelle l'application caractéristique d'une partie A de E et on note χ_A , l'application définie par :
- $$\chi_A : \begin{matrix} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{matrix}$$

b) Propriétés :

- $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$
- $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$: $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ et $C_E^A = \bar{A} = \chi_A^{-1}(\{0\})$
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$

II- Relations binaires

II-1 Généralités

II-1-1 Définitions

Définition :

Soit E et F deux ensembles.

- On appelle relation binaire R de E vers F toute partie du produit cartésien $E \times F$.
- Cette partie s'appelle le graphe de la relation R . On note G_R .
- On dit qu'un élément x de E est en relation avec un élément y de F , par la relation R , si le couple (x, y) appartient au graphe G_R . On note xRy .
- Si le couple (x, y) n'appartient pas au graphe G_R , on dit que l'élément x n'est pas en relation avec l'élément y . On note $x \not R y$.
- Si $E \equiv F$, on dit que la relation est une relation binaire sur l'ensemble E .

Dans toute la suite du cours, on va restreindre l'étude aux relations binaires sur un ensemble E .

Exemples :

- 1) La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E : $A R B \text{ ssi } A \subset B$
- 2) La relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{Z}$: $n R m \text{ ssi } n \text{ divise } m$
- 3) La relation de congruence modulo a sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ($a \in \mathbb{Z}^*$) :
 $n R m \text{ ssi } (n - m) \text{ est divisible par } a$

On note cette relation par $n \equiv m \pmod{a}$ et on lit n est congru à m modulo a .

Remarques :

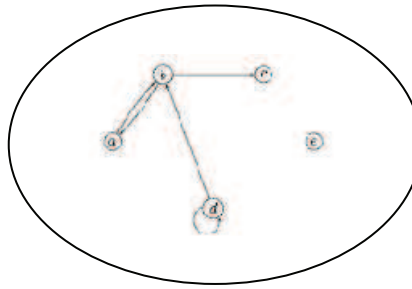
- Une relation binaire R est complètement définie par la donnée de son graphe G_R :
- Si $G_R = \{(x, x) / x \in E\}$ (diagonale de $E \times E$), alors R n'est autre que la relation identité et on note son graphe G_R par Δ .

II-1-2 Représentation d'une relation binaire

⊗ Si R est une relation binaire sur un ensemble E . On peut représenter la relation R par un diagramme sagittal : L'ensemble E est représenté par une "patate" :

- ✓ Un élément x de E est relié à un élément y de E par une flèche, lorsque xRy . Cette flèche, appelée aussi arc, représente un couple (x, y) du graphe G_R .
- ✓ Si xRx , l'arc s'appelle une boucle.

⊗ La représentation ainsi obtenue s'appelle représentation sagittale ou diagramme sagittal :



II-1-3 Propriétés

Définition :

Soit R une relation définie sur un ensemble E .

- La relation R est dite réflexive si $(\forall x \in E, x R x)$
- La relation R est dite symétrique si $(\forall (x, y) \in E^2, (x R y) \Rightarrow (y R x))$
- La relation R est dite transitive si $(\forall (x, y, z) \in E^3, (x R y) \text{ et } (y R z) \Rightarrow (x R z))$
- La relation R est dite antisymétrique si $(\forall (x, y) \in E^2, ((x R y) \text{ et } (y R x)) \Rightarrow x = y)$

Remarques :

- Une relation R est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, ((x R y) \text{ et } (x \neq y)) \Rightarrow \text{non}(y R x)$.
- Une relation R est symétrique si $(\forall (x, y) \in E^2, (x R y) \Leftrightarrow (y R x))$.
- Une relation R qui n'est pas symétrique n'est pas nécessairement antisymétrique.
- Une relation qui est symétrique, antisymétrique et réflexive sur un ensemble E c'est la relation d'égalité sur cet ensemble.

Exemples :

- 1) La relation d'inclusion large dans l'ensemble des parties de E : $A R B \text{ssi } A \subseteq B$
 - a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
 - b. n'est pas symétrique.
- 2) La relation d'inclusion stricte dans l'ensemble des parties de E : $A R B \text{ssi } A \subset B$
 - a. est antisymétrique et transitive.
 - b. n'est pas réflexive, n'est pas symétrique.
- 3) La relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{N}$: $n R m \text{ssi } n \text{ divise } m$
 - a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
 - b. n'est pas symétrique.
- 4) La relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{Z}$: $n R m \text{ssi } n \text{ divise } m$
 - a. est réflexive et transitive.
 - b. n'est pas symétrique et n'est pas antisymétrique.

- 5) La relation de congruence modulo a sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ($a \in \mathbb{Z}^*$) : $n \equiv m \pmod{a}$
 - a. est réflexive, symétrique et transitive.
 - b. n'est pas antisymétrique.
- 6) La relation d'inégalité large " $\leq$ " dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: xRy ssi $x \leq y$
 - a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
 - b. n'est pas symétrique.
- 7) La relation d'inégalité stricte " $<$ " dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: xRy ssi $x < y$
 - a. est réflexive, antisymétrique et transitive.
 - b. n'est pas réflexive, n'est pas symétrique.

