

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Une personne contracte un emprunt de 200 000 € pour 5 ans, au taux annuel de 8 %. Elle a le choix entre trois modes de remboursement : *in fine*, amortissements constants et annuités constantes. Présenter les trois tableaux d'emprunt.

Exercice 2

Un fonctionnaire souhaite contracter un emprunt de 150 000 € pour 20 ans, au taux de 6 % annuel. Les annuités sont en progression géométrique de 2 %. Calculer la première, la sixième et la dernière annuité. Remplir les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt. Quel est le capital restant dû lors de la dixième année ?

Exercice 3

Une entreprise souhaite emprunter une somme de 1 000 000 €, remboursable par annuités constantes, pour 10 ans. Les taux sont les suivants : 4 % les trois premières années, 6 % les quatre années suivantes et 8 % les trois dernières. Déterminer le montant de l'annuité constante, puis le taux moyen de l'emprunt. Faire le tableau.

Exercice 4

Un emprunt est contracté pour 5 ans avec des annuités constantes. Le deuxième amortissement est de 180 177 € et le quatrième amortissement de 218 014 €. Retrouver, dans l'ordre, le taux de l'emprunt, le montant de l'emprunt, le montant de l'annuité constante, le capital restant dû après le paiement de la quatrième annuité.

Exercice 5

Un emprunt de 300 000 € est contracté pour 5 ans, au taux annuel de 6 %, avec des annuités constantes. L'emprunt est contracté avec un différé de deux ans (les intérêts ne sont pas payés pendant le différé). Faire le tableau d'emprunt.

Exercice 6

Un emprunt de 200 000 € est contracté pour 20 ans avec des mensualités constantes. Retrouver la mensualité (taux annuel de 12 %, taux proportionnel).

Test de connaissances

1. Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes :

- ☐ a) les amortissements progressent de façon arithmétique
- ☐ b) les amortissements progressent de façon géométrique

2. Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissements constants :

- ☐ a) les amortissements progressent de façon arithmétique
- ☐ b) les amortissements progressent de façon géométrique
- ☐ c) les intérêts progressent de façon géométrique
- ☐ d) les intérêts progressent de façon arithmétique

3. La valeur acquise d'une suite de 12 annuités en progression géométrique de raison 1.02, avec un taux de 5 % et une première annuité de 1 000 €, est égale à :

- ☐ a) 14 587.15 €
- ☐ b) 13 587.15 €
- ☐ c) 17 587.15 €
- ☐ d) 18 587.15 €

4. Le calcul du taux effectif global tient compte :

- ☐ a) uniquement des frais de dossier
- ☐ b) des frais de dossier et des frais d'assurance
- ☐ c) des frais de dossier ou des frais d'assurance
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

5. Le taux proportionnel est :

- ☐ a) toujours inférieur au taux équivalent
- ☐ b) égal au taux équivalent
- ☐ c) supérieur au taux équivalent pour une période inférieure à l'année
- ☐ d) jamais supérieur au taux équivalent

6. Un emprunt de 100 000 € a été contracté au taux annuel de 5 % et sur une durée de 5 ans. Les annuités de l'emprunt sont les suivantes : 4 annuités de 20 000 € et une annuité de X €. Cette dernière annuité s'élève à :

- ☐ a) 15 216.32 €
 - ☐ b) 27 549.35 €
 - ☐ c) 37 115.53 €
 - ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes
-

7. Un emprunt indivis est remboursable par annuités constantes. Le premier amortissement est de 672.21 € et le quatrième est de 690.52 €. Le taux d'intérêt est de :

- ☐ a) 1.5 %
 - ☐ b) 0.9 %
 - ☐ c) 3 %
 - ☐ d) 0.5 %
-

8. Un particulier contracte un emprunt remboursable par annuités constantes, d'un montant de 100 000 € sur une durée de 5 ans, à un taux de 10 %. L'annuité constante est de :

- ☐ a) 22 615.31 €
 - ☐ b) 18 915.32 €
 - ☐ c) 26 379.75 €
 - ☐ d) 37 625.33 €
-

9. Lorsqu'un emprunt indivis est contracté par annuités constantes mais avec un différé de deux ans (rien n'est versé pendant le différé), pendant la première année du différé :

- ☐ a) il n'y a pas d'intérêt
 - ☐ b) il n'y a pas d'amortissement
 - ☐ c) il n'y a pas d'annuité
 - ☐ d) il y a une annuité
-

10. Un emprunt indivis d'un montant de 600 000 € sur 20 ans est remboursé par des annuités progressives de 2.5 % par an, la première payable un an après l'emprunt. Le taux d'intérêt est de 6.2 %. La première annuité est égale à :

- ☐ a) 38 755.42 €
- ☐ b) 55 943.43 €
- ☐ c) 43 702.92 €
- ☐ d) les 3 réponses ci-dessus sont inexactes

Cas de synthèse

Cas de synthèse n° 1

Monsieur et Madame Ziani sont mariés depuis 10 ans et attendent leur 4^e enfant. Ils souhaitent, de ce fait, acheter un appartement plus spacieux constitué de 4 pièces à Saint-Denis. Le prix de cet appartement est de 170 000 €. Pour ce faire, ils disposent d'un apport personnel de 105 000 € et souhaitent emprunter le solde. Après s'être renseignés auprès de plusieurs banques, ils ont reçu deux offres. Ils décident d'analyser de façon précise les propositions des deux banques.

