Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
www.lsjesr.ac.ma Économiques et Sociales, Rabat
Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Printemps–Été 2006/2007
Sections : A & B
Semestre : S_2

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé de la Série

Exercice 1

La fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

est une fonction rationnelle donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et en particulier sur le segment $[0,1]$. On peut donc lui appliquer la Formule de Taylor-Lagrange sur $[0,1]$ à l'ordre 2 :
$\exists c \in]0,1[$ tel que :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)$$

Comme

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1+x)^4}$$

alors, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -2$. Ainsi, la formule de Taylor-Lagrange donne :

$$(1+c)^4 = 2$$

c'est-à-dire, $c = \pm\sqrt[4]{2} - 1$. Mais comme $c \in]0,1[$ alors, le seul point vérifiant la Formule de Taylor-Lagrange appliquée à f est $c = \sqrt[4]{2} - 1$.

Exercice 2

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f_1(x) = \ln^2(1+x) = (\ln(1+x))^2$$

On sait que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

d'où,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (\ln(1+x))^2 \\
&= T_4\left[\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\right] + o(x^4) \\
&= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (\ln(1+x))^2 \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + o(x^4) \\
&= x^2\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)\right)^2 + o(x^4) \\
&= x^2\left(1 + 2\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2\right) + o(x^4) \\
&= x^2\left(1 - x + \frac{2x^2}{3} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2\left(1 - \frac{2x}{3}\right)^2\right) + o(x^4) \\
&= x^2\left(1 - x + \frac{2x^2}{3} + \frac{x^2}{4}\right) + o(x^4) \\
f_1(x) &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction :

$$f_2(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Posons le changement de variable $x = 1+h$, si $x \to 1$ alors $h \to 0$ et

$$f_2(x) = \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} = \frac{\ln(1+h)}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+h)}{1+h+\frac{h^2}{2}}\right)$$

ou encore,

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\ln(1+h)\left(\frac{1}{1+(h+\frac{h^2}{2})}\right)$$

On effectue le produit des parties régulières des DL des fonctions $\ln(1+h)$ et $\dfrac{1}{1+(h+\frac{h^2}{2})}$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+h) &= h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) \\
\frac{1}{1+(h+\frac{h^2}{2})} &= 1 - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + o(h) \\
&= 1 - h + o(h) \\
\ln(1+h)\left(\frac{1}{1+(h+\frac{h^2}{2})}\right) &= \left(h - \frac{h^2}{2}\right)(1-h) + o(h^2) \\
&= h - h^2 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\
&= h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{2}\left(h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}h - \frac{3}{4}h^2 + o(h^2) \\
f_2(x) &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}$$

Remarque : Pour trouver le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction

$$\frac{\ln(1+h)}{1+h+\frac{h^2}{2}}$$

on peut effectuer la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière du $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+h)$ par $1+h+\frac{h^2}{2}$.

$$
\begin{array}{llll|l}
h & -\frac{1}{2}h^2 & & & 1+h+\frac{1}{2}h^2 \\
\cline{5-5}
-h & -h^2 & -\frac{1}{2}h^3 & & h-\frac{3}{2}h^2 \\
\cline{1-3}
 & -\frac{3}{2}h^2 & -\frac{1}{2}h^3 & & \\
 & \frac{3}{2}h^2 & +\frac{3}{2}h^3 & +\frac{3}{4}h^4 & \\
\cline{2-4}
 & & h^3 & +\frac{3}{4}h^4 &
\end{array}
$$

On obtient ainsi,

$$\frac{\ln(1+h)}{1+h+\frac{h^2}{2}} = h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2).$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f_3(x) = (e^x - x)^{\frac{1}{3}}$$

On sait que :

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\
e^x - x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Posons $X = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, quand $x \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= (1+X)^{\frac{1}{3}} \\
&= 1 + \frac{1}{3}X + o(X) \\
&= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{18} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{18} + o(x^3).$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f_4(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right).$$

