ROYAUME DU MAROC
Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

المملكة المغربية
جامعة ابن زهر
كلية العلوم القانونية
والإقتصادية و الإجتماعية
اكادير





# EXERCICES D'ANALYSE DES DONNEES
## SEMESTRE 6
## 2010-2011

**Pr. RACHIDI**

**Exercice 1 :**
Sur un échantillon de 125 étudiants d'une faculté, interrogés pour savoir s'ils ont l'intention de voter aux prochaines élections de leur association, 45 ont répondu positivement.
1- Donner une estimation ponctuelle de la proportion de l'ensemble des étudiants de cet établissement qui ont l'intention de voter aux prochaines élections.
2- Estimer ce paramètre par un intervalle de 95% de confiance.

**Réponse :**



1- $\hat{p} = \overline{p} = \frac{45}{125} = 0,36$.

2-

$$p \subset \left[\overline{p} - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \text{ avec une confiance de } 95\%.$$

$$Donc : p \in \left[0.36 - 1,96\sqrt{\frac{0,36\times 0,64}{125}} ; 0,36 + 1,96\sqrt{\frac{0,36\times 0,64}{125}}\right] = [0,28; 0,44]$$

**Exercice 2 :**
Une entreprise agroalimentaire spécialisée dans les plats cuisinés individuels utilise un robot qui verse la purée dans des barquettes en aluminium.
En principe chaque barquette doit contenir 100g de purée. Ce poids noté $\mu_0$ est appelé la norme. Le robot peut se dérégler, on ignore donc le poids moyen réel (noté μ) effectivement versé par barquette.
L'entreprise veut contrôler régulièrement le bon fonctionnement du robot. Pour cela, chaque jour à heure fixe, un employé prélève 50 barquettes et détermine sur cet échantillon le poids moyen de purée par barquette. On notera $\overline{X_i}$ la valeur qu'il obtient le jour i.
Compte tenu des fluctuations d'échantillonnage, $\overline{X_i}$ peut être différent de la norme sans que le robot soit mal réglé.
Supposant que le poids X (en grammes) de purée par barquettes a pour écart type σ=10g.
Tester au seuil de signification α=5%, l'hypothèse H0 : $\mu = \mu_0$ contre H1 : $\mu \neq \mu_0$ dans les deux cas suivants :
a) le contrôleur obtient sur l'échantillon de 50 barquettes : $\overline{X_i} = 97,5$g.
b) le contrôleur obtient sur l'échantillon de 50 barquettes : $\overline{X_i} = 103$g.

**Réponse :**
La taille de l'échantillon est assez grande (n=50>30), dont le poids X de purée suit une loi normale. Un intervalle de confiance à 95% est donnée par :

$$\left[\overline{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[100 - 1,96\frac{10}{\sqrt{50}} ; 100 + 1,96\frac{10}{\sqrt{50}}\right]$$
$$= [97,2; 102,8]$$

Au seuil de 5%, le contrôleur décidera donc :
- « d'accepter » H0 le jour où $\overline{X_i} = 97,5$g. (puisque 97,2<97,5<102,8).
- « de rejeter » H0 le jour où $\overline{X_i} = 103$g. (puisque 103>102,8)

**Exercice 3:**

Dans une école, un pédagogue veut évaluer 3 méthodes d'enseignements. Pour ce faire, il divise un groupe de 24 sujets en 3 groupes de tailles égales. Chacun de ces groupes adopte une méthode différente d'apprentissage et un même test (sur 10 points) permet d'évaluer les connaissances de chaque sujet à la fin de la période. Les résultas sont donnés dans le tableau suivant :

| | Test | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Méthode 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 8 | 4 | 3 | 9 |
| Méthode 2 | 4 | 4 | 3 | 8 | 7 | 4 | 2 | 5 |
| Méthode 3 | 6 | 7 | 8 | 6 | 7 | 9 | 10 | 9 |

Peut-on dire que les 3 méthodes d'apprentissages donnent des résultats identiques au niveau de la note moyenne au test avec un seuil de signification de 5%?

**Réponse :**

On cherche à confronter au niveau $\alpha$=5% l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contre

$H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes dans chaque groupe :

| Méthode | Taille de l'échantillon | Somme | Moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1=8$ | 38 | $\overline{X}_1=4{,}75$ |
| 2 | $n_2=8$ | 37 | $\overline{X}_2=4{,}625$ |
| 3 | $n_3=8$ | 62 | $\overline{X}_3=7{,}75$ |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 5{,}71$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2 = 136{,}96$$

$$\text{SCF} = \sum_{i=1}^{3} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 50{,}08$$

$$\text{SCE} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = 86{,}88$$

4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre les groupes | SCF = 50,08 | 2 | CMF = 25,04 | F = 6,05 |
| A l'intérieur des groupes | SCE = 86,88 | 21 | CME = 4,14 | |
| Totale | SCT = 136,96 | 23 | | |

5- Décision :
On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (2 ; 21) = 3,47
Et puisque F = 6,05 > 3,47 = F(2 ;21), alors on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que les méthodes diffèrent significativement.