Travail à faire

1. Déterminez le montant des mensualités constantes dans les deux banques.
2. Calculez le taux moyen pour la BNP PARIBAS et le comparer au taux de la Société Générale. En se basant uniquement sur le critère du taux, quelle est l'offre de prêt la plus intéressante ?
3. Présentez la 1^{re}, la 120^e et la 144^e ligne du tableau d'amortissement.
4. Donnez l'équation permettant de calculer le TEG, puis le calculer pour les deux banques. Lequel des deux organismes financiers a le TEG le plus faible ?
5. Calculez le capital restant dû après le versement de la 72^e mensualité.
6. Calculez les réductions d'impôts dont peut bénéficier le couple.
7. Quel est le coût total du crédit pour les deux banques ?
8. Conclure en disant quelle offre les Ziani ont-ils le plus intérêt à choisir.

Annexe 1 : Description de l'offre de prêt BNP PARIBAS

Montant du prêt	?
Durée	144 mois
Frais de dossier	650 €
Mode de remboursement	Mensualités constantes
Taux variable	3.79 % les 48 premiers mois ; 3.50 % les 48 suivants et 3.90 % les 48 derniers.

Annexe 2 : Description de l'offre de prêt Société Générale

Montant du prêt	?
Durée	144 mois
Frais de dossier	625 €
Mode de remboursement	Mensualités constantes
Taux fixe	3.95 %

Annexe 3 : Réductions d'impôts

Réduction d'impôt sur le revenu	Mode de calcul
Il existe une réduction d'impôt sur les intérêts des prêts contractés pour l'acquisition d'un logement ancien constituant une habitation principale.	(40 % pour les intérêts de la première année * montant des intérêts) et (20 % * intérêts des 4 annuités suivantes). Le montant des intérêts est limité à 3 750 € pour une personne seule et 7 500 € pour un couple marié ou pacsé, majoré de 500 € par personne à charge.

Cas de synthèse n° 2

Monsieur et Madame Gérard, jeune couple âgé respectivement de 37 et 34 ans, désirent contracter un prêt immobilier afin d'acquérir un appartement situé en région parisienne. Leurs salaires mensuels totaux s'élèvent à 5 670 € net. Ayant chacun un compte bancaire à la BNP PARIBAS et à la Société Générale, ils décident de comparer les propositions de leur banque respective pour prendre une décision quant à la conclusion d'un futur contrat de prêt et choisir la plus intéressante.

Travail à faire

1. Calculer les mensualités constantes des deux propositions. Utiliser le taux mensuel proportionnel. Utiliser un taux mensuel proportionnel dans tous vos calculs.
2. Établir les lignes du plan d'amortissement selon les deux propositions : 1^{re}, 71^e, 120^e, 240^e. Utiliser le taux mensuel proportionnel.
3. Calculer le montant des intérêts payés au titre de la 15^e année. Conserver un raisonnement en nombre de mois.
4. Retrouver le TEG des deux banques.
5. Quel est le plus avantageux selon vous ? Pourquoi ?
6. Retrouver le coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier).
7. Conclure sur le choix de l'organisme bancaire avec lequel le couple devra contracter l'emprunt.

Annexe : Caractéristiques des deux propositions bancaires

Banques	Société Générale	BNP PARIBAS
Montant du prêt	190 000 €	190 000 €
Frais de dossier	900 €	883 €
Durée du prêt	240 mois	240 mois
Mensualité hors assurance	1 142.37 €	1 163.41 €
Taux annuel	3.91 %	4.12 %
Coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier)	84 168.80 €	89 218.40 €
Frais d'assurance	100 € par mois	65 € par mois
Mode de remboursement	Mensualités constantes	Mensualités constantes

4 Les emprunts indivis

Corrigés des exercices d'entraînement

Corrigé de l'exercice 1

Emprunt avec annuités constantes

$$200\,000 = a \times [1 - (1.08)^{-5}] / 0.08$$

$$a = 50\,091.29$$

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000.00	16 000.00	34 091.29	50 091.29
2	165 908.71	13 272.70	36 818.59	50 091.29
3	129 090.11	10 327.21	39 764.08	50 091.29
4	89 326.03	7 146.08	42 945.21	50 091.29
5	46 380.82	3 710.47	46 380.82	50 091.29

Emprunt avec amortissements constants : $200\,000 / 5 = 40\,000$

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000	16 000	40 000	56 000
2	160 000	12 800	40 000	52 800
3	120 000	9 600	40 000	49 600
4	80 000	6 400	40 000	46 400
5	40 000	3 200	40 000	43 200

Emprunt avec remboursement *in fine* : remboursement de l'intégralité de l'amortissement de l'emprunt la cinquième année.

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	200 000	16 000	0	16 000
2	200 000	16 000	0	16 000
3	200 000	16 000	0	16 000
4	200 000	16 000	0	16 000
5	200 000	16 000	200 000	216 000

Corrigé de l'exercice 2

$$\text{Valeur actuelle : } VO = a \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} (1+i)^{-n}$$

La progression des annuités est de 2 %, donc $q = 1.02$.

$$150\,000 = a \left[\frac{(1.06)^{20} - 1.02^{20}}{(1.06 - 1.02)} \right] \cdot (1.06)^{-20}$$

Première annuité a_1 : 11 179.90

$$a_6 : 11\,179.90 \cdot (1.02)^{6-1} = 12\,343.50$$

$$a_{20} : 11\,179.90 \cdot (1.02)^{20-1} = 16\,287.00$$

Remplir les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt.

