11 exercices corrigés de mathématiques:analyse

www.tifawt.com

Exercice 1 *Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad si\ x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}, \quad si\ x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad si\ x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 *Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*

$$f(x) = \sqrt{x} \quad si\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad et \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad si\ x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 *Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :*

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Exercice 4 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.*

Exercice 5 *Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 6 *Soient x et y réels avec $0 < x < y$.*

1. *Montrer que*

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. *On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par*

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 7 *Soit f_1, f_2 et f_2 les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et $f_2(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$*

1. *Calculer $f_1^{(n)}(0)$ et $f_2^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire les formules de taylor de f_1 et de f_2 a l'ordre 6.*

2. Déduire la formule de Taylor de f_3 a l'ordre 6.

Exercice 8 *En appliquant la regle de l Hospital plusieurs fois, déterminer la limite en* 0 *de*

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$

Exercice 9 *1. Développement limité en zéro de* $\ln(cos(x))$ *(à l'ordre* 6*).*

2. Développement limité en zéro de $\cos x . \ln(1+x)$ *à l'ordre* 4*.*

3. Développement limité en 1 *à l'ordre* 3 *de* $f(x) = \sqrt{x}$*.*

4. Développement limité en 1 *à l'ordre* 3 *de* $g(x) = e^{\sqrt{x}}$*.*

5. Développement limité à l'ordre 3 *en* $\frac{\pi}{3}$ *de* $h(x) = \ln(\sin x)$*.*

Exercice 10 *Donner un développement limité à l'ordre* 2 *de* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ *en* 0*. En déduire un développement à l'ordre* 2 *en* $+\infty$*. Calculer un développement à l'ordre* 1 *en* $-\infty$*.*

Exercice 11 *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 12 *Étudier la position du graphe de l'application* $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ *par rapport à sa tangente en* 0 *et* 1*.*

Correction 1 *1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x=0$. En effet $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis par multiplication par la fonction dérivable $x \mapsto x^2$, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par la suite on omet souvent ce genre de discussion ou on l'abrège sous la forme "f est dérivable sur I comme somme, produit, composition de fonctions dérivables sur I".*

Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}.$$

Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos(1/x)| \leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x=0$ est :

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x}\sin\frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

- *Donc pour $x \geqslant 1$ on a $f_3(x)=x$; pour $0 \leqslant x < 1$ on a $f_3(x) = -x$; pour $x<0$ on a $f_3(x)=x$.*
- *La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Attention ! La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.*
- *La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.*
- *La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x>0$ est*

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x<0$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 2 *La fonction f est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Le seul problème est en $x=1$.*

Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x=1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+1 = a+b+1$. Donc $a+b+1=1$. Autrement dit $b=-a$.

Il faut maintenant que les dérivées à droite et à gauche soient égales. Comme la fonction f restreinte à $]0,1]$ est définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ alors elle est dérivable à gauche et la dérivée à gauche s'obtient en évaluant la fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$. Donc $f_g'(1) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivée à droite il s'agit de calculer la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, lorsque $x \to 1$ avec $x>1$. Or

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{ax^2+bx+1-1}{x-1} = \frac{ax^2-ax}{x-1} = \frac{ax(x-1)}{x-1} = ax.$$

Donc f est dérivable à droite et $f_d'(1)=a$. Afin que f soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales, donc ici la condition est $a=\frac{1}{2}$.

Le seul couple (a,b) que rend f dérivable sur $]0,+\infty[$ est $(a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2})$.

Correction 3 *1. Selon que* $n \equiv 0 \pmod 4, 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4$ *alors* $f^{(n)}(x)$ *vaut respectivement* $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

2. *La dérivée de* $\sin^2 x$ *est* $2\sin x \cos x = \sin 2x$. *Et donc les dérivées suivantes seront :* $2\cos 2x, -4\sin 2x, -8$c
Et selon que $n \equiv 1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 3 \pmod 4, 0 \pmod 4$, *alors* $g^{(n)}(x)$ *vaut respectivement* $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ *et on dérive...*

Correction 4 *Pour simplifier nous supposons* $x > 0$.

1. *Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit* $f(x) = e^x - 1 - x$. *Alors il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. *Soit* $f(x) = (e^c - 1)x$. *Soit maintenant* $g(x) = e^x - 1$ *alors, par le théorème des accroissements finis sur* $[0, c]$ *il existe* $d \in]0, c[$ *tel que* $g(c) - g(0) = g'(d)(c - 0)$, *soit* $e^c - 1 = e^d c$. *Donc* $e^x - 1 - x = f(x) = (e^c - 1)x = e^d cx$. *Comme* $d \leqslant c \leqslant x$, *alors* $e^x - 1 - x \leqslant e^x x^2$.

   Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.
2. *Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant* $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. *Nous avons* $f(0) = 0$, $x > 0$ *étant fixé, nous choisissons* k *tel que* $f(x) = 0$, *(un tel* k *existe car* $e^x - 1 - x > 0$ *et* $x^2 > 0$*). Comme* $f(0) = 0 = f(x)$ *alors par Rolle il existe* $c \in]0, x[$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Mais* $f'(t) = e^t - t - kt$, *donc* $f'(0) = 0$. *Maintenant* $f'(0) = 0 = f'(c)$ *donc il existe (par Rolle toujours !)* $d \in]0, c[$ *tel que* $f''(d) = 0$. *Or* $f''(t) = e^t - k$, *donc* $f''(d) = 0$ *donne* $k = e^d$. *Ainsi* $f(x) = 0$ *devient* $e^x - 1 - x = e^d\frac{x^2}{2}$. *Comme* $d \leqslant x$ *alors* $e^x - 1 - x \leqslant e^x\frac{x^2}{2}$.

Correction 5 *Le théorème des accroissements finis donne :* $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n + 1 - n) = \frac{1}{c_n}$, *avec* $c_n \in [n, n+1]$. *Or* $c_n \geqslant n$ *donc* $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{c_n}$. *Donc :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique et $\ln 1 = 0$. *Donc* $S_n \geqslant \ln(n+1)$, *donc* $S_n \to +\infty$.

Correction 6 *1. Soit* $g(t) = \ln t$. *Appliquons le théorème des accroissements finis sur* $[x, y]$. *Il existe* $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$. *Soit* $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$. *Donc* $\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{c}$. *Or* $x < c < y$ *donc* $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. *Ce qui donne les inégalités recherchées.*

2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. *Et* $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. *Comme* f'' *est négative alors* f' *est décroissante sur* $[0, 1]$. *Or* $f'(0) = \frac{x - y - y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ *d'après la première question et de même* $f'(1) < 0$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $c \in [x, y]$ *tel que* $f'(c) = 0$. *Maintenant* f' *est positive sur* $[0, c]$ *et négative sur* $[c, 1]$. *Donc* f *est croissante sur* $[0, c]$ *et décroissante sur* $[c, 1]$. *Or* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 0$ *donc pour tout* $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$. *Cela prouve l'inégalité demandée.*
3. *Géométriquement nous avons prouvé que la fonction* $\ln$ *est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de* $(x, f(x))$ *à* $(y, f(y))$*) est sous la courbe d'équation* $y = f(x)$.

Correction 7 *Soit* f_1, f_2 *et* f_2 *les applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f_1(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x}$ *et* $f_2(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

1. *On a* $f_1(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x}$ *et par conséquent :* $f_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{1-x}^{-n-1}$ *ce qui donne*

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^6 o(x)$$

On obtient de meme $f_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^6 o(x)$

2. $f_3(x) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ *et la formule de Taylor en découle*

Correction 8 *En appliquant la regle de l Hospital 3 fois, on trouve*
$$\lim x \to 0 \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x} = \lim x \to 0 \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{1 + \tan^2 x - \frac{1}{\sqrt{1-x2}}} = \cdots = -1.$$

Correction 9 *1.*

2. $\ln(\cos x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o\left(x^6\right).$
3. *Simple produit de DL cosx et* $DL(ln(1+x)$
4. *Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point* $x = 1$*)*

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ *alors* $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ *et donc* $f'(1) = \frac{1}{2}$. *Ensuite on calcule* $f''(x)$ *(puis* $f''(1)$*),* $f'''(x)$ *(et enfin* $f'''(1)$*).*
On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ *au voisinage de* $x = 1$ *:*

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons $h = x - 1$ *(et donc* $x = h + 1$*). On applique la formule du dl de* $\sqrt{1+h}$ *autour de* $h = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \qquad \textit{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

5. *La première méthode consiste à calculer* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp \sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ *puis* $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ *pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :*

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

(avec $e = \exp(1)$*).*

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x) = \exp x$ *en* $x = 1$ *ce qui est très facile car pour tout* n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ *et donc* $k^{(n)}(1) = e$ *:*

$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le dl $g(x) = h(\sqrt{x})$ *en* $x = 1$ *on écrit d'abord :*

$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ *par son dl obtenu dans la première question.*