II-2 Relation d'équivalence

II-2-1 Définition

Définition :

- Une relation binaire R , définie sur un ensemble E , est dite une relation d'équivalence si la relation R est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples :

- 1) La relation d'inclusion stricte dans l'ensemble des parties de E n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est ni réflexive ni symétrique)
- 2) La relation d'inclusion large dans l'ensemble des parties de E n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas symétrique)
- 3) La relation de divisibilité sur les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas symétrique)
- 4) La relation d'inégalité stricte " $<$ " dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est ni réflexive, ni symétrique).
- 5) La relation d'inégalité large " $\leq$ " dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas symétrique).
- 6) La relation de congruence modulo a sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ($a \in \mathbb{Z}^*$) est une relation d'équivalence.

II-2-2 Classe d'équivalence et ensemble quotient

Définition :

Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble E .

- On appelle la classe d'équivalence d'un élément x de E , l'ensemble de tous les éléments de E qui sont en relation avec x .
- On note $C(x) = \{y \in E / x R y\} = \{y \in E / y R x\}$.
- On note aussi la classe d'équivalence de x par $\bar{x}$ ou $\dot{x}$.

Remarques :

- Tout élément x de E appartient à sa propre classe d'équivalence, puisque la relation R est réflexive : $(\forall x \in E, x R x) \Rightarrow x \in C(x)$
- Deux classes d'équivalences sont ou bien égales ou bien disjointes :
 $\forall (x, y) \in E^2$: Si $x R y$, alors $C(x) = C(y)$
 Si non, alors $C(x) \cap C(y) = \emptyset$
- Une classe d'équivalence est entièrement déterminée par la donnée de l'un de ses éléments. On dira que cet élément est un représentant de la classe.

Exemple :

La relation de congruence modulo n sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ($n \in \mathbb{Z}^*$) est une relation d'équivalence :

- Les classes d'équivalences de cette relation sont $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$:

- $\bar{0} = \{m \in \mathbb{Z} / m = kn, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \bar{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$:
 - $\forall m \in \bar{0}$, le reste de la division euclidienne de m par n est égal à 0
 - 0 est un représentant de la classe $\bar{0}$
- $\bar{1} = \{m \in \mathbb{Z} / m = kn + 1, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \bar{1} = \{\dots, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, \dots\}$:
 - $\forall m \in \bar{1}$, le reste de la division euclidienne de m par n est égal à 1
 - 1 est un représentant de la classe $\bar{1}$
- ...
- $\overline{n-1} = \{m \in \mathbb{Z} / m = kn + (n-1), k \in \mathbb{Z}\}$
 $\Rightarrow \overline{n-1} = \{\dots, -2n + (n-1), -n + (n-1), (n-1), n + (n-1), 2n + (n-1), \dots\}$:
 - $\forall m \in \overline{n-1}$, le reste de la division euclidienne de m par n est égal à $n-1$
 - $n-1$ est un représentant de la classe $\overline{n-1}$:

II-2-3 Partition d'un ensemble

Théorème :

- Soit E un ensemble.
- Si R est une relation d'équivalence définie sur E , alors les différentes classes d'équivalence de E pour la relation R forment une partition de E .
- Si les sous ensembles $E_i, (i=1, n)$ définissent une partition de E , alors la relation R définie sur E par : $xRy \Leftrightarrow \exists i=1, n / x \in E_i \text{ et } y \in E_i$, est une relation d'équivalence sur l'ensemble E et les sous ensembles $E_i, (i=1, n)$ sont les classes d'équivalences de E pour la relation R .

Définition :

- Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble E .
- On appelle l'ensemble quotient de R sur E l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de E pour R .
 - On note E / R

Exemples :

- La relation de congruence modulo n sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, ($n \in \mathbb{Z}^*$) :
 - Les classes d'équivalences sont $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1} \Rightarrow \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
 - L'ensemble quotient est égal à $E / R = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$
- Pour la relation de congruence modulo n sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, on note l'ensemble quotient (E / R) par $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

II-3 Relation d'ordre

II-3-1 Définition

Définition :

- Une relation binaire R , définie sur un ensemble E , est dite une relation d'ordre si la relation R est réflexive, antisymétrique et transitive.
- On dit que E est un ensemble ordonné.

Exemples :

- 1) La relation d'inclusion large dans l'ensemble des parties de E est une relation d'ordre.
- 2) La relation d'inclusion stricte dans l'ensemble des parties de E n'est pas une relation d'ordre. (elle n'est pas réflexive).
- 3) La relation de divisibilité sur l'ensemble IN est une relation d'ordre.
- 4) La relation de divisibilité sur l'ensemble IZ n'est pas une relation d'ordre. (elle n'est pas antisymétrique).
- 5) La relation d'inégalité large " $\leq$ " dans les ensembles IN , IZ , IQ et IR , est une relation d'ordre.
- 6) La relation d'inégalité stricte " $<$ " dans les ensembles IN , IZ , IQ et IR , n'est pas une relation d'ordre. (elle n'est pas réflexive).

II-3-2 Préordre**Définition :**

- Une relation binaire R , définie sur un ensemble E , est dite une relation de préordre ou un préordre si la relation R est réflexive et transitive.

Exemple :

- La relation de divisibilité sur l'ensemble IZ est un préordre.