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
1	150 000	9 000	2 179.9	11 179.9
2	147 820	8 869	2 534.3	11 403.5

Pour retrouver le capital restant dû lors de la dixième année, il suffit de déterminer la valeur actuelle des annuités qui restent à payer, c'est-à-dire après le paiement de la neuvième annuité. Il reste donc onze annuités à payer. Il faut aussi calculer la dixième annuité qui est de : a_{10} :

$$11\,179.9 \cdot (1.02)^{10-1} = 13\,361.00$$

$$[13\,361.00 \cdot \frac{(1.06)^{11} - 1.02^{11}}{(1.06 - 1.02)}] \cdot (1.06)^{-11} = 115\,241$$

Vérification :

Année	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités
10	115 242	6 915	6 446.5	13 361.0

Corrigé de l'exercice 3

$$1\,000\,000 = a \times [1 - (1.04)^{-3}] / 0.04 + a \times [1 - (1.06)^{-4}] / 0.06 \times (1.04)^{-3} \\ + a \times [1 - (1.08)^{-3}] / 0.08 \times (1.06)^{-4} \times (1.04)^{-3}$$

L'annuité constante est de 130 373.55 €.

Le taux moyen est celui qui permet de retrouver la même annuité constante et sur la même période.

$$1\,000\,000 = 130\,373.55 \times [1 - (1 + \text{taux moyen})^{-10}] / \text{taux moyen}$$

$$7.6703 = [1 - (1 + \text{taux moyen})^{-10}] / \text{taux moyen}$$

Nous devons faire une interpolation linéaire et nous savons que ce taux moyen est compris entre 4 % et 8 %. Prenons ces deux taux pour faire notre interpolation :

$$[1 - (1.04)^{-10}] / 0.04 = 8.1109$$

$$[1 - (1.08)^{-10}] / 0.08 = 6.7101$$

Taux en pourcentage	Valeur
5	7.72173
Taux moyen	7.6703
7	7.02358

$$(5 - 7) = (7.72173 - 7.02358)$$

$$(\text{Taux moyen} - 5) = (7.6703 - 7.72173)$$

Il faut utiliser la méthode du produit en croix pour calculer le taux moyen :

$$(5 - 7) \times (7.6703 - 7.72173) = (7.72173 - 7.02358) \times (\text{Taux moyen} - 5)$$

$$-2 \times -0.05143 = 0.69815 \times \text{taux moyen} - 3.49075$$

$$0.69815 \times \text{taux moyen} = (-2 \times -0.05143) + 3.49075$$

$$\text{Taux moyen} = ((-2 \times -0.05143) + 3.49075) / 0.69815$$

Taux moyen = 5.14733 %

Tableau d'amortissement d'emprunt

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités	Taux
1	1 000 000.00	40 000.00	90 373.55	130 373.55	0.04
2	909 626.45	36 385.06	93 988.49	130 373.55	0.04
3	815 637.96	32 625.52	97 748.03	130 373.55	0.04
4	717 889.93	43 073.40	87 300.15	130 373.55	0.06
5	630 589.78	37 835.39	92 538.16	130 373.55	0.06
6	538 051.61	32 283.10	98 090.45	130 373.55	0.06
7	439 961.16	26 397.67	103 975.88	130 373.55	0.06
8	335 985.28	26 878.82	103 494.73	130 373.55	0.08
9	232 490.55	18 599.24	111 774.30	130 373.55	0.08
10	120 716.25	9 657.30	120 716.25	130 373.55	0.08

Corrigé de l'exercice 4

$$A_2 = 180\,177 \text{ €}$$

$$A_4 = 218\,014 \text{ €}$$

$$A_4 = A_2 \cdot (1+t)^{4-2}$$

$$218\,014 = 180\,177 \cdot (1+t)^2$$

$$218\,014/180\,177 = (1+t)^2$$

$$(218\,014/180\,177)^{(1/2)} = [(1+t)^2]^{(1/2)}$$

$$1+t = 1.1, \text{ soit } t = 1.1 - 1 = 0.1$$

Le taux est égal à 10 %.

Nous devons trouver le premier amortissement puis appliquer la formule de la somme d'une suite géométrique pour déterminer le montant de l'emprunt. Nous savons également que les amortissements progressent de façon géométrique et que la raison est égale à $(1+t)$.

$$A_2 = A_1 \cdot (1+t)^1$$

$$180\,177 = A_1 \cdot (1.1)^1$$

$$A_1 = 180\,177 / 1.1 = 163\,797.27$$

$$\text{Emprunt} : 163\,797.27 \cdot (1 - (1.1)^5) / 1 - 1.1 = 1\,000\,000$$

$$\text{Annuité constante} : 1\,000\,000 = a \cdot [1 - (1.1)^{-5}] / 0.01$$

$$\text{Annuité constante} = 263\,797.48 \text{ €}$$

Nous pouvons retrouver le capital restant dû après le paiement de la quatrième annuité de deux façons. La plus simple est de déterminer le montant de l'amortissement de la cinquième année et nous savons que la dernière année le montant de l'amortissement est égal au montant du capital restant dû.