Posons

$$X = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

On remarque que si $x \to 0$ alors $X \to 1$ puisque

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \sim 1$$

Ainsi, la fonction $f_3(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_4(x) = e^X = e^{(X-1)+1} = e\, e^{X-1}$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
\frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
Y = X - 1 &= -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \\
e^Y &= 1 + Y + \frac{1}{2!}Y^2 + \frac{1}{3!}Y^3 + o(Y^3)
\end{aligned}
$$

Il vient,

$$
\begin{aligned}
e^Y &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2}\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}\right)^3\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8}\left(1 - 2\frac{2x}{3}\right) - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Enfin,

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= e e^Y \\
&= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) + o(x^3) \\
& \quad e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f_5(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$$

On sait que :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
1 + x + \sqrt{1+x} &= 2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
\ln(1 + x + \sqrt{1+x}) &= \ln\left[2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \ln(2) + \ln\left[1 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Posons $X = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2$, quand $x \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$\begin{aligned}
\ln(1+X) &= X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2) \\
&= \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2\right)^2 + o(x^2) \\
&= \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^2\left(1 - \frac{1}{12}x\right)^2 + o(x^2) \\
&= \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{32}x^2 + o(x^2) \\
&= \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \ln(2) + \ln(1+X) \\
&= \ln(2) + \left(\frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2\right) + o(x^2) \\
&= \ln(2) + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 2 au voisinage de 2 de la fonction :

$$f_6(x) = \sqrt{\ln(1+x)} = [\ln(1+x)]^{\frac{1}{2}}$$

Posons le changement de variable $x = 2 + h$, quand $x \to 2$ alors $h \to 0$ et

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= [\ln(3+h)]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\ln(3) + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\ln(3)}\left[1 + \frac{1}{\ln(3)}\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) &= \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + o(h^2) \\
\frac{1}{\ln(3)}\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) &= \frac{h}{3\ln(3)} - \frac{h^2}{18\ln(3)} + o(h^2)
\end{aligned}$$

Posons $X = \frac{h}{3\ln(3)} - \frac{h^2}{18\ln(3)}$, si $h \to 0$ alors $X \to 0$ et

$$\begin{aligned}
[1+X]^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{3\ln(3)} - \frac{h^2}{18\ln(3)}\right) \\
&\quad - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{3\ln(3)} - \frac{h^2}{18\ln(3)}\right)^2 + o(h^2) \\
&= 1 + \frac{h}{6\ln(3)} - \frac{h^2}{36\ln(3)} \\
&\quad - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{3\ln(3)}\right)^2\left(1 - \frac{h}{6}\right)^2 + o(h^2) \\
&= 1 + \frac{h}{6\ln(3)} - \frac{h^2}{36\ln(3)} - \frac{h^2}{72\ln^2(3)} + o(h^2) \\
&= 1 + \frac{1}{6\ln(3)}h - \frac{2\ln(3)+1}{72\ln^2(3)}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= \sqrt{\ln(3)}\left[1 + \frac{1}{\ln(3)}\ln\left(1 + \frac{h}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\ln(3)}\left[1 + \frac{1}{6\ln(3)}h - \frac{2\ln(3)+1}{72\ln^2(3)}h^2\right] + o(h^2) \\
f_6(x) &= \sqrt{\ln(3)} + \frac{1}{6\sqrt{\ln(3)}}h - \frac{2\ln(3)+1}{72\ln(3)\sqrt{\ln(3)}}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

• Déterminons le Développement Limité à l'ordre 3 au voisinage de ∞ de la fonction :

$$f_7(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}$$

Posons $h = \frac{1}{x}$, quand $|x| \to +\infty$, alors $h \to 0$ et

$$f_7(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{h^2}} - \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1} = \frac{1}{|h|}\left(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2}\right)$$

Cherchons le Développement Limité au voisinage de 0 de :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+h^2} &= 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^4) \\
\sqrt{1-h^2} &= 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + o(h^4)
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2} = h^2 + o(h^4)$$