II-3-3 Ordre total et partiel**Définition :**

- Soit R une relation d'ordre définie sur un ensemble E .
- Deux éléments x et y de E sont dits comparables par la relation R si xRy ou si yRx
 - Si deux éléments de E sont toujours comparables, on dit que
 - R une relation d'ordre total ou que R est un ordre total
 - E est totalement ordonné par R
 - Sinon, s'ils existent deux éléments x et y de E non comparables, on dit que
 - R une relation d'ordre partiel ou que R est un ordre partiel
 - E est partiellement ordonné par R

Exemples :

- 1) Si l'ensemble E n'est pas un singleton, la relation d'inclusion large dans l'ensemble des parties de E est une relation d'ordre partiel : Si $(a, b) \in E^2$ ($a \neq b$) alors $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.
- 2) La relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partiel : 3 et 4 ne sont pas comparables.
- 3) La relation d'inégalité large " $\leq$ " dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, est une relation d'ordre total.

- 4) Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation R par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) : xRy \text{ ssi } \begin{cases} x_1 < y_1 \text{ ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2 \end{cases}$$

La relation R est une relation d'ordre total.

La généralisation de la définition de cette relation à $\mathbb{R}^n$ c'est la relation qui permet de classer les mots du dictionnaire.

D'où l'appellation de cette relation par ordre lexicographique.

Remarques :

- Par analogie avec la relation d'ordre " $\leq$ " sur les nombres, on note souvent les relations d'ordre par le symbole " $\leq$ ".
- Si $x \leq y$, on dit que y est plus grand que x et que x est plus petit que y .
- On dit que l'ensemble $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

CHAPITRE 3 : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I- Polynômes	32
I-1 Ensemble de polynômes	32
I-1-1 Définitions	32
I-1-2 Degré et valuation d'un polynôme	32
I-1-3 Polynômes particuliers.....	33
I-1-4 Egalité de polynômes.....	34
I-2 Opérations sur l'ensemble des polynômes.....	34
I-2-1 Somme	34
I-2-2 Produit d'un polynôme par un réel	35
I-2-3 Produit de deux polynômes.....	35
I-3 Divisibilité	36
I-3-1 Division euclidienne	36
I-3-2 Propriétés de la divisibilité.....	37
I-4 Racines ou zéro d'un polynôme.....	37
I-4-1 Définition	37
I-4-2 Polynôme dérivée	38
I-4-3 Ordre de multiplicité d'une racine.....	38
I-5 Décomposition d'un polynôme	39
I-5-1 Polynôme irréductible.....	39
I-5-2 Décomposition d'un polynôme	40
II- Fractions rationnelles	41
II-1 Définitions.....	41
II-2 Décomposition d'une fraction en éléments simples	42
II-3 Calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction.....	43
II-3-1 Coefficient du pôle simple.....	44
II-3-2 Coefficients du pôle multiple	44
II-3-3 Quelques méthodes pour les coefficients manquants	45
II-3-4 Décomposition.....	46

I- Polynômes

I-1 Ensemble de polynômes

I-1-1 Définitions

Définition :

Un polynôme à coefficients réels est défini par la donnée de ses coefficients réels $a_0, a_1, \dots, a_n$. On note $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ ou encore $P(X) = \sum_{i=0}^{i=n} a_iX^i$:

X est une variable muette et s'appelle l'indéterminée.

$a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ et s'appellent les coefficients du polynôme P .

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients réels.

Définition :

Une fonction polynomiale c'est une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \text{ étant des réels.}$$

Cette fonction c'est la fonction polynôme associée au polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{i=n} a_iX^i$

Remarque :

- Dans toute la suite, on confondra un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{i=n} a_iX^i$ et la fonction polynomiale associée $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i$.

I-1-2 Degré et valuation d'un polynôme

Degré d'un polynôme

Définition :

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polynôme non nul.

Le degré de P c'est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que a_k soit différent de 0.

On note $\deg(P) = k$ ou $d^\circ P = k$

Remarque :

- Se donner un polynôme P de degré n c'est se donner $n+1$ coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, avec $a_n \neq 0$ tels que $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$.

Valuation d'un polynôme**Définition :**

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polynôme non nul.

La valuation de P c'est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que a_p soit différent de 0.

On note $\text{val}(P) = p$ ou $v(P) = p$

Remarque :

- Se donner un polynôme P de valuation p c'est se donner $n+1$ coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, avec $a_p \neq 0$ et $\forall i < p, a_i = 0$ tels que $P(X) = a_pX^p + a_{p+1}X^{p+1} + \dots + a_nX^n$.

I-1-3 Polynômes particuliersPolynôme constant**Définition :**

Un polynôme P est constant ssi tous ces coefficients sont nuls sauf a_0 .

On note $P = a_0$

Proposition :

- Un polynôme est constant ssi la fonction polynomiale associée est une fonction constante.

Polynôme nul

Si $a_0 = 0$, le polynôme $P = a_0$ c'est le polynôme 0, appelé polynôme nul.

Polynôme 1

Si $a_0 = 1$, le polynôme $P = a_0$ c'est le polynôme 1.

Monôme et terme dominant**Définition :**

Le polynôme $P(X) = a_kX^k$, avec $a_k \neq 0$, s'appelle un monôme.

Si P est un polynôme non nul de degré n alors

- a_nX^n s'appelle le terme ou monôme dominant du polynôme P .
- a_n s'appelle le coefficient dominant du polynôme P .

Polynôme unitaire**Définition :**

Un polynôme P non nul est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

I-1-4 Egalité de polynômes

Définition :

Deux polynômes sont égaux ssi tous leurs coefficients de même rang sont égaux.