$$A_5 = A_2 * (1.1)^{5-2}$$

$$A_5 = 180\,177 * (1.1)^3 = 239\,816 \text{ €}$$

Nous pouvons aussi calculer la valeur actuelle des annuités restant à payer. Il reste donc une annuité à payer.

$$263\,797.48 \times [1 - (1.1)^{-1}] / 0.01 = 239\,816 \text{ €}$$

Corrigé de l'exercice 5

$$300\,000 = a \times [1 - (1.06)^{-5}] / 0.06 \times (1.06)^{-2}$$

$$\text{Annuité constante} = 80\,021.58 \text{ €}$$

Tableau d'emprunt

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissements	Annuités	Dettes
1	300 000.00	0	0	0	318 000.00
2	300 000.00	0	0	0	337 080.00
3	300 000.00	57 304.80	22 716.78	80 021.58	277 283.22
4	277 283.22	16 636.99	63 384.59	80 021.58	213 898.64
5	213 898.64	12 833.92	67 187.66	80 021.58	146 710.98
6	146 710.98	8 802.66	71 218.92	80 021.58	75 492.06
7	75 492.06	4 529.52	75 492.06	80 021.58	0.00
		Total	300 000		

Corrigé de l'exercice 6

Taux mensuel proportionnel : 12 % / 12 = 0.01

$$200\,000 = a \times [1 - (1.01)^{-240}] / 0.01$$

Annuité constante : **2 202.17 €**

Corrigés du test de connaissances

Numéros des questions	a	b	c	d
1		X		
2				X
3			X	
4		X		
5			X	
6			X	
7		X		
8			X	
9	X	X	X	
10			X	

Explications :

1 - Bonne réponse : b.

Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à annuités constantes, les amortissements progressent de façon géométrique. La raison correspond au taux d'intérêt.

2 - Bonne réponse : d.

Dans un tableau d'amortissement d'un emprunt à amortissements constants, les intérêts progressent de façon arithmétique.

3 - Bonne réponse : c.

La valeur acquise d'une suite de 12 annuités en progression géométrique de raison 1.02, avec un taux de 5 % et une première annuité de 1 000 €, est égale à 17 587.15.

$$\text{Valeur acquise } V_n = a \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} = 1\,000 * ((1.05)^{12} - 1.02^{12}) / 1.05 - 1.02$$

$$= 17\,587.15 \text{ €}$$

4 - Bonne réponse : b.

Le calcul du taux effectif global tient compte des frais de dossier et des frais d'assurance.

5 - Bonne réponse : c.

Le taux proportionnel est supérieur au taux équivalent pour une période inférieure à l'année.

6 - Bonne réponse : a.

$$100\ 000 = 20\ 000 * \frac{1 - (1.05)^{-4}}{0.1} + X * (1.05)^{-5}$$

$$X = 37\ 115.53\ €$$

7 - Bonne réponse : b.

Un emprunt indivis est remboursable par annuités constantes. Le premier amortissement est de 672.21 € et le quatrième est de 690.52 €. Le taux d'intérêt est de :

$$A_1 = 672.21\ €$$

$$A_4 = 690.52\ €$$

$$A_4 = A_1 * (1 + t)^{4-1}$$

$$690.52 = 672.21 * (1 + t)^3$$

$$690.52/672.21 = (1 + t)^3$$

$$(690.52/672.21)^{(1/3)} = [(1 + t)^3]^{(1/3)}$$

$$1 + t = 1.009, \text{ soit } t = 1.009 - 1 = 0.009$$

Le taux est égal à 0.9 %.

8 - Bonne réponse : c.

Un particulier contracte un emprunt remboursable par annuités constantes, d'un montant de 100 000 € sur une durée de 5 ans, à un taux de 10 %. L'annuité constante est de 26 379.75 €.

$$100\ 000 = a * \frac{1 - (1.04)^{-5}}{0.04} = 26\ 379.75\ €$$

$$\text{Annuité} = 26\ 379.75\ €$$

9 - Bonnes réponses : a, b et c.

Lorsqu'un emprunt indivis est contracté par annuités constantes mais avec un différé de deux ans (rien n'est versé pendant le différé), pendant la première année du différé : il n'y a pas d'intérêt, il n'y a pas d'amortissement, il n'y a pas d'annuité.

10 - Bonne réponse : a.

Un emprunt indivis d'un montant de 600 000 € sur 20 ans est remboursé par des annuités progressives de 2.5 % par an, la première payable un an après l'emprunt. Le taux d'intérêt est de 6.2 %. La première annuité est égale à :

$$\text{Valeur actuelle : } V_0 = a \frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q} * (1+i)^{-n}$$

La progression des annuités est de 2.5 %, donc $q = 1.025$.

$$600\,000 = a * [(1.062)^{20} - 1.025^{20}] / (1.062 - 1.025) * (1.062)^{-20}$$

Première annuité, a_1 : 43 702.92 €

Corrigés des cas de synthèse

Corrigé du cas de synthèse n°1

1. Déterminez le montant des mensualités constantes pour les deux banques.

• BNP Paribas :

Taux annuel	Taux mensuel proportionnel	Durée
3.79 %	0.316 %	48 mois
3.50 %	0.292 %	48 mois
3.90 %	0.325 %	48 mois