## Exercice 4:

Une entreprise alimentaire veut mettre sur le marché une nouvelle gamme de pâtes alimentaires. Les consultants en marketing ont proposé 4 emballage et pour déterminer, le choix final, 10 marchés d'alimentation de même taille ont été sélectionnés pour faire une pré vente du produit. Les emballages ont été choisis aléatoirement entre les marchés. Les résultas sont donnés dans le tableau suivant :

| Emballage | Vente | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 18 | |
| 2 | 14 | 12 | 13 |
| 3 | 19 | 17 | 21 |
| 4 | 24 | 30 | |

Déterminer s'il y a des différences entre les emballages au niveau de 5% ?

**Réponse :**

On cherche à tester au niveau $\alpha$=5% l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ contre

$H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes dans chaque groupe :

| *Groupes* | *Taille de l'échantillon* | *Somme* | *Moyenne* |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1=2$ | 30 | $\overline{X}_1=15$ |
| 2 | $n_2=3$ | 39 | $\overline{X}_2=13$ |
| 3 | $n_3=3$ | 57 | $\overline{X}_3=19$ |
| 4 | $n_4=2$ | 54 | $\overline{X}_4=27$ |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 18$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$SCT = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X})^2 = 304$$

$$SCF = \sum_{i=1}^{4} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 258$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = 46$$

4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre les groupes | SCF = 258 | k-1=3 | CMF = 86 | F = 11,21 |
| A l'intérieur des groupes | SCE = 46 | n-k=6 | CME = 7,67 | |
| Totale | SCT = 304 | n-1=9 | | |

5- Décision :
On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (3 ; 6) = 4,76
Et puisque F = 11,21 > 4,76 = F(3 ;6), alors on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que les méthodes diffèrent significativement.

## Exercice 5:

Trois unités de production d'une usine montrent des différences sur les quatre trimestres d'une année. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

| Trimestres | Unités de production | | |
|---|---|---|---|
| | Unité 1 | Unité 2 | Unité 3 |
| T1 | 24 | 7 | 12 |
| T2 | 11 | 8 | 12 |
| T3 | 15 | 9 | 11 |
| T4 | 10 | 15 | 13 |

Déterminer s'il y a des différences entre les productions moyennes des trois unités au niveau de signification $\alpha$=5% ?

**Réponse :**

On cherche à tester au niveau de signification $\alpha$=5% l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contre $H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes dans chaque groupe :

| Méthode | Taille de l'échantillon | Somme | Moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1=4$ | 60 | $\overline{X}_1=15$ |
| 2 | $n_2=4$ | 39 | $\overline{X}_2=9{,}75$ |
| 3 | $n_3=4$ | 48 | $\overline{X}_3=12$ |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 12{,}25$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$\mathrm{SCT} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2 = 218{,}25$$

$$\mathrm{SCF} = \sum_{i=1}^{3} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 55{,}50$$

$$\mathrm{SCE} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = 162{,}75$$

4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre les groupes | SCF = 55,50 | 2 | CMF = 27,75 | F = 1,53 |
| A l'intérieur des groupes | SCE = 162,75 | 9 | CME = 18,08 | |
| Totale | SCT = 218,25 | 11 | | |

5- Décision :
On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (2 ; 9) = 4,26
Et puisque F = 1,53< 4,26, alors on accepte l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que s'il n'y a pas de différences entre les productions moyennes des trois unités au niveau de signification $\alpha$=5%.

## Exercice 6:

Un botaniste vérifie 5 variétés de maïs dans 5 parcelles de terre de mêmes dimensions et de même fertilité. Voici les récoltes obtenues pour chaque variété dans chaque parcelle :

| | Récoltes | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Variété 1 | 4 | 3 | 6 | 2 | 2 |
| Variété 2 | 7 | 8 | 9 | 8 | 5 |
| Variété 3 | 10 | 14 | 12 | 9 | 5 |
| Variété 4 | 16 | 14 | 10 | 7 | 3 |
| Variété 5 | 10 | 13 | 12 | 10 | 14 |

Au niveau de signification de 5%, est-ce que les variétés de maïs produisent la même récolte ?