Proposition :

○ Deux polynômes sont égaux ssi les fonctions polynomiales associées sont égales.

I-2 Opérations sur l'ensemble des polynômes

I-2-1 Somme

Définition :

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels, il existe un entier n tel que :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \text{ et } Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$$

Alors $P+Q$ est le polynôme défini par : $(P+Q)(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_nX^n$, avec

$$\forall k, 0 \leq k \leq n, c_k = a_k + b_k.$$

Propriétés de l'addition des polynômes

1. $\forall P, Q, R \in IR[X], (P+Q)+R = P+(Q+R)$
2. $\forall P, Q \in IR[X], P+Q = Q+P$
3. $\exists P_0 \in IR[X] / \forall P \in IR[X], P+P_0 = P_0+P = P, (P_0=0)$
4. $\forall P \in IR[X], \exists (-P) \in IR[X] / P+(-P) = (-P)+P = P_0$
 (si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ alors $(-P)(X) = -a_0 - a_1X - \dots - a_nX^n$)

Degré de la somme de deux polynômes

Proposition :

Soient P et Q deux polynômes de $IR[X]$: $(P, Q \in IR[X])$.

○ 1^{er} cas : $\deg P \neq \deg Q$

Le polynôme $P+Q$ est non nul et $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

○ 2^{ème} cas : $\deg P = \deg Q$ et le polynôme $P+Q$ est non nul.

Si les coefficients dominants de P et de Q

- ne s'annulent pas alors $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

- s'annulent alors : $\deg(P+Q) < \max(\deg P, \deg Q)$

I-2-2 Produit d'un polynôme par un réel

Définition :

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et α un réel : $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
 Alors $\alpha.P$ est le polynôme défini par : $(\alpha.P)(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_nX^n$, avec
 $\forall k, 0 \leq k \leq n, c_k = \alpha.a_k$.

Propriétés de la multiplication d'un polynôme par un réel

1. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad 1.P = P$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha.(P + Q) = \alpha.P + \alpha.Q$
3. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta).P = \alpha.P + \beta.P$
4. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha.\beta).P = (\alpha.\beta).P$

I-2-3 Produit de deux polynômes

Définition :

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels :
 $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m$
 Alors $P \times Q$, noté aussi $P.Q$ est le polynôme défini par :
 $(P.Q)(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_{n+m}X^{n+m}$, avec $\forall k, 0 \leq k \leq n+m, c_k = \sum_{j=0}^{j=k} a_j.b_{k-j}$.

Propriétés de la multiplication des polynômes

1. $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}[X], (PQ)R = P(QR)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], PQ = QP$
3. $\exists P_1 \in \mathbb{R}[X] / \forall P \in \mathbb{R}[X], PP_1 = P_1P = P, \quad (P_1 = 1)$
4. $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}[X], P(Q + R) = PQ + PR$

Degré du produit de deux polynômes

Proposition :

- Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ ($P, Q \in \mathbb{R}[X]$), alors PQ est un polynôme non nul et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

I-1 Divisibilité

I-1-1 Division euclidienne

Définition :

Diviser A par B suivant les puissances décroissantes c'est déterminer deux polynômes Q et R tels que : $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$, avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$.

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B .

Q est le quotient de la division euclidienne de A par B .

R est le reste de la division euclidienne de A par B .

Si $R = 0$, on dit que B divise ou est un diviseur de A ou que A est un multiple de B .

Exemple : Le polynôme $P = 1$ divise tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Proposition :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $(A, B \in \mathbb{R}[X])$ avec $B \neq 0$.

- Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
 $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$, avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$

Remarque :

- Pour effectuer une division euclidienne, on ordonne les polynômes suivant les puissances décroissances de x .

Exemple : $A(x) = 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5$ et $B(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5 & x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 \\
 \underline{2x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x} & 2x + 1 \\
 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 22x - 5 & \\
 \underline{+ x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2} & \\
 + x^3 - 21x - 7 &
 \end{array}$$

D'où :

$$\underbrace{2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5}_{A(x)} = \underbrace{(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2)}_{B(x)} \underbrace{(2x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(x^3 - 21x - 7)}_{R(x)}$$

Remarque :

- D'après la première étape de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$, on peut écrire :

$$\underbrace{2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5}_{A(x)} = \underbrace{(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2)}_{B(x)} \underbrace{(2x)}_{Q_1(x)} + \underbrace{(x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 22x - 5)}_{R_1(x)}$$
- Mais cette écriture ne représente pas le résultat de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ car $\deg R_1 \not< \deg B$.

I-1-2 Propriétés de la divisibilité

❖ La divisibilité est une relation binaire sur $IR[X]$:

Réflexivité

➤ La relation de divisibilité est réflexive : $\forall P \in IR[X], P = 1.P$ et alors P divise P .

Symétrie

➤ La relation de divisibilité n'est pas symétrique : $\exists A, B \in IR[X]$ tels que A divise B et B ne divise pas A .

Exemple : $A(x) = x - 1$ divise $B(x) = x^2 - 1$ ($B(x) = A(x).Q(x), Q(x) = (x + 1)$)
et $B(x) = x^2 - 1$ ne divise pas $A(x) = x - 1$

Antisymétrie

➤ La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique : $\exists A, B \in IR[X], A \neq B$ tels que A divise B et B divise A .