Mensualité constante :

$$65\,000 = m * [1 - (1.00316)^{-48}] / 0.00316 + m * [1 - (1.00292)^{-48}] / 0.00292 \\ * (1.00316)^{-48} + m * [1 - (1.00325)^{-48}] / 0.00325 * (1.00316)^{-48} * (1.00292)^{-48}$$

$$65\,000 = 116.07266527967 m$$

$$m = 559.99 \text{ €}$$

• Société générale :

Taux annuel	Taux mensuel proportionnel	Durée
3.95 %	0.329 %	144 mois

Mensualité constante :

$$65\,000 = m * [1 - (1.00329)^{-144}] / 0.00329$$

$$65\,000 = 114.5467911556 m$$

$$m = 567.45$$

2. Calculez le taux moyen pour la BNP Paribas et le comparer au taux de la Société Générale. En se basant uniquement sur le critère du taux, quelle est l'offre de prêt la plus intéressante ?

$$65\,000 = 559.99 * [1 - (1 + \text{Taux moyen})^{-144}] / \text{Taux moyen}$$

$$116.07266527967 = [1 - (1 + \text{Taux moyen})^{-144}] / \text{Taux moyen}$$

0.30 %	116.79021311231	
X	116.07266527967	
0.33 %	114.47050834112	
(0.30 % - 0.33 %)	=	116.79021311231 - 114.47050834112
X	=	116.07266527967 - 116.79021311231

$$X = 0.000093$$

Donc, le taux moyen est de $0.000093 + 0.003$, soit 0.309%

Taux moyen BNP Paribas	Taux mensuel proportionnel Société Générale
0.309 %	0.329 %

Le taux moyen BNP Paribas est inférieur au taux mensuel proportionnel Société Générale. Si l'on prend en compte uniquement le critère du taux, l'offre de prêt de la BNP Paribas est plus intéressante car le coût de l'emprunt est moins élevé que pour celui de la Société Générale.

3. Présentez la 1^{re}, la 120^e et la 144^e ligne du tableau d'amortissement.

Banque : BNP Paribas, 144 mois, $m = 562.51$

Mois	CRDU	Intérêts	Amortissements	Mensualité
1	65 000	205.40	354.59	559.99
120	13 425.17	43.63	516.36	559.99
144	558.18	1.81	558.18	559.99

• Mensualité 1 :

$$\text{Intérêts} = 65\,000 * 0.00316 = 205.40$$

$$\text{Amortissement} = 559.99 - 205.4 = 354.59$$

• Mensualité 120 :

$$\text{CRDU}_{120} = 559.99 * [1 - (1.00325)^{-25}] / 0.00325 = 13\,425.17$$

$$\text{Intérêts} = 13\,425.17 * 0.00325 = 43.63$$

$$\text{Amortissement} = 559.99 - 43.63 = 516.36$$

• Mensualité 144 :

$$\text{CRDU}_{144} = 559.99 * [1 - (1.00325)^{-1}] / 0.00325 = 558.18$$

$$\text{Intérêts} = 558.18 * 0.00325 = 1.81$$

$$\text{Amortissement} = 559.99 - 1.81 = 558.18$$

Banque : Société générale, 144 mensualités au taux de 0.329 %, m = 567.45

Mois	CRDU	Intérêts	Amortissements	Mensualité
1	65 000	213.85	353.60	567.45
120	13 597,06	44.73	522.72	567.45
144	565.59	1.86	565.59	567.45

• Mensualité 1 :

$$\text{Intérêts} = 65\,000 * 0.00329 = 213.85$$

$$\text{Amortissement} = 567.45 - 213.85 = 353.60$$

• Mensualité 120 :

$$\text{CRDU}_{120} = 567.45 * [1 - (1.00329)^{-25}] / 0.00329 = 13\,597.06$$

$$\text{Intérêts} = 13\,597.06 * 0.00329 = 44.73$$

$$\text{Amortissement} = 567.45 - 44.73 = 522.72$$

• Mensualité 144 :

$$\text{CRDU}_{144} = 567.45 * [1 - (1.00329)^{-1}] / 0.00329 = 565.59$$

$$\text{Intérêts} = 565.59 * 0.00329 = 1.86$$

$$\text{Amortissement} = 567.45 - 1.86 = 565.59$$

4. Donnez l'équation permettant de calculer le TEG puis le calculer pour les deux banques. Laquelle des deux a le TEG le plus faible ?

• BNP Paribas

$$65\,000 - 650 = 559.99 * [1 - (1 + \text{TEG})^{-144}] / \text{TEG}$$

$$114.9127662994 = [1 - (1 + \text{TEG})^{-144}] / \text{TEG}$$

0.292 %	117.41985575308
X	114.9127662994
0.350 %	112.95965677695

(0.292 % - 0.350 %)	=	117.41985575308 - 112.95965677695
X	=	114.9127662994 - 117.41985575308

X = 0.000326. Donc le TEG est de $(0.000326 + 0.00292) * 100$ soit 0.325 %.

- Société générale

$$65\,000 - 625 = 567.53 * [1 - (1 + \text{TEG})^{-144}] / \text{TEG}$$

$$113.432704174 = [1 - (1 + \text{TEG})^{-144}] / \text{TEG}$$

0.329 %	114.5467911556	
X	113.432704174	
0.350 %	112.95965677695	
(0.329 % - 0.350 %)	=	114.5467911556 - 112.95965677695
X	=	113.432704174 - 114.5467911556

$$X = 0,000148$$

Donc le TEG est de $(0.000148 + 0.00329) * 100 = 0.344 \%$

	BNP Paribas	Société Générale
TEG mensuel	0.325 %	0.344 %

Le TEG de la BNP Paribas est plus faible que celui de la Société Générale.