**Réponse :**

On cherche à tester au niveau $\alpha$=5% l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ contre $H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes pour chaque variété :

| Variété | Taille de l'échantillon | Somme | Moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1$=5 | 17 | $\overline{X}_1$=3,4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | $n_2=5$ | 37 | $\overline{X_2}=7,4$ |
| 3 | $n_3=5$ | 50 | $\overline{X_3}=10$ |
| 4 | $n_4=5$ | 50 | $\overline{X_4}=10$ |
| 5 | $n_4=5$ | 59 | $\overline{X_5}=11,8$ |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 8,52$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2 = 402,24$$

$$\text{SCF} = \sum_{i=1}^{4} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 213,04$$

$$\text{SCE} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 = 189,2$$



4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Facteur | SCF = 213,04 | k-1=4 | CMF = 53,26 | F = 5,63 |
| Erreur | SCE = 189,2 | n-k=20 | CME = 9,46 | |
| Totale | SCT = 402,24 | n-1=24 | | |

5- Décision :

On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (4 ; 20) = 2,87
Et puisque F = 5,63 > 2,87 = F(4 ;20), alors on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que les récoles sont différentes.

## Exercice 7:

Compléter la table ANOVA suivante et conclure :

| Source de variation | SC (somme des carrés) | d.d.l | CM (carrés moyens) | F |
|---|---|---|---|---|
| Facteur | 154,92 | 4 | ? | |
| Erreur | ? | ? | ? | ? |
| total | 200,48 | 34 | | |



**Réponse :**

| Source de variation | SC (somme des carrés) | d.d.l | CM (carrés moyens) | F |
|---|---|---|---|---|
| Facteur | 154,92 | 4 | 38,73 | |
| Erreur | 45,56 | 30 | 1,52 | 25,48 |
| total | 200,48 | 34 | | |

- Pour $\alpha$ = 5%, la table de la loi de Fisher donne :
  F(lue dans la table) = F(4,30) = 2,69.
- La valeur trouvée pour F dans le tableau est supérieure à la valeur théorique.
- On rejette donc l'hypothèse nulle de l'égalité des moyennes

## Exercice 8:

On désire comparer 4 médicaments anti-douleur. Sur 24 patients repartis au hasard en 4 groupes, on a administré le médicament relatif au groupe pendant une semaine. A chaque jour, le patient notait la perception de douleur sur une échelle de 0 à 10. Les moyennes des 7 jours sont présentées dans le tableau suivant.

| médicaments | observations | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,4 | 4,6 | 5,4 | 3,5 | 2,5 | 2,3 |
| 2 | 6,6 | 7,9 | 6,3 | 9,1 | 5,1 | 6,6 |
| 3 | 6,9 | 9,3 | 8,6 | 9,1 | 7,5 | 6,3 |
| 4 | 9,3 | 8,1 | 6,9 | 8,5 | 8,3 | 5,8 |

Faire une analyse de la variance de niveau de confiance 95% ($\alpha$=0,05) pour vérifier si les médicaments sont aussi efficaces les uns que les autres.



**Réponse :**

On cherche à tester au niveau $\alpha$=5% les hypothèses :
$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ contre $H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes dans chaque groupe :

| Groupes | Taille de l'échantillon | Somme | Moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1=6$ | 23,7 | $\overline{X}_1=3{,}95$ |
| 2 | $n_2=6$ | 41,6 | $\overline{X}_2=6{,}93$ |
| 3 | $n_3=5$ | 47,7 | $\overline{X}_3=7{,}95$ |
| 4 | $n_4=6$ | 46,9 | $\overline{X}_4=7{,}81$ |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 6{,}66$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2 = 97{,}27$$

$$SCF = \sum_{i=1}^{4} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 62,52$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = 34,75$$

4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre les groupes | SCF = 62,58 | k-1=3 | CMF = 20,84 | F = 11,98 |
| A l'intérieur des groupes | SCE = 34,75 | n-k=20 | CME = 1,74 | |
| Totale | SCT = 97,27 | n-1=23 | | |

5- Décision :
On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (2; 20) = 3,10
Et puisque F = 11,98 > 3,10 = F(3 ;20), alors on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que les médicaments sont différent.

## Exercice 9:

On s'intéresse à l'effet de trois médicaments. Les résultats sont dans le tableau suivant :

| médicaments | Patients | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| M1 | 10 | 15 | 20 | 15 |
| M2 | 20 | 25 | 15 | 20 |
| M3 | 30 | 20 | 25 | x |

1) Écrivez, en fonction de x, l'expression de la somme des carrés totale.

2) Écrivez, en fonction de x, l'expression de la somme des carrés des effets des médicaments.
3) Déduisez de (1) et (2) l'expression de la somme des carrés des erreurs(en fonction de x).
4) Pour quelles valeurs de x, l'hypothèse nulle sur l'égalité des effets des trois médicaments sera-t-elle rejetée ?

