Université Mohammed V – Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales
RABAT

http://www.fsjesr.ac.ma

جامعة محمد الخامس – اكدال
كلية العلوم القانونية والاقتصادية
والاجتماعية
االرباط

Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Semestre : S2
Module : M 6 (Méthodes Quantitatives I)

Mathématiques I

Fascicule de cours

Notes du cours

Salma DASSER

Dernière mise à jour
Juin 2010

CHAPITRE 1 : FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

I- Généralités sur les fonctions numériques d'une variable

I-1 Définitions

I-1-1 Fonction et domaine de définition

Définition :

- Une fonction réelle (ou numérique) d'une variable réelle c'est une fonction définie d'un sous ensemble E de IR vers un sous ensemble F de IR.
- On écrit : $f : E \to F$, $(E, F \subseteq IR)$
- E c'est le domaine de définition de f.
- $f(x) \in F$ est l'image de $x \in E$.

I-1-2 Graphe d'une fonction

Définition :

- Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
- Le graphe de f, noté $G(f)$ c'est l'ensemble $G(f) = \{(x, y) \in E \times F \,/\, y = f(x)\}$

I-1-3 Egalité de deux fonctions

- Deux fonctions réelles f et g sont dites égales si elles ont le même domaine de définition E et si $\forall x \in E$: $f(x) = g(x)$. On note $f \equiv g$

I-2 Quelques propriétés

I-2-1 Fonction paire, fonction impaire

Définition :

- Une fonction $f : E \to F$ est paire si: $(\forall x \in E, (-x) \in E)$ *et* $(\forall x \in E, f(-x) = f(x))$
- Une fonction $f : E \to F$ est impaire si: $(\forall x \in E, (-x) \in E)$ *et* $(\forall x \in E, f(-x) = -f(x))$

Exemples

1) les fonctions $f(x) = x^2 + x^4$ et $f(x) = \cos x$ sont paires.
2) les fonctions $f(x) = x^3 + x$ et $f(x) = \sin x$ sont impaires.

I-2-2 Fonction périodique

Définition :

- Une fonction réelle $f : E \to F$ est périodique si: $(\exists T \in IR)/(\forall x \in E, f(x+T) = f(x))$
- Le plus petit réel T qui vérifie $(\forall x \in E, f(x+T) = f(x))$ s'appelle la période de f.
- On dit que la fonction f est périodique, de période T.

Exemples : Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodique, de période 2

I-2-3 Fonction bornée

Définition :

Une fonction réelle $f : E \to F$ est :

- majorée par le réel M si: $(\exists M \in IR)/(\forall x \in E, f(x) \leq M)$
- minorée par le réel m si: $(\exists M \in IR)/(\forall x \in E, f(x) \geq m)$
- bornée si: $(\exists M \in IR)/(\forall x \in E, m \leq f(x) \leq M)$, f (majorée par M et minorée par m)

Exemples

1) $f(x) = \sin x$ est bornée sur IR : $\forall x \in IR, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$.
2) $f(x) = e^x$ est minorée sur IR par 0 : $\forall x \in IR, \quad 0 \leq e^x$

I-3 Opérations sur les fonctions

❖ Soient f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition E.

OPERATION	EXPRESSION
Somme $f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad \forall x \in E$
Multiplication par un réel $\ .f$	$(\ .f)(x) = \ \times f(x)$
Produit $f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \forall x \in E$
Quotient $\dfrac{f}{g}$, avec $g(x) \neq 0, \forall x \in E$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = f(x) \times g(x), \quad \forall x \in E$

II- Limite d'une fonction

II-1 Limite en un point fini

II-1-1 Limite finie

Définition :

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0. On dit que la fonction f admet une limite finie $l \in IR$ quand x tend vers x_0 si $\forall \ > 0, \exists \ > 0 / \quad \forall x \in D_f : \ |x - x_0| < \quad \Rightarrow |f(x) - l| <$
- On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

II-1-2 Limite infinie

Définition :

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0. On dit que la fonction f admet une limite infinie quand tend vers x_0 si
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty : \forall A > 0, \exists \ > 0 / \quad \forall x \in D_f : \ |x - x_0| < \quad \Rightarrow f(x) > A$

ou

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty : \ \forall B < 0, \exists \ > 0 / \quad \forall x \in D_f : \ |x - x_0| < \quad \Rightarrow f(x) < B$

II-1-3 Unicité de la limite

Théorème :

- La limite d'une fonction f quand x tend vers x_0, lorsqu'elle existe, est unique.