5. Calculez le capital restant dû après le versement de la 72^e mensualité.

- BNP Paribas

$$\begin{aligned} \text{CRDU}_{73} &= 559.99 * [1 - (1.00292)^{-24}] / 0.00292 + 559.99 * [1 - (1.00325)^{-48}] / 0.00325 * (1.00292)^{-24} \\ &= 36\,132.37 \end{aligned}$$

- Société Générale

$$\begin{aligned} \text{CRDU}_{73} &= 567.45 * [1 - (1.00329)^{-72}] / 0.00329 \\ &= 36\,324.93 \end{aligned}$$

6. Calculez les réductions d'impôts dont peut bénéficier le couple.

Il s'agit d'un couple marié ayant trois enfants à charge ; la limite est donc de $7\,500 + 3 * 500$, soit $9\,000 \text{ €}$.

- BNP Paribas :

$$\begin{aligned} 65\,000 &= a * [1 - (1.0379)^{-4}] / 0.0379 + a * [1 - (1.035)^{-4}] / 0.035 * (1.0379)^{-4} + \\ &\quad a * [1 - (1.039)^{-4}] / 0.039 * (1.0379)^{-4} * (1.035)^{-4} \\ a &= 6\,809.47 \text{ €} \end{aligned}$$

Extrait du tableau d'amortissement (5 premières années) :

Année	CRDU	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	65 000	2 463.50	4 345.97	6 809.47
2	60 654	2 298.79	4 510.69	6 809.47
3	56 143.30	2 127.83	4 681.64	6 809.47
4	51 461.70	1 950.40	4 859.07	6 809.47
5	46 602.60	1 631.09	5 178.38	6 809.47

Année	Montant Intérêts	Pourcentage applicable	Crédit d'impôt
1	2 463.50	40 %	985.40 €
2	2 298.79	20 %	459.76 €
3	2 127.83	20 %	425.57 €
4	1 950.40	20 %	390.08 €
5	1 631.09	20 %	326.22 €
Total réductions d'impôt			2 587.07 €

• Société Générale :

$$65\,000 = a * [1 - (1.0395)^{-12}] / 0.0395$$

$$a = 6\,905.81$$

Extrait du tableau d'amortissement (5 premières années) :

Année	CRDU	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	65 000	2 567.5	4 338.31	6 905.81
2	60 661.69	2 396.14	4 509.67	6 905.81
3	56 151.98	2 218	4 687.81	6 905.81
4	51 464.17	2 032.84	4 872.97	6 905.81
5	46 591.20	1 840.35	5 065.46	6 905.81

Année	Montant Intérêts	Pourcentage applicable	Crédit d'impôt
1	2 567.50	40 %	1 027 €
2	2 396.14	20 %	479.29 €
3	2 218	20 %	443.60 €
4	2 032.84	20 %	406.57 €
5	1 840.35	20 %	368.07 €
Total réductions d'impôts			2 724.47 €

7. Quel est le coût total du crédit pour les deux banques ?

Coût total = Frais de dossier + Somme des intérêts

Somme des intérêts = (Mensualité * 144) - Montant de l'emprunt

- BNP Paribas

Mensualité * 144 = 559.99 * 144 = 80 638.56

Somme des intérêts = 80 638.56 - 65 000 = 15 638.56

- Société Générale

Mensualité * 144 = 567.45 * 144 = 81 712.80

Somme des intérêts = 81 712.80 - 65 000 = 16 712.80

	BNP Paribas	Société Générale
Frais de dossier	650	625
Somme des intérêts	15 638.56	16 712.80
Coût total du crédit	16 288.56	17 337.80

8. Conclure en disant quelle offre les Ziani ont-ils intérêt à choisir.

La solution la plus avantageuse est celle de la BNP Paribas car son coût total est inférieur à celui de la Société Générale. En choisissant la BNP Paribas, M. et Mme Ziani réaliseront une économie de 1 049.24 € (17 337.80 - 16 288.56).

Corrigé du cas de synthèse n°2

1. Calculer les mensualités constantes des deux propositions. Utiliser un taux mensuel proportionnel dans tous vos calculs (noté TMP).

Afin de calculer les mensualités constantes des deux banques, il faut se servir de la formule des annuités en valeurs actuelle :

$a \times 1 - \frac{(1+t)^{-n}}{t}$ avec « a » l'annuité à déterminer.

Mais avant de déterminer les deux mensualités constantes, il faut dans un premier temps déterminer le taux mensuel proportionnel de chacun par la formule suivante :

Taux mensuel proportionnel = $i/12$

avec 12 qui représente les mois dans une année

- Société Générale : $i = 3.91 \%$ donc $TMP = 0.0391 / 12$, donc $TMP = 0.0032583$, soit $TMP = 0.32583 \%$
- BNP Paribas : $i = 4.12 \%$ donc $TMP = 4.12 / 12$, donc $TMP = 0.0034333$, soit $TMP = 0.34333 \%$

Nous devons conserver 5 chiffres après la virgule pour obtenir des résultats plus précis.

