Exercices

Exercice n°1 :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = 1/3 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer v_n en fonction de n.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice 2 :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ où a une constante réelle quelconque.

Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{4}{n^2 - 1}$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{4}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$
3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = 3 - \dfrac{4n+2}{n(n+1)}$
4) En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2}{n^2 - 1}$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$
3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

1. Déterminer les réels a et b tels que : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$. Calculer S_n et la limite S de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite définie sur $N*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de $N*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

Exercice 7 :

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$;
2. Etudier la convergence de la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$

3. Etudier la convergence des séries de terme général : a) $u_n = \frac{3}{n^2+1}$
4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$.
5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+n}$ de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$.

Exercice 8 :

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$.
4. Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n = \frac{n+1}{n!}$; $v_n = \frac{1}{n!}$

Correction

Exercice n°1

1) Pour tout entier $n \in N^*$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n}u_n}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{u_n}{n} = \frac{1}{3}v_n$

2) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{3}$

3) Pour tout $n \in N^*$, $v_n = \frac{1}{3}v_{n-1} = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Puisque pour tout $n \in N^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$, on aura $u_n = nv_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 2

$u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ .posons $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n\ln a - \alpha\ln n = n\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln a - \alpha\frac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n tend vers l'infini , le comportement de $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$ est celui de a^n pour $a \neq 1$.

Exercice 3

$n=2 \quad \frac{2}{2-1}-\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

$n=3 \quad \frac{2}{3-1}-\frac{2}{3+1}=1-\frac{1}{2}$

$n=4 \quad \frac{2}{4-1}-\frac{2}{4+1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$

$n=5 \quad \frac{2}{5-1}-\frac{2}{5+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=6 \quad \frac{2}{6-1}-\frac{2}{6+1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$

$n=7 \quad \frac{2}{7-1}-\frac{2}{7+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$n=8 \quad \frac{2}{8-1}-\frac{2}{8+1}=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{2}{p-3-1}-\frac{2}{p-3+1}=\frac{2}{p-4}-\frac{2}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{2}{p-2-1}-\frac{2}{p-2+1}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{2}{p-1-1}-\frac{2}{p-1+1}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}$

$n=p \quad \frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1}=\frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, d'où

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ et $a=2\ ;\ b=-2$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=3-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}\right)=3-\frac{4n+2}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=$$

$$3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right)=3-4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}u_k\right)=3$

<u>Exercice 4</u>

$n=2 \quad \frac{1}{2-1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$

$n=3 \quad \frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$n=4 \quad \frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

$n=5 \quad \frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

$n=6 \quad \frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

$n=7 \quad \frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$

$n=8 \quad \frac{1}{8-1}-\frac{1}{8+1}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{1}{p-3-1}-\frac{1}{p-3+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{1}{p-2-1}-\frac{1}{p-2+1}=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{1}{p-1-1}-\frac{1}{p-1+1}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}$

$n=p \quad \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=\frac{3}{2}$

<u>Exercice 5</u>

$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. on a : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$ et $\frac{1}{n^2+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente en vertu du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1=u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $S_2=u_1+u_2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$S_2=u_1+u_2+u_3=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent, on obtient :

$$S_2=u_1+u_2+u_3+..........u_{n-1}+u_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+........+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Par définition de la somme d'une série , on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

<u>Exercice 6</u>

$$u_n=\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}.$$

1. $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}$ d'où

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2<0$.
3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

<u>Exercice 7</u>

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1+2+2^2+.........+2^n$ diverge car $\sum_{n=0}^{p} 2^n = 1+2+2^2+.........+2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1}-1$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p\to+\infty} (2^{p+1}-1) = +\infty$.

2. la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1[er] terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$, la série converge puisque :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2$; $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ($q=\frac{1}{2}<1$)

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge , on écrit : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 2$.

3 .On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$; on a : $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ pour tout n ; or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (comme série de Riemann avec $\alpha=2$), donc la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge .

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, on peut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente .

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$, la série de terme général $\frac{3}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente.

4. On considère la série positive $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $U_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^2}$

On a : $n^2U_n = \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{n^2}{4n^2+4n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2U_n = \frac{1}{4}$, par conséquent , la règle de Riemann s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge .

Quand n tend vers l'infini , u_n est un équivalent de $\frac{1}{4n^2}$, on reconnaît le terme général d'une série de Riemann qui avec $\alpha=2>1$ est une série qui converge , donc la série de terme général u_n converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives .

5. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ répond au critère d'une série alternée :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on a pour tout $n>0$, $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} \le v_n$ ou ($|u_{n+1}| \le |u_n|$)($x \mapsto \frac{1}{x}$)

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Cette série est appelée la ***<u>série harmonique alternée</u>***

6.1a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout *n* entier naturel on a :

$\left|u_{n+1}\right| = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = \left|u_n\right|$.Ainsi, la suite définie par $\left|u_n\right| = \frac{1}{2n+1}$ est décroissante

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n\right| = 0$, donc 1a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente

7. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.

En effet, pour tout *n* entier naturel on a : $\left|u_n\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ $\left|u_{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2} = \left|u_n\right|$.

Ainsi, la suite définie par $\left|u_n\right| = \frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n\right| = 0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est convergente.

8. $0 < \frac{n^2}{2^n+n} < \frac{n^2}{2^n} = v_n$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n en utilisant la règle d'Alembert

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1$ donc la série de terme général v_n est convergente .D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs , la séries de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$ est convergente également .

<u>Exercice 8</u>

1. soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; pour tout $n > 0$ $\left|u_n\right| = \left|\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \le \frac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann), donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|u_n\right|$ converge (critère de comparaison

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente , $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ est convergente .

2. Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$. Pour tout $n > 0$, on a : $0 \le \frac{\arctan n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$, donc $0 \le u_n < \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann)donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ est convergente.

3. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{(n+1)!}\right) / \left(\frac{n+1}{n!}\right) = \frac{n+2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, $0 < 1$

Donc d'après la règle d'Alembert , la série $\sum \frac{n+1}{n!}$ est convergente

4. On a : $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n - \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{\sqrt{n}}{n-2} - \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{n\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{n(n+1)} = \dfrac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, cette expression est positive pour tout $n > 2$. On a donc $u_n > \dfrac{\sqrt{n}}{n}$ ou $u_n > \dfrac{1}{n^{1/2}}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge (comme série de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), on déduit donc que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente .on peut aussi la règle d'équivalence : $\dfrac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{n}$ donc $\dfrac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général $\dfrac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente.

<u>Quelques séries numériques de référence :</u> Série harmonique : c'est la série : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Bien que son terme général tend vers 0 en + ∞, cette série est <u>divergente</u> en effet :

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\ termes} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4\ termes} + \dots\dots\dots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\ termes} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4\ termes} + \dots\dots\dots + \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 2 \times \frac{1}{4} \ ; \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 4 \times \frac{1}{8} \ ; \quad \dots\dots\dots\dots\dots \ ; \qquad \frac{1}{2^{p-1}+1} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2^p} \geq 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + \dots\dots + 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2} \underbrace{(1+1+1+\dots\dots\dots+1)}_{p} \ ; \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{p}{2}$$

soit n un entier naturel non nul, soit p la ***<u>partie entière</u>*** du nombre $\dfrac{\ln n}{\ln 2}$, on a : n $\geq 2^p$ et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{p}{2}$

quand n tend vers $+\infty$, p tend également vers + ∞ d'ou la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

<u>III. Raisonnement par Récurrence.</u>

<u>Propriété</u> : Soit P(n) une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Etape 1 : Vérification (initialisation)

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : P(0) ou P(1) est vraie.

Etape 2 : Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et on démontre que si elle est vraie pour le rang n elle est vraie pour le rang n + 1.

Si pour tout entier n ≥ n_0 on a P(n) vraie ⇒ P(n+1)vraie.

<u>Exercice 3.</u> Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3.

Soit à démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. $P_{n0=1}$: $1^3 = 1^2$

On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Somme des n premiers cubes (non nuls) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration :

Le principe est le même que pour la somme des n premiers carrés ,

posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$

la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

on obtient en faisant varier k de 1 à n , n équations que l'on peut ajouter membre à membre :

$2^4 - 1^4 = 4 \times 1^3 + 6 \times 1^2 + 4 \times 1 + 1$

$3^4 - 2^4 = 4 \times 2^3 + 6 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1$

$\dots$

$\underline{(n+1)^4 - n^4 = 4 \times n^3 + 6 \times n^2 + 4 \times n + 1}$

$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$

en isolant S_3 on obtient la formule de la somme des cubes.

Somme des n premiers carrés (non nuls) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

démonstration :

posons :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ on sait que : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$$\cancel{2^3} - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$
$$\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$$
$$\cancel{4^3} - \cancel{3^3} = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$$
....
$$\underline{(n+1)^3 - n^3 = 3\times n^2 + 3\times n + 1}$$
$$(n+1)^3 - 1 = 3\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3\times(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$
$$(n+1)^3 - 1 = 3\times S_2 + 3\times S_1 + n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$3S_2 = \frac{(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right]$$
$$S_2 = \frac{(n+1)}{6}\left[2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n\right]$$
$$S_2 = \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + n)$$
$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

www.Tifawt.com

Formation gratuite en économie et gestion.