$\rightsquigarrow$ au voisinage de $-\infty$

$$\begin{aligned}
f_7(x) &= -\frac{1}{h}\left(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2}\right) \\
&= -h + o(h^3) \\
f_7(x) &= -\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}
f_7(x) &= \frac{1}{h}\left(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2}\right) \\
&= h + o(h^3) \\
f_7(x) &= \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3

• Déterminons le Développement Généralisé à l'ordre 5 au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$f_1(x) = \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

On remarque que :

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \infty$$

Donc la fonction f_1 n'admet pas de Développement Limité au voisinage de 0, cependant elle admet un Développement Généralisé au voisinage de ce point. En effet,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)\right) \\
f_1(x) &= \frac{1}{x} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

• Déterminons le Développement Généralisé à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$f_2(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

On remarque que :

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$$

Donc la fonction f_2 n'admet pas de Développement Limité au voisinage de $+\infty$, cependant elle admet un Développement Généralisé au voisinage de $+\infty$. Posons $h = \frac{1}{x}$, quand $x \to +\infty$, alors $h \to 0^+$ et

$$f_2(x) = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}$$

Cherchons le Développement Limité au voisinage de 0 de :

$$\begin{aligned}
\frac{1-h}{1+h} &= 1-2h\left(\frac{1}{1+h}\right)\\
&= 1-2h(1-h+o(h))\\
&= 1-2h+2h^2+o(h^2)\\
&= 1+\left(-2h+2h^2+o(h^2)\right)
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-h}{1+h}} &= \left[1+\left(-2h+2h^2+o(h^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= 1+\frac{1}{2}(-2h+2h^2)-\frac{1}{8}(-2h+2h^2)^2+o(h^2)\\
&= 1-h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\\
&= \frac{1}{h}-1+\frac{h}{2}+o(h)\\
f_3(x) &= x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

• Déterminons le Développement Généralisé à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$f_3(x) = x^2\ln(x+1)-x^2\ln(x) = x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

On remarque que :

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \infty$$

Donc la fonction f_3 n'admet pas de Développement Limité au voisinage de $+\infty$, cependant elle admet un Développement Généralisé au voisinage de $+\infty$. Posons $h = \frac{1}{x}$, quand $x \to +\infty$, alors $h \to 0^+$ et

$$f_3(x) = \frac{1}{h^2}\ln(1+h)$$

Cherchons le Développement Limité au voisinage de 0 de :

$$\begin{aligned}
\ln(1+h) &= h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{4}h^4+o(h^4)\\
f_3(x) &= \frac{1}{h^2}\ln(1+h)\\
&= \frac{1}{h}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}h-\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\\
f_3(x) &= x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 4

• Étudions les branches infinies de la fonction définie par :

$$f_1(x) = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Posons $x = \frac{1}{h}$, quand $|x| \to +\infty$, alors $h \to 0$ et

$$f_1(x) = \frac{1}{h}\exp\left[\frac{1}{h}\ln(1+h)\right]$$

Or,

$$\begin{aligned}
\ln(1+h) &= h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)\\
\frac{1}{h}\ln(1+h) &= 1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{1}{h}\ln(1+h)\right] &= \exp\left[1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right]\\
&= e\,e^{-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)}
\end{aligned}$$

Posons $X = -\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}$, si $x \to 0$ alors $X \to 0$ Il vient,

$$\begin{aligned}
e^X &= 1+X+\frac{1}{2!}X^2+o(X^2)\\
&= 1+\left(-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}\right)^2+o(h^2)\\
&= 1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\right)^2\left(1-\frac{2h}{3}\right)^2+o(h^2)\\
&= 1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\frac{h^2}{8}+o(h^2)\\
&= 1-\frac{h}{2}+\frac{11h^2}{24}+o(h^2)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{h}ee^X\\
&= \frac{e}{h}\left[1-\frac{1}{2}h+\frac{11}{24}h^2+o(h^2)\right]\\
&= \frac{e}{h}-\frac{e}{2}+\frac{11e}{24}h+o(h)\\
f_1(x) &= ex-\frac{e}{2}+\frac{11e}{24x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc, la courbe représentative de f_1 admet au voisinage de l'infini une asymptote oblique d'équation $y = ex-\frac{e}{2}$.