Ainsi, pour les deux banques, nous retrouvons les mensualités constantes qui nous sont indiquées dans l'annexe :

$$\text{Société générale : } 190\,000 = a \times 1 - \frac{(1 + 0.0032583)^{-240}}{0.0032583}$$

$$\text{Donc } a = 1\,142.372071$$

$$\text{BNP Paribas : } 190\,000 = a \times 1 - \frac{(1 + 0.0034333)^{-240}}{0.0034333}$$

$$\text{Donc } a = 1\,163.412114$$

Banques	Société Générale	BNP Paribas
Taux mensuel proportionnel	0.32583 %	0.34333 %
Mensualité constante	1 142.37 €	1 163.41 €

2. Établir les lignes du plan d'amortissement suivantes selon les deux propositions : 1^{re}, 71^e, 120^e, 240^e. Utiliser le taux mensuel proportionnel.

Le taux mensuel proportionnel de chaque banque a été déterminé précédemment. Pour calculer les différentes lignes du plan d'amortissement, il faut utiliser la formule de la suite géométrique :

$$U_n = U_p \times Q^{(n-p)}$$

Calculons par exemple la 1^{re} et la 71^e ligne :

	Société Générale	BNP Paribas
Mois	15/04/2010	15/04/2010
Capital début	190 000	190 000
Intérêt	$190\,000 \times 0.0032583 = 619.08$	$190\,000 \times 0.0034333 = 652.33$
Mensualité	1 142.37	1 163.41
Amortissement	$1\,142.37 - 619.08 = 523.29$	$1\,163.41 - 652.33 = 511.08$
Capital fin	$190\,000 - 523.29 = 189\,476.71$	$190\,000 - 511.08 = 189\,488.92$

La 71^e ligne s'obtient de la façon suivante :

- Société générale :

Les amortissements suivent une suite géométrique de raison $q = 1 + 0.0032583$

$$A_{71} = 523.29 \times (1 + 0.0032583)^{(71-1)} \\ = 657.11$$

Nous pouvons donc obtenir le reste à partir de cette donnée

- BNP Paribas :

Les amortissements suivent une suite géométrique de raison $q = 1 + 0.0034333$

$$A_{71} = 511.08 \times (1 + 0.0034333)^{(71-1)} = 649.66$$

Nous obtenons ensuite :

	Mois	Capital début	Intérêt	Mensualité	Amortissement	Capital fin
Société Générale	15/04/2010	190 000	619.08	1 142.37	523.29	189 476.71
BNP Paribas	15/04/2010	190 000	652.33	1 163.41	511.08	189 488.92

Société Générale	15/03/2016	148 930.64	485.27	1 142.37	657.11	148 273.54
BNP Paribas	15/03/2016	149 637.24	513.75	1 163.41	649.66	148 987.58

Société Générale	15/04/2020	114 081.04	371.71	1 142.37	768.461638	113 310.378
BNP Paribas	15/04/2020	115 034.12	394.95	1 163.41	768.46	114 265.66

Société Générale	15/04/2030	1 138.66193	3.71	1 142.37	1 138.66	0
BNP Paribas	15/04/2030	1 159.43	3.98	1 163.41	1 159.43	0

3. Calculer le montant des intérêts payés au titre de la 15^e année. Conserver un raisonnement en nombre de mois.

La quinzième année correspond au 180^e mois :

- BNP Paribas

Déterminons son amortissement :

$$A_{180} = A71 \times (1.0034333)^{109}$$

$$A_{180} = 649.66 \times (1.0034333)^{109} = \boxed{943.9166751}$$

Étant donné que nous voulons les montants des intérêts au titre de la quinzième année, nous devons calculer la somme de 12 amortissements, soit de l' A_{180} à l' A_{191} .

Nous devons donc utiliser la formule suivante :

$$\text{Somme d'une suite géométrique} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$\text{Ainsi : SOMME} = \frac{943.9166751 \times (1 - (1.0034333)^{12})}{(1 - 1.0034333)}$$

$$\text{SOMME} = 11\,543.35638 \text{ €}$$

$$\begin{aligned} \text{Somme des mensualités : } & 1\,163.41 \times 12 \\ & = 13\,960.92 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi trouver le montant des intérêts avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Somme des 12 mensualités} - \text{Somme des amortissements } A_{180} \text{ à } A_{191} \\ & = \text{Total des intérêts de la quinzième année.} \end{aligned}$$

$$\text{Total des intérêts} = 13\,960.92 - 11\,543.35638 \text{ €}$$

$$\boxed{= 2\,417.56}$$

- Société Générale :

$$A_{180} = A71 \times (1.0032583)^{109}$$

$$\begin{aligned} A_{180} &= 657.11 \times (1.0032583)^{109} \\ &= 936.7615671 \end{aligned}$$

$$\text{SOMME} = \frac{936.7615671 \times (1 - (1.0032583)^{12})}{(1 - 1.0032583)}$$

$$= 11\,444.79$$

Somme des mensualités : $1\,142.37 \times 12 = 13\,708.44$

Donc total des intérêts = $13\,708.44 - 11\,444.79$

= 2 263.65

4. Retrouver le TEG des deux banques.

Pour déterminer le TEG des deux banques, il faut se servir de la formule suivante :

$$(\text{Emprunt} - \text{Frais de dossier}) = ((\text{Prime d'assurance actualisée}) + a) \times \frac{[1 - (1 + \text{TEG})^{-n}]}{\text{TEG}}$$

• BNP Paribas :

Avant de calculer le TEG, il faut revenir sur des annuités et non des mensualités :

$$a \times 1 - \frac{(1 + t)^{-n}}{t}$$

$$190\,000 = a \times 1 - \frac{(1 + 0.0412)^{-20}}{0.0412}$$

Donc $a = 14\,129.49 \text{ €}$

Étant donné que nous raisonnons en année, les frais d'assurance seront annuels, soit multiplié par 12.