Exemple : $A(x) = x - 1$ divise $B(x) = 2x - 2$ ($B(x) = A(x).Q_1(x), Q_1(x) = 2$)
 $B(x) = 2x - 2$ divise $A(x) = x - 1$ ($A(x) = B(x).Q_2(x), Q_2(x) = 1/2$)

Remarque : Si A et B sont deux polynômes de $IR[X]$ tels que A divise B et B divise A alors A et B sont de même degré et il existe un réel $\alpha \in IR$ tel que $B(x) = \alpha.A(x)$.

Transitivité

➤ La relation de divisibilité est transitive : Si $A, B, C \in IR[X]$ tels que A divise B et B divise C alors A divise C : $B(x) = A(x).Q_1(x)$ et $C(x) = B(x).Q_2(x)$ impliquent que $C(x) = A(x).Q(x)$, avec $Q(x) = Q_1(x).Q_2(x)$

I-2 Racines ou zéro d'un polynôme

I-2-1 Définition

Définition :

On dit qu'un réel a de IR est une racine ou un zéro d'un polynôme P de $IR[X]$ si le réel a annule la fonction polynomiale associée à P : $P(a) = 0$.

Proposition :

○ Un réel a de IR est une racine ou un zéro d'un polynôme P de $IR[X]$ ssi le polynôme P est divisible par le polynôme $(x - a)$.

I-2-2 Polynôme dérivée

Définition

Définition :

Soit P un polynôme de $IR[X]$.

On appelle le polynôme dérivé de P , la fonction dérivée de la fonction polynomiale associée à P . On note P' .

Si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ alors $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}$

Degré du polynôme dérivé

Proposition :

Soit P un polynôme de $IR[X]$ de degré n .

- Si $n = 0$ alors $P' \equiv 0$
- Si $n \geq 1$ alors $\deg(P') = n - 1$

Propriétés de la dérivation des polynômes

1. $\forall P, Q \in IR[X], \quad (P + Q)' = P' + Q'$
2. $\forall P \in IR[X], \forall \alpha \in IR, (\alpha.P)' = \alpha.P'$
3. $\forall P, Q \in IR[X] \quad (P.Q)' = P'.Q + P.Q'$

Dérivées successives d'un polynôme

Définition :

Soit P un polynôme de $IR[X]$ de degré n . On définit les dérivées successives de P par récurrence : $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$ si $k \geq 1$, avec $P^{(0)} = P$

Remarque :

- $P^{(1)} = P'$ et $P^{(2)} = P''$

Proposition :

- Si P un polynôme de $IR[X]$ de degré n alors $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul.

I-2-3 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition :

Soit P un polynôme de $IR[X]$. L'ordre de multiplicité d'une racine a de P c'est le plus grand entier k tel que P soit divisible par $(x-a)^k$: P est divisible par $(x-a)^k$ et P n'est pas divisible par $(x-a)^{k+1}$.

Proposition :

- L'ordre de multiplicité d'une racine a d'un polynôme P de $IR[X]$ est égal à k ssi il existe un polynôme Q de $IR[X]$ tel que $Q(a) \neq 0$ et $P(x) = (x-a)^k Q(x)$
- ssi $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$

Remarques :

- Une racine d'ordre 1 est dite racine simple.
- Une racine d'ordre 2 est dite racine double.
- Une racine d'ordre 3 est dite racine triple.

Proposition :

- Soit P un polynôme de $IR[X]$. Si $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont m racines distinctes de P , d'ordre de multiplicité respectif k_i , alors il existe un polynôme Q de $IR[X]$, tel que $Q(a_i) \neq 0, 1 \leq i \leq m$, qui vérifie l'égalité : $P(x) = (x-a_1)^{k_1} (x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_m)^{k_m} Q(x)$

Conséquence :

- Un polynôme P de $IR[X]$ de degré n admet au plus n racines dans IR (en comptant k fois une racine d'ordre de multiplicité k).

I-3 Décomposition d'un polynôme**I-3-1 Polynôme irréductible****Définition :**

Un polynôme P de $IR[X]$ est dit irréductible dans $IR[X]$ s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme $\lambda P, \lambda \in IR^*$

Exemple :

- Si P est un polynôme degré 1, alors ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes de la forme $\lambda P, \lambda \in IR^*$.

Proposition :

- Un polynôme de $IR[X]$ est irréductible dans $IR[X]$ ssi il est de degré 1 ($ax+b$) ou de degré 2 unitaire et sans racine réelle ($x^2+bx+c / \Delta = b^2-4ac < 0$)

Exemple :

- Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ est irréductible : c'est un polynôme de degré 2 unitaire et sans racine réelle ($\Delta = -3 < 0$).

Remarques :

- Un polynôme qui n'a pas de racines réelles n'est pas forcément un polynôme irréductible.
- Sa décomposition en facteurs irréductibles ne contient pas des polynômes de degré 1.

Exemple : $P(x) = x^4 + 1$

- $P(x) = x^4 + 1$ n'a pas de racines (car si on suppose que a est une racine de P alors $a^4 = -1$, ce qui est absurde).
- $P(x) = x^4 + 4$ n'est pas irréductible : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$
- $x^4 + 4 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$ est la décomposition en facteurs irréductibles de P .