II-1-4 Limite à droite - limite à gauche

Définition : **(limite à gauche)**

- Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, x_0[$.
- f admet une limite finie $l \in IR$ à gauche de x_0 si :

$$\forall \ > 0, \exists \ > 0 / \quad 0 \le x_0 - x \le \quad \Rightarrow |f(x) - l| <$$

- On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$
- f admet une limite infinie à gauche de x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty : \ \forall A > 0, \exists \ > 0 / \quad 0 \le x_0 - x \le \quad \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty : \ \forall B < 0, \exists \ > 0 / \quad 0 \le x_0 - x \le \quad \Rightarrow f(x) < B$$

Définition : (limite à droite)

- Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]x_0, b]$.
- f admet une limite finie $l \in IR$ à droite de x_0 si :

$$\forall \quad > 0, \exists \quad > 0 / \quad 0 \le x - x_0 \le \quad \Rightarrow |f(x) - l| <$$

- On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$
- f admet une limite infinie à droite de x_0 si :
  - $\forall A > 0, \exists \quad > 0 / \quad 0 \le x - x_0 \le \quad \Rightarrow f(x) > A$: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$
  - $\forall B < 0, \exists \quad > 0 / \quad 0 \le x - x_0 \le \quad \Rightarrow f(x) < B$: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Théorème :

- Soit f une fonction qui admet une limite à droite et une limite à gauche d'un point x_0.
- La fonction f admet une limite l quand x tend vers x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

II-2 Limite à l'infini

II-2-1 Limite finie

Définition : (limite en $+\infty$)

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage de $+\infty$.
- On dit que la fonction f admet une limite finie $l \in IR$ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \quad > 0, \exists A > 0 / \quad \forall x \in D_f : \quad x > A \quad \Rightarrow |f(x) - l| <$$

- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Définition : (limite en $-\infty$)

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage de $-\infty$.
- On dit que la fonction f admet une limite finie $l \in IR$ quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \quad > 0, \exists B < 0 / \quad \forall x \in D_f : \quad x < B \quad \Rightarrow |f(x) - l| <$$

- On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

II-2-2 Limite infinie

Définition : (limite en $+\infty$)

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage de $+\infty$.
- On dit que la fonction f admet une limite infinie quand x tend vers $+\infty$ si
  - $\forall A>0, \exists B>0 / \quad \forall x\in D_f: \quad x>B \quad \Rightarrow f(x)>A$: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
  - $\forall A<0, \exists B>0 / \quad \forall x\in D_f: x>B \quad \Rightarrow f(x)<A$: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Définition : (limite en $-\infty$)

- Soit f une fonction réelle, de domaine de définition D_f, définie sur un voisinage de $-\infty$.
- On dit que la fonction f admet une limite infinie quand x tend vers $-\infty$ si
  - $\forall A>0, \exists B<0 / \quad \forall x\in D_f: \quad x<B \quad \Rightarrow f(x)>A$: $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
  - $\forall A<0, \exists B<0 / \quad \forall x\in D_f: x<B \quad \Rightarrow f(x)<A$: $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

II-3 Comparaison locales de fonctions

II-3-1 Fonctions équivalentes en un point

Définition :

- Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0.
- On dit que les fonctions f et g sont équivalentes en x_0 ssi $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$
- On note $f \underset{x_0}{\approx} g$

Théorème :

- Si f et g sont deux fonctions équivalentes en un point x_0 alors elles ont la même limite, lorsqu'elle existe, quand x tend vers x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3x^2+2x+1}{4x^3+3x^2+2}=1$: $f \underset{+\infty}{\approx} g$ $\left(f(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ g(x)=4x^3+3x^2+2\right)$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x}=1$: $\quad \sin x \underset{0}{\approx} x$

3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$: $e^x-1 \underset{0}{\approx} x$, $\quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$: $\quad \ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$

Opérations sur les fonctions équivalentes

- Multiplication : $\{(f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1) \text{ et } (f_2 \underset{x_0}{\approx} g_2) \Rightarrow f_1 \times f_2 \underset{x_0}{\approx} g_1 \times g_2$
- Division : $\{(f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1) \text{ et } (f_2 \underset{x_0}{\approx} g_2) \Rightarrow f_1 / f_2 \underset{x_0}{\approx} g_1 / g_2$

Exemple $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1).\sin^2 x}{x^2 \ln(1+x)} = 1$

- $\sin x \underset{0}{\approx} x$ $\quad (\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1)$ d'où $\sin^2 x \underset{0}{\approx} x^2$ (Multiplication)
- $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$ $\quad (\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1)$
- $\sin^2 x \underset{0}{\approx} x^2$ et $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$ d'où $(e^x - 1)\sin^2 x \underset{0}{\approx} x^3$ (Multiplication)
- $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$ $\quad (\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1)$ d'où $x^2 \ln(1+x) \underset{0}{\approx} x^3$ (Multiplication)
- $(e^x - 1)\sin^2 x \underset{0}{\approx} x^3$ et $x^2 \ln(1+x) \underset{0}{\approx} x^3$ d'où $\dfrac{(e^x - 1).\sin^2 x}{x^2 \ln(1+x)} \underset{0}{\approx} \dfrac{x^3}{x^3} (= 1)$ (Division)

II-3-2 Fonctions négligeables

Définition :

- Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0.
- On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
- On note $f \underset{x_0}{<<} g$.