Ainsi, pour la Société Générale, nous avons des frais d'assurance qui s'élèvent à $65 \times 12 = 780 \text{ €}$ par an.

$$(190\,000 - 883) = ((65 * 12) + 14\,129.49) \times [1 - (1 + \text{TEG})^{-20} / \text{TEG}]$$

$$189\,117 = ((65 * 12) + 14\,129.49) \times (1 - (1 + \text{TEG})^{-20} / \text{TEG})$$

$$12.68433729 = (1 - (1 + \text{TEG})^{-20} / \text{TEG})$$

En essayant de retrouver la valeur ci-dessus, on en déduit que le TEG sera supérieur à 4 %.

Nous pouvons aussi utiliser la table financière pour trouver un encadrement plus précis :

4.75 % = 12.730669

X = 12.68433729

5 % = 12.462210

Nous savons que le TEG se situe entre 4.75 % et 5 %. Nous allons faire une interpolation linéaire puis un produit en croix. L'écart que nous allons trouver va venir se rajouter au taux le plus faible, soit 4 %, pour obtenir notre encadrement.

$$(4.75 \% - 5 \%) = (12.730669 - 12.462210)$$

$$X = (12.68433729 - 12.730669)$$

En effectuant un produit en croix :

$$X \times 0.268459 = -0.25 \times (-0.04633171)$$

$$X \times 0.268459 = 0.0115829275$$

$$\text{Donc } X = 0.0431459832$$

Le taux est donc de $4.75 + 0.0115829275 = \mathbf{4.79 \%}$

TEG = 4.79 %

• Société Générale :

Annuité = 13 869.34

$$190\,000 - 900 = ((100 \times 12) + 13\,869.34) \times (1 - (1 + \text{TEG})^{-20}) / \text{TEG}$$

$$189\,100 = (1200 + 13\,869.34) \times (1 - (1 + \text{TEG})^{-20}) / \text{TEG}$$

$$12.5486584 = (1 - (1 + \text{TEG})^{-20}) / \text{TEG}$$

En essayant de retrouver la valeur ci-dessus, on en déduit que le TEG sera supérieur à 4 % :

$$\mathbf{4.75 \% = 12.730669}$$

$$\mathbf{X = 12.5486584}$$

$$\mathbf{5 \% = 12.462210}$$

$$(4.75 \% - 5 \%) = (12.730669 - 12.462210)$$

$$X = (12.5486584 - 12.730669)$$

En effectuant le produit en croix :

$$X \times 0.268459 = -0.25 \times (-0.1820106)$$

$$X \times 0.268459 = 0.04550265$$

$$\text{Donc } X = 0.1694957144$$

Donc, $4.75 + 0.1694957144 = \mathbf{4.92 \%}$

TEG = 4.92 %

5. Quel est le plus avantageux selon vous ? Pourquoi ?

TEG (Société Générale)	TEG (BNP Paribas)
4.79 %	4.92 %

Si l'on prend directement les TEG trouvés précédemment, celui qui semble le plus avantageux est celui de la Société Générale avec un TEG de 4.79 %. Il semble être intéressant du fait de son taux faible comparé à celui de son concurrent.

6. Retrouver le coût total du crédit (hors assurance et frais de dossier).

Il faut déterminer le remboursement total au bout des 20 années :

$$(\text{Mensualités constantes} \times 240) - \text{Somme des amortissements (de } A_1 \text{ à } A_{240}) = \text{Somme des intérêts.}$$

• Société générale : $1\,142.37 \times 240 = 274\,168.80$

Donc, $274\,168.80 - 190\,000 = 84\,168.80$

• BNP Paribas : $1\,163.41 \times 240 = 297\,218.40$

Donc, $297\,218.40 - 190\,000 = 89\,218.40$

7. Conclure sur le choix de l'organisme bancaire avec lequel le couple devra contracter l'emprunt.

	Société Générale	BNP Paribas
Frais de dossier	900	883
Frais d'assurance	$100 \times 240 = 24\,000$	$65 \times 240 = 15\,600$
Somme des intérêts	84 168.80	89 218.40
Coût total du crédit	$900 + 24\,000 + 84\,168.80 = 109\,068.80$	$883 + 15\,600 + 89\,218.40 = 105\,701.40$

$$\text{Rappel : } (\text{Mensualités constantes} \times 240) - \text{Somme des amortissements (de } A_1 \text{ à } A_{240}) = \text{Somme des intérêts.}$$

Les amortissements suivent une suite géométrique de raison $q = 1 + i$.

Bien que la somme des intérêts de la Société Générale soit inférieure à celle de BNP Paribas, l'organisme le plus intéressant (si l'on prend en compte les frais d'assurance et les frais de dossier) semble être BNP Paribas avec un coût total du crédit (tout compris) de 105 701.40 €.

Ce sont les frais d'assurance qui augmentent considérablement le coût total du crédit et qui creusent l'écart entre ces deux banques.

Pour réduire au minimum leur coût de crédit, le couple aura donc intérêt à emprunter auprès de BNP Paribas.