<u>**Réponse :**</u>

$$SCT = \frac{11x^2 - 430x + 8075}{12}$$

$$SCF = \frac{x^2 + 10x + 325}{6}$$

$$SCE = \frac{9x^2 - 450x + 7425}{12}$$

$$F = \frac{\dfrac{\frac{x^2 + 10x + 325}{6}}{2}}{\dfrac{\frac{9x^2 - 450x + 7425}{12}}{9}} = \frac{9x^2 + 90x + 2925}{9x^2 - 450x + 7425}$$

On a pour $\alpha$=5% : F(2;9) = 4.26
On rejette H0 si F est supérieur à 4.26.
C à d si :

$$F = \frac{9x^2 + 90x + 2925}{9x^2 - 450x + 7425} \succ 4,26$$



Donc si :

$$20,37 \prec x \prec 48,04$$



## Exercice 9:

On désire comparer un indicateur V entre 3 groupes de patients atteints de 3 formes cliniques d'une maladie notées A, B, C.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 19,5 | 38 | 33,2 | 52,2 | 77,4 | 92,6 | 77,4 | 48,3 | 95,6 | 51,5 | 34,3 | | |
| B | 44,1 | 29,5 | 68,8 | 34,9 | 51,2 | 42,5 | 32 | 92,2 | 84,5 | 61,2 | 65,8 | 53,1 | 87,2 |
| C | 76,6 | 88,3 | 83,4 | 88,2 | 87,3 | 96 | 85,6 | 100,2 | 84,8 | 93,5 | 134,6 | 124,7 | |

Peut-on affirmer au risque 5% que l'indicateur ne diffère pas entre les formes cliniques ?

**Réponse :**

On cherche à confronter au niveau $\alpha$=5% l'hypothèse $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contre $H_1$ : Au moins 2 moyennes sont différentes.

1- Calcul des moyennes dans chaque groupe :

| Méthode | Taille de l'échantillon | Somme | Moyenne |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1$=11 | 56,36 | $\overline{X}_1$=4,75 |
| 2 | $n_2$=13 | 57,46 | $\overline{X}_2$=4,625 |
| 3 | $n_3$=12 | 95,27 | $\overline{X}_3$=7,75 |

2- Calcul de la moyenne globale :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = 69{,}73$$

3- Calcul des sommes des carrés et des carrés moyens :

$$SCT = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \overline{X})^2 = 27040{,}23$$

$$SCF = \sum_{i=1}^{3} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = 11747{,}4i$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = 15292{,}82$$

4- Tableau ANOVA :

| Source de variation | Somme des carrés | d.d.l | SC/d.d.l | F |
|---|---|---|---|---|
| Entre les groupes | SCF = 11747,41 | 2 | CMF = 5873,70 | F = 12,67 |
| A l'intérieur des groupes | SCE = 15292,82 | 33 | CME = 463,42 | |
| Totale | SCT = 27040,23 | 35 | | |

5- Décision :

On a la valeur de F de Fisher lue sur la table est : F (2 ; 21) = 3,28

Et puisque F = 12,67 > 3,28, alors on rejette l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. On conclue que l'indicateur diffère entre les formes cliniques.

# Table de Fisher



[redacted] Distribution de $F$ (5%)

$\alpha = 5\%$

Cette table donne les valeurs pour lesquelles le pourcentage de la distribution de $F$ dans le titre est supérieur à la valeur tabulaire de $F$ pour $\nu_1$ (degrés de liberté du numérateur) et $\nu_2$ (degrés de liberté du dénominateur) associés au rapport $F$.

| Degré de liberté ($\nu_2$) | Degré de liberté ($\nu_1$) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 | 24 |
| 2 | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 9.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.5 |
| 3 | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.79 | 8.74 | 8.64 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 5.96 | 5.91 | 5.77 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.74 | 4.68 | 4.53 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.06 | 4.00 | 3.84 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.64 | 3.57 | 3.41 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.35 | 3.28 | 3.12 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.14 | 3.07 | 2.90 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 2.98 | 2.91 | 2.74 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.85 | 2.79 | 2.61 |
| 12 | 4.75 | 3.88 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.75 | 2.69 | 2.51 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.67 | 2.60 | 2.42 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.60 | 2.53 | 2.35 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.54 | 2.48 | 2.29 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.49 | 2.42 | 2.24 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.45 | 2.38 | 2.19 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 3.66 | 2.58 | 2.51 | 2.41 | 2.34 | 2.15 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.38 | 2.31 | 2.11 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.35 | 2.28 | 2.08 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.30 | 2.23 | 2.03 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.25 | 2.18 | 1.98 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.22 | 2.15 | 1.95 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.19 | 2.12 | 1.91 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.16 | 2.09 | 1.89 |
| 35 | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.11 | 2.04 | 1.83 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.08 | 2.00 | 1.79 |
| 45 | 4.06 | 3.20 | 2.81 | 2.58 | 2.42 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.05 | 1.97 | 1.76 |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.03 | 1.95 | 1.74 |
| 55 | 4.02 | 3.16 | 2.77 | 2.54 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.01 | 1.93 | 1.72 |