Université Abdelmalek Essaadi
Faculté poly-disciplinaire
Tétouan

Année universitaire 2004/2005
Module : Méthodes Quantitatives I
Enseignant :M. El Merouani

Contrôle continu n° 1 de STATISTIQUE I

Durée 1 heure

Exercice : (4 points)

Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 5% les deux premières années, de 7% les trois années suivantes et de 4% l'année d'après. Quelle est, en pourcentage, son augmentation annuelle moyenne ?

Problème : (16 points)

On considère la distribution statistique des salaires annuels du personnel d'une entreprise (en milliers de DH) :

Salaires compris entre	Nombre des employés
40 et 50	12
50 et 60	14
60 et 70	20
70 et 80	30
80 et 90	14
90 et 100	10

1. Calculer les fréquences relatives et les fréquences relatives cumulées croissantes et décroissantes.
2. Quel est le pourcentage des employés qui ont un salaire annuel :
   a) Inférieur à 80 000 DH ?
   b) Supérieur à 70 000 DH ?
   c) Compris entre 70 000 et 75 000 DH ?
3. Représenter l'histogramme et le polygone des fréquences.
4. Déterminer le mode et la médiane graphiquement et par le calcul. Donner leurs interprétations.
5. Déterminer le salaire annuel moyen par la méthode directe et par un changement d'origine convenable.
6. Quelle est la moyenne quadratique de cette distribution des salaires ?

Correction du contrôle continu n° 1 de Statistique I

Exercice :

L'augmentation moyenne annuelle est une moyenne géométrique

$$G = \sqrt[6]{(1{,}05)^2 (1{,}07)^3 (1{,}04)} \qquad 1{,}5$$

$$G = 1{,}0582 \qquad 1{,}5$$

soit un taux de croissance 5,82% approximativement. 1

Problème :

1°/

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	$f_i = \frac{n_i}{N}$	$f_iC\nearrow$	$f_iC\searrow$	$n_iC\nearrow$	$n_iC\searrow$
[40,50[	12	0,12	0,12	1	12	100
[50,60[	14	0,14	0,26	0,88	26	88
[60,70[	20	0,2	0,46	0,74	46	74
[70,80[	30	0,3	0,76	0,54	76	54
[80,90[	14	0,14	0,9	0,24	90	24
[90,100[	10	0,1	1	0,1	100	10
Total	N=100	1				

2°/ a) Pour chercher le pourcentage des employés qui ont un salaire annuel "Inférieur à" à 80 000 DH, on cherche dans la colonne des $f_iC\nearrow$ et en face de la classe qui a la valeur 80 comme borne supérieure, on trouve $f_i = 0{,}76$; alors le pourcentage cherché est 76 %

b) Cette fois-ci, en face de la classe qui la valeur 70 comme borne inférieure, dans la colonne des $f_i c \searrow$, on trouve $f_i = 0{,}54$; alors le pourcentage cherchée est 54 %

c) on a : pour la classe $[70,80[$ lui correspond $f_i = 0{,}3$

$[70,75[\longrightarrow X$

$$\text{d'où } X = \frac{0{,}3 \times 75}{80} = \frac{22{,}5}{80} = 0{,}281$$

alors le pourcentage cherché est $\simeq 28\%$

Autre méthode :

$70 \longrightarrow 0{,}2$

$75 \longrightarrow X$

$80 \longrightarrow 0{,}3$

par l'interpolation linéaire, on a :