• Étudions les branches infinies de la fonction définie par :

$$f_2(x) = x+\sqrt{x^2-1}$$

Posons $x = \frac{1}{h}$, quand $|x| \to +\infty$, alors $h \to 0$ et

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{h}+\sqrt{\frac{1}{h^2}-1}\\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{|h|}\sqrt{1-h^2}\\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{|h|}(1-h^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Or,

$$(1-h^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)$$

⇝ Au voisinage de $-\infty$:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{h}-\frac{1}{h}(1-h^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{h}-\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}-\frac{1}{h}+\frac{1}{2}h+o(h)\\
&= \frac{1}{2}h+o(h)\\
f_2(x) &= \frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f_2 admet la demi-droite d'équation $y=0$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

⇝ Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{h}+\frac{1}{h}(1-h^2)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{h}-\frac{1}{2}h+o(h)\\
&= \frac{2}{h}-\frac{1}{2}h+o(h)\\
f_2(x) &= 2x-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f_2 admet la demi-droite d'équation $y=2x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

• Étudions les branches infinies de la fonction définie par :

$$f_3(x)=(x-2)e^{\frac{1}{x}}$$

Posons $x=\frac{1}{h}$, quand $|x|\to+\infty$, alors $h\to 0$ et

$$f_3(x) = \left(\frac{1}{h}-2\right)e^h$$

Or,

$$\begin{aligned}
e^h &= 1+h+\frac{1}{2!}h^2+o(h^2)\\
f_3(x) &= \left(\frac{1}{h}-2\right)e^h\\
&= \left(\frac{1}{h}-2\right)\left(1+h+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}+1+\frac{1}{2}h-2-2h+o(h)\\
&= \frac{1}{h}-1-\frac{3}{2}h+o(h)\\
f_3(x) &= x-1-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f_3 admet la droite d'équation $y=x-1$ comme asymptote oblique au voisinage de l'infini.

Exercice 5

Calculons les limites suivantes via l'outil Développement Limité :

• $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1}=?$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons

$$f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1}$$

Soit le changement de variable $x=1+h$, si $x\to1$ alors $h\to0$ et

$$f(x)=\frac{(1+h)^2-\sqrt{1+h}}{(1+h)^2-1}=\frac{1+2h+h^2-\sqrt{1+h}}{2h+h^2}$$

Puisque la valuation du dénominateur de la fraction rationnelle est de l'ordre de 2, il suffit de développer, au voisinage de 0, le numérateur à un ordre $n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+h} &= 1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+o(h^2)\\
1+2h+h^2-\sqrt{1+h} &= 1+2h+h^2-1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{8}h^2+o(h^2)\\
&= \frac{3}{2}h+\frac{9}{8}h^2+o(h^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+2h+h^2-\sqrt{1+h}}{2h+h^2} &= \frac{\frac{3}{2}h+\frac{9}{8}h^2+o(h^2)}{2h+h^2}\\
&= \frac{\frac{3}{2}+\frac{9}{8}h+o(h)}{2+h}
\end{aligned}$$

Par passage à la limite il vient,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{3}{2}+\frac{9}{8}h+o(h)}{2+h}=\frac{3}{4}$$