I-3-2 Décomposition d'un polynôme**Proposition :**

- Tout polynôme de $IR[X]$ se décompose de manière unique en un produit de polynômes irréductibles :

$$P(x) = a(x - r_1)^{m_1} \times \dots \times (x - r_p)^{m_p} \times (x^2 + b_1x + c_1)^{n_1} \times \dots \times (x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$$

- a est le coefficient dominant de P .
- $r_i, i = 1, p$ sont les racines de degré de multiplicité m_i .
- Les facteurs de second degré sont sans racine réelle : $b_j^2 - 4a_jc_j < 0, j = 1, q$

Exemple : $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$

- On remarque que : $P(1) = 0, P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$ $x_1 = 1$ est alors une racine double de $P(x)$: $r_1 = 1$ avec $m_1 = 2$
- On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 1)^2$ qui donne :

$$P(x) = (x - 1)^2 \tilde{P}(x), \text{ avec } \tilde{P}(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$
- On remarque que : $\tilde{P}(-2) = 0$ et $(\tilde{P})'(-2) \neq 0$: $x_2 = -2$ est alors une racine simple de $\tilde{P}(x)$ et par suite de $P(x)$: $r_2 = -2$ avec $m_2 = 1$
- On effectue la division euclidienne de $\tilde{P}(x)$ par $(x + 2)$ qui donne :

$$\tilde{P}(x) = (x + 2)\tilde{\tilde{P}}(x), \text{ avec } \tilde{\tilde{P}}(x) = x^2 + x + 1$$
- $\tilde{\tilde{P}}(x) = x^2 + x + 1$ est un polynôme irréductible de degré 2, puisque son discriminant est négatif : $\Delta = -3 < 0$.

⊗ La décomposition de $P(x)$ en éléments irréductibles est alors donnée par :

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x^2 + x + 1)$$

II- Fractions rationnelles

II-1 Définitions

Définition :

On appelle fraction rationnelle toute fonction réelle $f(x)$ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, A et $B \in IR[X]$, où $IR[X]$ est l'ensemble de polynômes à coefficients réels.

Exemple :

$$f(x) = \frac{2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5}{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}$$

$$A(x) = 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5 \text{ et } B(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$$

Proposition :

Soient A par B deux polynômes de $IR[X]$: ($A, B \in IR[X]$) avec $B \neq 0$.

Soit l'identité de la division euclidienne de A par B :

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ avec } R = 0 \text{ ou } \deg R < \deg B$$

○ Si $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ alors $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$

○ Q s'appelle la partie entière de la fraction rationnelle.

Exemple :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ avec}$$

$$\diamond A(x) = 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5$$

$$\diamond B(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5 & x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 \\ \hline 2x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x & 2x + 1 \\ \hline + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 22x - 5 & \\ \hline + x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 & \\ \hline + x^3 - 21x - 7 & \end{array}$$

$$D'où : \underbrace{2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5}_{A(x)} = \underbrace{(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(x^3 - 21x - 7)}_{R(x)}$$

Et par suite :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{x^3 - 21x - 7}{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2},$$

II-2 Décomposition d'une fraction en éléments simples

Définition : (fraction irréductible)

Une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ est dite irréductible ssi les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ n'ont pas de facteurs communs.

Définition : (pôle d'une fraction)

Soit $\frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction irréductible.

On appelle pôle de la fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ de degré de multiplicité m_i toute racine r_i de $B(x)$ de degré de multiplicité m_i .

Définition : (éléments simples de 1ère espèce)

Soit $\frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction irréductible et $B(x) = a \prod_{i=1}^{i=p} (x - r_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{j=q} (x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}$, ($b_j^2 - 4a_j c_j < 0$), la décomposition de $B(x)$ en éléments irréductibles.

Les éléments simples de 1^{ère} espèce associés au pôle r_i de degré de multiplicité m_i , sont les fractions rationnelles :

$$\frac{A_1}{(x - r_i)}, \dots, \frac{A_{m_i}}{(x - r_i)^{m_i}}, \quad A_i \in \mathbb{R}, (i = 1, m_i)$$

Les éléments simples de 1^{ère} espèce associés au polynôme irréductible $(x^2 + b_j x + c_j)$ sont les fractions rationnelles :

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_j x + c_j}, \dots, \frac{B_{n_j} x + C_{n_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}}, \quad B_j, C_j \in \mathbb{R}, (j = 1, n_j)$$

Exemple :
$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21x - 7}{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}$$

- la décomposition de $B(x)$ en éléments irréductibles :

$$B(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 = (x - 1)^2 (x + 2) (x^2 + x + 1)$$

- Les pôles de $\frac{R(x)}{B(x)}$ sont :

- $r_1 = 1$ de degré de multiplicité $m_1 = 2$
- $r_2 = -2$ de degré de multiplicité $m_2 = 1$

- Les éléments simples de 1^{ère} espèce associés au pôle $r_1 = 1$ de degré de multiplicité $m_1 = 2$ sont : $\frac{A_1}{(x-1)}$ et $\frac{A_2}{(x-1)^2}$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$
- L'élément simple de 1^{ère} espèce associé au pôle $r_2 = -2$ de degré de multiplicité $m_2 = 1$ est : $\frac{A_3}{(x+2)}$, $A_3 \in \mathbb{R}$
- L'élément simple de 1^{ère} espèce associé au polynôme irréductible $(x^2 + x + 1)$ est : $\frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$, $B_1, C_1 \in \mathbb{R}$

Théorème :

Soit $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle écrite sous la forme : $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$, avec

$R = 0$ ou $\deg R < \deg B$ (division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$)

- o La fraction rationnelle $\frac{R(x)}{B(x)}$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \sum_{k_i} \frac{A_{k_i}}{(x-r_i)^{k_i}} + \sum_j \sum_{h_j} \frac{B_{h_j}x + C_{h_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{h_j}},$$

$\sum_{k_i} \frac{A_{k_i}}{(x-r_i)^{k_i}}$: la somme des éléments simples associés au pôle r_i .