6. *Posons* $u = x - \frac{\pi}{3}$ *(et donc* $x = \frac{\pi}{3} + u$*). Alors*

$$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3} + u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

On connaît les dl de $\sin u$ *et* $\cos u$ *autour de* $u = 0$ *(car on cherche un dl autour de* $x = \frac{\pi}{3}$*) donc*

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a + v)$ *en* $v = 0$ *on se ramène au dl de* $\ln(1 + v)$ *ainsi :*

$$\ln(a + v) = \ln\left(a(1 + \frac{v}{a})\right) = \ln a + \ln(1 + \frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ *en posant toujours* $u = x - \frac{\pi}{3}$ *:*

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \textit{on effectue le dl du } \ln \textit{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ *et* $h'''(1)$.

Correction 10 *1. Dl de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \qquad \textit{car } \sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \\
&= \big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)\times\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4)} \qquad \textit{on pose } u = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}\big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)\times\frac{1}{1+u} \\
&= \frac{1}{2}\big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)\times\big(1-u+u^2+o(u^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)\times\big(1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})+(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})^2+o(x^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)\times\big(1-\frac{x}{2}+o(x^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)
\end{aligned}$$

2. En $+\infty$ on va poser $h = \frac{1}{x}$ et se ramener à un dl en $h = 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\big(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\big)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de f dont on a déjà calculé le dl en $h = 0$: $f(h) = \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)$. Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

3. Attention cela ne fonctionne plus du tout en $-\infty$. Dans le calcul de la deuxième question on était on voisinage de $+\infty$ et nous avons considéré que x était positif. En $-\infty$ il faut faire attention au signe, par exemple $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

Ainsi toujours en posant $h = \frac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\big(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\big)} \\
&= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\big(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\big)} \\
&= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)} \\
&= -\frac{1}{h}\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1-\frac{1}{2}h+o(h)} \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\big)\times\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\big) \\
&= -\frac{1}{h}\big(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\big) \\
&= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h) \\
&= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

Ainsi un développement (asymptotique) de f en $-\infty$ est

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$$

On en déduit par exemple que $f(x)$ se comporte essentiellement comme la fonction $-x$ en $-\infty$ et en particulier $\lim_{x\to-\infty} f = +\infty$.

Correction 11 *1. On a*

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4) \qquad et \qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2}-\cos x = \big(1+x^2+o(x^2)\big)-\big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big) = \frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

Ainsi $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}+o(1)$ (où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

2. On sait que

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad et \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x)-\sin x = \big(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)-\big(x+o(x^2)\big) = -\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

donc
$$\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = -\frac{x}{2} + o(x)$$
et ainsi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x} = 0.$$

3. *Sachant*
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
et
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$
alors
$$\begin{aligned}\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}\\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\\ &= \frac{1}{6}+o(1)\end{aligned}$$
Ainsi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Correction 12 *Commençons en $x=0$, le dl de $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 2 est*
$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
Par identification avec $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ cela entraîne donc $f(0)=0$, $f'(0)=1$ (et $f''(0)=1$). L'équation de la tangente est donc $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=x$.

La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de $f(x)-y(x)$ où $y(x)$ est l'équation de la tangente.
$$f(x)-y(x) = x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ -\ x = \frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$
Ainsi pour x suffisamment proche de 0, $f(x)-y(x)$ est du signe de $\frac{1}{2}x^2$ et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de f est au-dessus de la tangente en 0.

Même étude en $x=1$.

Il s'agit donc de faire le dl de $f(x)$ en $x=1$. On pose $x=1+h$ (de sorte que $h=x-1$ est proche *de* 0*) :*

$$
\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x+x^2) &= \ln\big(1+(1+h)+(1+h)^2\big) \\
&= \ln\big(3+3h+h^2\big) \\
&= \ln\left(3\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big)\right) \\
&= \ln 3 + \ln\big(1+h+\frac{h^2}{3}\big) \\
&= \ln 3 + \big(h+\frac{h^2}{3}\big) - \frac{\big(h+\frac{h^2}{3}\big)^2}{2} + o\big((h+\frac{h^2}{3})^2\big) \\
&= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\
&= \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2) \\
&= \ln 3 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}
$$

La tangente en $x=1$ *est d'équation* $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ *et est donc donnée par le dl à l'ordre* 1 *: c'est* $y = (x-1) + \ln 3$*. Et la différence* $f(x) - \big(\ln 3 + (x-1)\big) = -\frac{1}{6}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ *est négative pour* x *proche de* 1*. Donc, dans un voisinage de* 1*, le graphe de* f *est en-dessous de la tangente en* $x=1$*.*