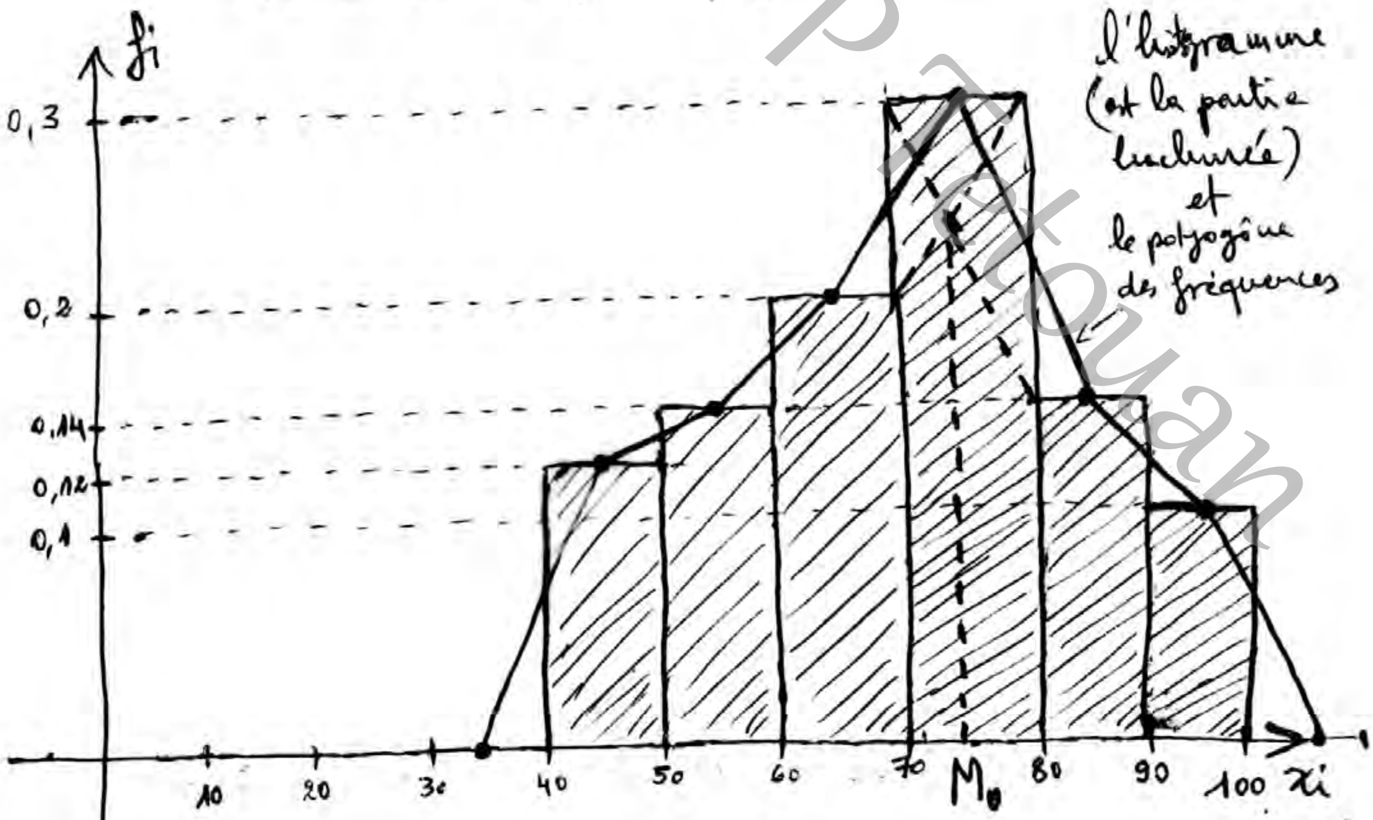
$$\frac{75-70}{80-70} = \frac{X - 0{,}2}{0{,}3 - 0{,}2}$$

d'où $X = 0{,}2 + (0{,}3 - 0{,}2) \cdot \frac{75-70}{80-70} = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}5$

$X = 0{,}25$

c'est-à-dire le pourcentage cherché est 25 %.

3°/



4°/ le mode :

Graphiquement, voir le histogramme précédent (méthodes des diagonales)

par le calcul :

On a bien remarqué que les amplitudes des classes sont égales
La classe modale est [70,80[, puisqu'elle correspond à l'effectif le plus grand.

par application de la formule $M_o = l_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} a_i$

$$M_o = 70 + \frac{0,14}{0,2 + 0,14} 10 \simeq \boxed{74,12}$$

et par application de la formule $M_o = l_{i-1} + \frac{h_i - h_{i-1}}{(h_i - h_{i+1}) + (h_i - h_{i-1})} a_i$

$$M_o = 70 + \frac{0,3 - 0,2}{(0,3 - 0,14) + (0,3 - 0,2)} \cdot 10 = 70 + \frac{0,1}{0,16 + 0,1} \cdot 10$$

$$\boxed{M_o = 73,85}$$

Interprétation :

le salaire annuel le plus fréquent est 74 120 DH.

la médiane :

par le calcul : $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ n'existe pas exactement parmi les $n_{ic}\uparrow$.