$\sum_{h_j} \frac{B_{h_j}x + C_{h_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{h_j}}$: la somme des éléments simples associés au polynôme irréductible $(x^2 + b_jx + c_j)$.

Exemple :

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}$$

$$\exists! A_1, A_2, A_3, B_1 \text{ et } C_1 \in \mathbb{R} / \frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

II-1 Calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction

- ❖ Pour étudier quelques méthodes pratiques du calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction en éléments simples de 1^{ère} espèce, on traitera en détails l'exemple :

Exemple :
$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

II-1-1 Coefficient du pôle simple

- ❖ On multiplie les deux membres de l'égalité par $(x - r)$ et on prend $x = r$.

Exemple :

$r = -2$ de degré de multiplicité $m = 1$: Calcul de A_3 dans la décomposition :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

- ↪ Si on multiplie les deux membres de l'égalité par $(x+2)$ on obtient :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1(x+2)}{(x-1)} + \frac{A_2(x+2)}{(x-1)^2} + A_3 + \frac{(B_1x + C_1)(x+2)}{x^2 + x + 1}$$

- ↪ Si on prend $x = -2$ on obtient $A_3 = 1$

II-1-2 Coefficients du pôle multiple

Coefficient A_m du pôle de degré de multiplicité égale à m

- ❖ On multiplie les deux membres de l'égalité par $(x - r)^m$ et prend $x = r$.

Exemple :

$r = 1$ de degré de multiplicité $m = 2$: Calcul de A_2 dans la décomposition :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

- ↪ Si on multiplie les deux membres de l'égalité par $(x-1)^2$ on obtient :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x^2 + x + 1)(x+2)} = A_1(x-1) + A_2 + \frac{A_3(x-1)^2}{(x+2)} + \frac{(B_1x + C_1)(x-1)^2}{x^2 + x + 1}$$

- ↪ Si on prend $x = 1$ on obtient $A_2 = -3$

Les autres coefficients du pôle de degré de multiplicité égale à m

- ❖ On se ramène à un pôle en $t = 0$ par le changement de variable $t = x - r$.
- ❖ On effectue la division euclidienne par les autres facteurs de $B(t+r)$ suivant les puissances croissantes en t à l'ordre $m-1$ (le reste ne contient que des termes de degré $\geq m$).
- ❖ Le quotient donne alors tous les coefficients associés au pôle r .

Remarque :

- Cette méthode est surtout utilisée lorsque la fraction rationnelle admet un pôle à un degré de multiplicité élevé.

Exemple :

$r=1$ de degré de multiplicité $m=2$: calcul de A_1 et A_2 dans la décomposition :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

⇒ On se ramène à un pôle en $t=0$ par le changement de variable $t = x - 1$ qui donne :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{t^3 + 3t^2 - 18t - 27}{t^2(t+3)(t^2 + 8t + 3)}$$

⇒ On effectue la division de $-27 - 18t + 3t^2 + t^3$ par $(t+3)(t^2 + 8t + 3) = 9 + 12t + 3t^2 + t^3$ suivant les puissances croissantes en t à l'ordre 1.

▪ Il en résulte : $-27 - 18t + 3t^2 + t^3 = (t+3)(t^2 + 8t + 3)(2t - 1) + (-3t^2 - 8t^3 - 2t^4)$

▪ d'où : $\frac{t^3 + 3t^2 - 18t - 27}{t^2(t+3)(t^2 + 8t + 3)} = \frac{2t - 3}{t^2} - \frac{2t^2 + 8t + 3}{(t+3)(t^2 + 8t + 3)}$

⇒ On a alors, en revenant à la variable x :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x+2)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{-3}{(x-1)^2} - \frac{2x^2 + 4x - 3}{(x+2)(x^2 + x + 1)}$$

⇒ On en déduit que : $A_1 = 2$ et $A_2 = -3$

II-1-3 Quelques méthodes pour les coefficients manquants**Méthode de limite**

- ❖ Consiste à multiplier les deux membres de l'égalité par la plus petite puissance dans la décomposition en éléments simples et de faire tendre x vers ∞ .

Exemple :

Calcul de B_1 dans la décomposition :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

⇒ On multiplie les deux membres de l'égalité par x^1 pour obtenir :

$$\frac{x^4 - 21x^2 - 7x}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1x}{(x-1)} + \frac{A_2x}{(x-1)^2} + \frac{A_3x}{(x+2)} + \frac{B_1x^2 + C_1x}{x^2 + x + 1}$$

↪ Quand x vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 21x^2 - 7x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A_1x}{(x-1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A_2x}{(x-1)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A_3x}{(x+2)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{B_1x^2 + C_1x}{x^2+x+1}$$

↪ D'où : $A_1 + A_3 + B_1 = 0$

↪ On en déduit que : $B_1 = -3, (A_1 = 2, \text{ et } A_3 = 1)$

Méthode de valeurs particulières

- ❖ Consiste à prendre pour x des valeurs particulières différentes des pôles pour obtenir un système d'équations dont la résolution donne les coefficients restants.