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=?$

Cette limite est une Forme Indéterminée $+\infty-\infty$. Posons

$$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$$

Soit le changement de variable $h=\frac{1}{x}$, quand $x\to+\infty$ alors $h\to0^+$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}+1}-\frac{1}{h}\\
&= \sqrt{\frac{1+h+h^2}{h^2}}-\frac{1}{h}\\
&= \frac{1}{h}\left[1+(h+h^2)\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{h}\\
\left[1+(h+h^2)\right]^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}h+o(h)\\
f(x) &= \frac{1}{h}\left[1+(h+h^2)\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{h}\\
&= \frac{1}{h}\left[1+\frac{1}{2}h+o(h)\right]-\frac{1}{h}\\
&= \frac{1}{h}+\frac{1}{2}-\frac{1}{h}+o(1)\\
&= \frac{1}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite il vient,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{2}+o(1)=\frac{1}{2}$$

• $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=?$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
e^{x^2} &= 1+x^2+o(x^2)\\
\cos(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\\
\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1+x^2-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&= \frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&= \frac{3}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite il vient,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)=\frac{3}{2}.$$

• $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{x\ln(1+x)}=?$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\\
1+x-e^x &= -\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\\
\ln(1+x) &= x+o(x)\\
x\ln(1+x) &= x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite il vient,

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}=-\frac{1}{2}.$$

Exercice 6

Soit la fonction définie par :

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+ax+b+\frac{c}{x}$$

Trouvons les réels a, b et c pour que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

D'après Exercice 3, le Développement Généralisé de $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ au voisinage de $+\infty$ et à l'ordre 1 est donné par :

$$x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'où,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+ax+b+\frac{c}{x}\\
&= x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+ax+b+\frac{c}{x}\\
&= (1+a)x+(b-1)+\left(c+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite il vient,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 &\iff \begin{cases}1+a=0\\ b-1=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 7

Soient $a,b\in\mathbb{R}^\star$. Trouvons un équivalent au voisinage de 0 de la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$$

Comme

$$\begin{aligned}
e^{ax} &= 1+(ax)+\frac{1}{2!}(ax)^2+o(x^2)\\
e^{ax}-1 &= ax+\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2)\\
e^{bx} &= 1+(bx)+\frac{1}{2!}(bx)^2+o(x^2)\\
e^{bx}-1 &= bx+\frac{b^2}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} &= \frac{ax+\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2)}{bx+\frac{b^2}{2}x^2+o(x^2)}\\
&= \frac{a}{b}\left(\frac{1+\frac{a}{2}x+o(x)}{1+\frac{b}{2}x+o(x)}\right)
\end{aligned}$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes de $1+\frac{a}{2}x$ par $1+\frac{b}{2}x$.

$$\begin{array}{lll|l}
1 & +\frac{a}{2}x & & 1+\frac{b}{2}x\\ \cline{4-4}
-1 & -\frac{b}{2}x & & 1+\frac{(a-b)}{2}x\\ \cline{1-2}
 & \frac{(a-b)}{2}x & & \\
 & -\frac{(a-b)}{2}x & -\frac{b(a-b)}{4}x^2 & \\ \cline{2-3}
 & & \dots &
\end{array}$$

On obtient ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} &= \frac{a}{b}\left(1+\frac{(a-b)}{2}x\right)+o(x)\\
&= \frac{a}{b}+\frac{a(a-b)}{2b}x+o(x)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}-\frac{a}{b}\sim_0\frac{a(a-b)}{2b}x.$$

Exercice 8

Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{x} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$$

Trouvons le réel a pour que la fonction f soit continue en 0. Déterminons pour ceci le Développement au voisinage de 0 et à l'ordre 3 de :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) &= \ln\left(1+\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\right)\\
&= \left(x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\left(1+2\frac{x}{2}\right)+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\\
&= x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

en suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)\\
&= \frac{1}{x}-\frac{1}{6}x+o(x)\\
\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{x} &= \frac{-1}{6}x+o(x)
\end{aligned}$$

