

Loi Binomiale = Loi de Poisson = Loi Normale

EXERCICE 1

Une entreprise industrielle de BTP fabrique des voussoirs en béton destinés à la construction d'ouvrages d'art autoroutiers.

Chaque voussoir a une masse qui varie en fonction des dosages du béton ayant servi à les fabriquer.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque voussoir, associe sa masse.

On estime que X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,26.

- 1) Quelle est la probabilité de l'événement : " $X \geq 50,2$ " ?
- 2) On ne peut utiliser que les voussoirs dont la masse M est telle que $49,5 \leq M \leq 50,5$, les autres sont défectueux et doivent être détruits.
Quelle est la probabilité qu'un voussoir, pris au hasard dans la production, soit utilisable ?

EXERCICE 2

Une machine fabrique des rondelles d'acier.

Le diamètre d'une rondelle suit une loi normale de moyenne $m = 90$ mm et d'écart type $\sigma = 0,16$ mm.

1°) a) Quelle est la probabilité pour que le diamètre d'une rondelle prise au hasard soit extérieur à l'intervalle

[89,7 mm; 90,3 mm] ?

- b) Trouver le nombre d tel que la proportion de rondelles ayant un diamètre compris entre $90 - d$ et $90 + d$ soit 90 %.

2°) On rejette les pièces dont le diamètre est extérieur à l'intervalle [89,7 mm; 90,3 mm].

La probabilité qu'une pièce soit jugée défectueuse est 0,06.

D'un lot contenant un très grand nombre de rondelles, on tire N pièces.

On appelle X la variable aléatoire qui à cette épreuve associe le nombre de rondelles défectueuses.

- a) On tire 4 pièces (soit $N = 4$).
 - i) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Quels sont ses paramètres ?
 - ii) Quelle est l'expression de $P(X = k)$? ($P(X = k)$ signifie « probabilité pour que $X = k$ »).
 - iii) Calculer la probabilité P_1 pour que l'on ait 1 pièce acceptable exactement.
 - iv) Calculer la probabilité P_2 pour que l'on ait au moins 2 pièces acceptables.
- b) On tire 50 pièces.

On admet que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Quelle est alors l'expression de $P(X = k)$?

 - i) Calculer la probabilité P_3 de n'avoir aucune pièce défectueuse.
 - ii) Calculer la probabilité P_4 d'avoir au plus 2 pièces défectueuses.

EXERCICE 1

$$X \sim \mathcal{N}(m=50; \sigma=0,26)$$

$$1^{\circ}) \text{ On pose } T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-50}{0,26} \text{ alors } T \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 50,2) &= P(T \geq 0,77) = 1 - P(T < 0,77) \\ &= 1 - \pi(0,77) = 1 - 0,7794 = \underline{0,2206} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ}) P(49,5 \leq X \leq 50,5) &= P(-1,92 \leq X \leq 1,92) \\ &= \pi(1,92) - \pi(-1,92) = \pi(1,92) - (1 - \pi(1,92)) \\ &= 2 \times \pi(1,92) - 1 = 2 \times 0,9726 - 1 = \underline{0,9452} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Désignons par D la variable aléatoire mesurant le diamètre

$$1^{\circ}) a) \text{ On pose } T = \frac{D-m}{\sigma} = \frac{D-90}{0,16} \quad T \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\begin{aligned} P(89,7 \leq D \leq 90,3) &= P(-1,875 \leq T \leq 1,875) \\ &= \pi(1,875) - \pi(-1,875) = 2\pi(1,875) - 1 \\ &= 2 \times 0,9696 - 1 = \underline{0,9392} \end{aligned}$$

$$\text{donc } p = 1 - 0,9392 = \underline{0,0608}$$

$$b) P(90-d \leq D \leq 90+d) = 0,9$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{d}{0,16} \leq T \leq \frac{d}{0,16}\right) = \underline{0,9}$$

$$\Rightarrow 2\pi\left(\frac{d}{0,16}\right) - 1 = 0,9 \Rightarrow \pi\left(\frac{d}{0,16}\right) = 0,95$$

$$\Rightarrow \frac{d}{0,16} = 1,645. \text{ (lecture inverse de la table)}$$

$$\Rightarrow \underline{d = 0,2632}$$

2°) a.) Pour chaque pièce prélevée, il y a 2 issues possibles, soit elle est défectueuse, soit elle ne l'est pas. On répète 4 fois de manière ident. que et indépendante.

X suit la loi binomiale de paramètres $\left. \begin{array}{l} n=4 \\ p=0,06 \end{array} \right\}$

$$\text{ii) } P(X=k) = C_4^k (0,06)^k (0,94)^{4-k}$$

$$\text{iii) } P_1 = P(X=3) \approx \boxed{8,12 \times 10^{-4}}$$

$$\text{iv) } P_2 = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$P_2 \approx \boxed{0,99}$$

$$\text{b) } \underline{\lambda = np = 3} \quad P(X=k) = e^{-3} \times \frac{3^k}{k!}$$

$$\text{i) } P_3 = P(X=0) = e^{-3} \approx \boxed{0,050}$$

$$\text{ci) } P_4 = P(X \leq 2) = \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) e^{-3} \approx \boxed{0,42}$$