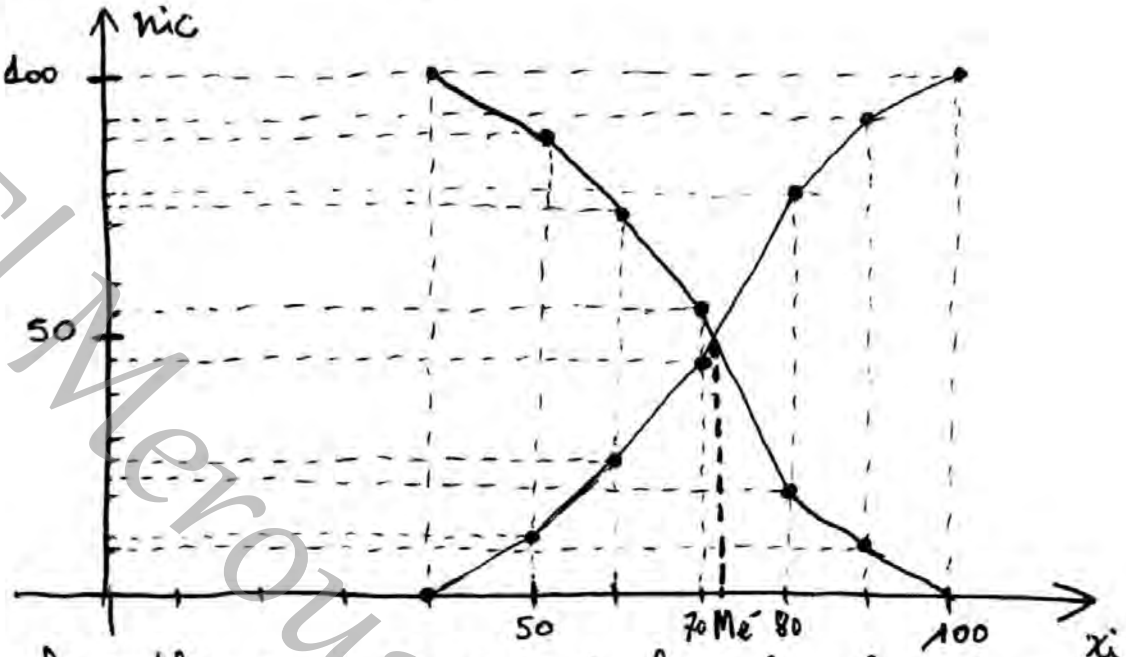
Alors, on cherche la valeur qui dépasse 50 pour la 1ère fois, celle-ci est 76, elle correspond à la classe [70,80[, donc la classe modale est [70,80] et on applique la formule :

$$Mé = l_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - n_{i-1}c\uparrow}{n_i} a_i$$

$$\Rightarrow Mé = 70 + \frac{50 - 46}{30} 10 = 71,33 \in [70,80]$$

Méthode graphique :

On représente la courbe des effectifs cumulés croissants et décroissants sur le même repère, alors la projection du point d'intersection de ces deux courbes sur l'axe des abscisses donne la médiane



On voit que la médiane est presque égale à la valeur trouvée par le calcul 71,33.

Interprétation :

On a : $\frac{N}{2} = 50$ et $Mé = 71,33 \cdot 10^3$ DH $= 71330$ DH

Il y a 50 employés qui ont un salaire inférieur à 71330 DH et 50 autres qui ont un salaire supérieur à 71330 DH.

5°/ Moyenne arithmétique par la méthode directe :

On utilise la formule suivante : $\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} n_i c_i$

où c_i représentent les centres de classes.

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	c_i	$n_i c_i$	$c_i - c_4 = c_i'$	$n_i c_i'$	c_i^2	$n_i c_i^2$
[40,50[	12	45	540	−30	−360	2025	24300
[50,60[	14	55	770	−20	−280	3025	42350
[60,70[	20	65	1300	−10	−200	4225	84500

[70,80[	30	75	2250	0	0	5625	168750
[80,90[	14	85	1190	10	140	7225	101150
[90,100[	10	95	950	20	200	9025	90250
Total	100		7000		-500		511300

Donc $\boxed{\overline{X} = 70}$

le salaire annuel moyen est 70.000 DH.

Moyenne arithmétique par un changement d'origine convenable :

$$\overline{X}' = \overline{X} - C_4 \Rightarrow \overline{X} = \overline{X}' + C_4$$

or $\overline{X}' = \frac{-500}{100} = -5$ donc $\overline{X} = 75 - 5 = 70$

On retrouve la même valeur, le salaire annuel moyen est 70.000 DH.

6°/ Moyenne quadratique Q

on a $Q = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2} = \sqrt{5113}$ 1,5

donc $Q = 71,50$ 1