La fonction f est continue en 0 si et seulement si,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$$

si et seulement si,

$$a=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{6}x+o(x)\right)=0$$

En outre, d'après le Développement de $f(x)$, f est dérivable en 0 et en prenant le coefficient de x^1 on a :

$$f'(0)=\frac{-1}{6}.$$

Exercice 9

Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\ln(1-x+x^2)$$

$*$ Étudions la position de la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Déterminons pour ceci le Développemnt Limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(1-x+x^2) &= \ln\left(1+(-x+x^2)\right)\\
&= (-x+x^2)-\frac{1}{2}(-x+x^2)^2+o(x^2)\\
&= -x+x^2-\frac{(-x)^2}{2}(1-x)^2+o(x^2)\\
&= -x+x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
&= -x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)
\end{aligned}$$

Donc, la droite $y=-x$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Et comme

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-y)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=0^+$$

alors, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette tangente.

$*$ Étudions la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 1.
Déterminons pour ceci le Développemnt Limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 1 : posons le changement de variable $x=1+h$ et quand $x\to 1$ alors $h\to 0$ et on a :

$$f(x)=\ln\left(1-(1+h)+(1+h)^2\right)=\ln\left(1+h+h^2\right).$$

D'après la première partie,

$$\ln\left(1+h+h^2\right)=h+\frac{h2}{2}+o(h^2)$$

En remplaçant h par $(x-1)$ il vient,

$$f(x)=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

Donc, la droite $y=x-1$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. Et comme

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-y)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)\right)=0^+$$

alors, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette tangente.

Exercice 10

Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^3}{1+x^6}$$

Calculons les neuf premières dérivées au point 0 de f.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3\left(\frac{1}{1+x^6}\right)\\
&= x^3\left(1-x^6+o(x^6)\right)\\
&= x^3-x^9+o(x^9)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(0)=f''(0)=0$$
$$f^{(4)}(0)=f^{(5)}(0)=f^{(6)}(0)=f^{(7)}(0)=f^{(8)}(0)=0$$

et

$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=1 \iff f^{(3)}(0)=6$$
$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!}=-1 \iff f^{(9)}(0)=-9!.$$

Exercice 11

Soit la fonction définie par son Développement Limité à l'ordre 2 au voisinage du point d'abscisse -1 :

$$f(x)=e^{-1}-\frac{3e^{-1}}{2}(x+1)^2+o((x+1)^2)$$

Étudions localement cette fonction au point -1 :

⇝ Si $-1 \in D_f$ alors la fonction f est continue au point -1 et $f(-1) = e^{-1}$,

⇝ Si $-1 \notin D_f$ alors la fonction f est prolongeable par continuité au point -1 et son prolongement est donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ e^{-1} & x = -1 \end{cases}$$

⇝ l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est donnée par $y = e^{-1}$ et comme

$$\lim_{x\to -1}(f(x) - y) = \lim_{x\to -1} -\frac{3e^{-1}}{2}(x+1)^2 + o((x+1)^2 = 0^-$$

alors la courbe représentative de f est au dessous de la tangente,

⇝ D'après le Développement Limité donné on peut déterminer un équivalent de f :

$$f(x) - e^{-1} \sim_0 -3e^{-1}(x+1)^2$$

⇝ f est deux fois dérivable au point -1 et on a :

$$\begin{cases} f'(-1) & = & 0 \\ \dfrac{f''(-1)}{2!} & = & \dfrac{-3e^{-1}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(-1) & = & 0 \\ f''(-1) & = & -3e^{-1} \end{cases}$$

⇝ Comme $f'(-1) = 0$ alors le point $(-1, e^{-1})$ est un point critique de f,

⇝ Comme $f'(-1) = 0$ et le premier exposant de l'équivalence susmentionnée est paire ($(x+1)^2$), alors f_1 présente un extremum en ce point et comme en plus le coefficient de cet exposant $\frac{-3}{2}e^{-1} < 0$, alors la courbe représentative de f présente un maximum relatif au point $(-1, e^{-1})$,

⇝ Comme la courbe représentative de f présente un maximum relatif au point $(-1, e^{-1})$ alors f est concave au voisinage de ce point.