Exemple :

Calcul de C_1 dans la décomposition :

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+x+1}$$

↪ On prend $x = 0$ pour obtenir : $\frac{-7}{2} = -A_1 + A_2 + \frac{1}{2}A_3 + C_1$

↪ On en déduit que : $C_1 = 1, (A_1 = 2, A_2 = -3 \text{ et } A_3 = 1)$

II-1-4 Décomposition

$$\frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x-1)} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{3x-1}{x^2+x+1}$$

Sommaire

Chapitre 1 : éléments de Logique et langage ensembliste	1
I- Quelques éléments de logique	2
I-1 Connecteurs	2
I-1-1 Equivalence.....	2
I-1-2 Négation.....	2
I-1-3 Conjonction et disjonction	3
I-1-4 Implication.....	5
I-2 Quantificateurs	6
I-2-1 Quantificateur existentiel	6
I-2-2 Quantificateur universel.....	7
I-2-3 Ordre d'écriture dans une phrase avec quantificateurs	7
I-2-4 Négation d'une phrase avec quantificateurs	7
I-3 Introduction à la démonstration	8
I-3-1 Démonstration par la contraposée.....	8
I-3-2 Démonstration par l'absurde	8
I-3-3 Démonstration par récurrence.....	8
II- Ensembles	9
II-1 Notion d'ensemble.....	9
II-1-1 Appartenance à un ensemble	9
II-1-2 Ensemble vide	9
II-1-3 Ensemble fini, infini	9
II-2 Écriture d'un ensemble	9
II-2-1 Écriture en extension	9
II-2-2 Écriture en compréhension	9
II-3 Inclusion et égalité	10
II-3-1 Inclusion	10
II-3-2 Égalité.....	10
II-3-3 Ensemble fini.....	10
II-4 Ensembles de parties d'un ensemble	11
II-5 Réunion et intersection	11
II-5-1 Réunion	11
II-5-2 Intersection	12
II-5-3 Distributivité.....	13
II-5-4 Ensemble fini	13
II-6 Complémentaire et partition d'un ensemble	14
II-6-1 Complémentaire	14
II-6-2 Partition d'un ensemble.....	14
II-7 Différence et différence symétrique	15
II-7-1 Différence.....	15
II-7-2 Différence symétrique	15
II-8 Produit d'ensembles.....	16
II-8-1 Définition.....	16
II-8-2 Propriétés.....	16
II-8-3 Généralisation :	16

Chapitre 2 : applications et Relations Binaires.....	17
I- Applications.....	18
I-1 Généralités	18
I-1-1 Définitions	18
I-1-2 Egalité	18
I-1-3 Prolongement et restriction d'une application	19
I-1-4 Composition.....	19
I-2 Image et image réciproque par une application	20
I-2-1 Image d'une partie par une application	20
I-2-2 Image réciproque d'une partie par une application	20
I-3 Application particulières	21
I-3-1 Injection	21
I-3-2 Surjection.....	21
I-3-3 Bijection et bijection réciproque.....	22
I-4 Application caractéristique	23
II- Relations binaires.....	24
II-1 Généralités.....	24
II-1-1 Définitions	24
II-1-2 Représentation d'une relation binaire	24
II-1-3 Propriétés.....	25
II-2 Relation d'équivalence.....	26
II-2-1 Définition.....	26
II-2-2 Classe d'équivalence et ensemble quotient	27
II-2-3 Partition d'un ensemble.....	28
II-3 Relation d'ordre	28
II-3-1 Définition.....	28
II-3-2 Préordre	29
II-3-3 Ordre total et partiel.....	29
Chapitre 3 : Polynômes et fractions rationnelles	31
I- Polynômes	32
I-1 Ensemble de polynômes	32
I-1-1 Définitions	32
I-1-2 Degré et valuation d'un polynôme	32
I-1-3 Polynômes particuliers.....	33
I-1-4 Egalité de polynômes.....	34
I-2 Opérations sur l'ensemble des polynômes.....	34
I-2-1 Somme	34
I-2-2 Produit d'un polynôme par un réel	35
I-2-3 Produit de deux polynômes.....	35
I-1 Divisibilité	36
I-1-1 Division euclidienne	36
I-1-2 Propriétés de la divisibilité.....	37
I-2 Racines ou zéro d'un polynôme.....	37
I-2-1 Définition	37
I-2-2 Polynôme dérivée	38
I-2-3 Ordre de multiplicité d'une racine.....	38

I-3 Décomposition d'un polynôme	39
I-3-1 Polynôme irréductible	39
I-3-2 Décomposition d'un polynôme	40
II- Fractions rationnelles	41
II-1 Définitions	41
II-2 Décomposition d'une fraction en éléments simples	42
II-1 Calcul des coefficients de la décomposition d'une fraction	43
II-1-1 Coefficient du pôle simple.....	44
II-1-2 Coefficients du pôle multiple	44
II-1-3 Quelques méthodes pour les coefficients manquants	45
II-1-4 Décomposition.....	46