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + 1}{x^4 + 3x^2 + 2} = 0$: $\quad f \underset{+\infty}{<<} g \quad (f(x) = 4x^3 + 1,\ g(x) = x^4 + 3x^2 + 2)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$: $\quad \ln x \underset{+\infty}{<<} x$ et $x \underset{+\infty}{<<} e^x$

II-4 Opérations sur les limites

II-4-1 Somme

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$
$l \in IR$	$l' \in IR$	$l + l' \in IR$
$l \in IR$	$+\infty$	$+\infty$
$l \in IR$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	**Forme indéterminée**

II-4-2 Multiplication par un scalaire

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\in IR$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} (\ .f)(x)$
$l \in IR$	$\in IR$	l
$+\infty$	>0	$+\infty$
$-\infty$	>0	$-\infty$
$+\infty$	<0	$-\infty$
$-\infty$	<0	$+\infty$
$-\infty, +\infty$	$=0$	**Forme indéterminée**

II-4-3 Produit

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $x_0 \in IR \cup \{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f \times g)(x)$
$l \in IR$	$l' \in IR$	$l \times l' \in IR$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	$-\infty, +\infty$	**Forme indéterminée**

II-4-4 Quotient

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f}(x)$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\times\frac{1}{g}\right)(x)$
$l\in IR$	$l'\in IR^*$	$\frac{l}{l'}\in IR$
$l\in IR$	$+\infty$	0
$l\in IR$	$-\infty$	0
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
0	0	**Forme indéterminée**
$-\infty,+\infty$	$-\infty,+\infty$	**Forme indéterminée**

II-5 Formes indéterminées

II-5-1 Somme

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$
$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

☞ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) \text{ est une } FI,\quad (x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\})$$

Exemple : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad g(x)=-\sqrt{x^2-1}$ $\quad x_0=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2-1}=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\text{est une } FI$$

➷ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$:

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

➷ Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0$

II-5-2 Produit et quotient

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$
0	$\pm\infty$	**Forme indéterminée**

Remarque :

❖ Les FI issues d'un produit et les FI issues d'un quotient se déduisent les unes des autres. En effet, on a $\left(x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g}(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\times\frac{1}{g}\right)(x)$
0	0	$\pm\infty$	**Forme indéterminée**
$\pm\infty$,	$\pm\infty$	0	**Forme indéterminée**

❖ On a donc deux cas de FI :

1er cas : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{cases}\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ est une FI, $\left(x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$

2ème cas : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0\end{cases}\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ est une FI, $\left(x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$

Exemples :

☞ **Exemples du 1er cas :**

Exemple 1 : $f(x)=\ln x\quad g(x)=x^n\quad x_0=+\infty$

➷ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)$ est une FI

↳ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)$ (voir exercices): $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)=0$

Exemple 2 : $f(x)=e^x$ $g(x)=x^n$ $x_0=+\infty$

↳ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$ est une FI

↳ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)$ (voir exercices) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)=+\infty$

Résumé : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^n}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^n}\right)=0\end{cases}$, $\forall n>0$

↳ On peut alors énoncer que, lorsque x tend vers $+\infty$:
- e^x croît plus vite que toute puissance positive x^n de x,
- toute puissance positive x^n de x croît plus vite que $\ln x$.

☞ **Exemple du 2ème cas :** $f(x)=x^3-1$ $g(x)=x^2-1$ $x_0=1$

↳ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=0\\ \lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$ est une FI

↳ Calcul de $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$: $\frac{(x^3-1)}{(x^2-1)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}$

↳ Puisque $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}=\frac{3}{2}$, alors $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)=\frac{3}{2}$

II-5-3 Puissance

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{(g(x))}$
1	$\pm\infty$	**FI**
$\pm\infty$	0	**FI**
0	$\pm\infty$	**FI**

1er cas : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{(g(x))}$ est une FI, $\left(x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$

Exemple : $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ $\quad g(x)=x$ $\quad x_0=+\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x)} \text{ est une } FI$$

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x)}$ **:**

- $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x)}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$, où l'on a posé $y=\dfrac{1}{x}$.
- Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x)}=\lim\limits_{y\to0}e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$
- **Calcul de** $\lim\limits_{y\to0}e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}$
  - $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}\ln(1+y)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln(1+y)-\ln(1+0)}{y-0}=h'(0)$, avec $h(y)=\ln(1+y)$
  - Donc $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1}{y}\ln(1+y)=h'(0)=1$, car $h'(y)=\dfrac{1}{1+y}$
  - D'où : $\lim\limits_{y\to0}e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=e$
- Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{(x)}=e$

2ème cas : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{(g(x))}$ est une FI, $\left(x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$

Exemple : $f(x)=x$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad x_0=+\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ est une } FI$$

Calcul de $\lim_{x\to+\infty}(x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$:

$(x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}(x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=1$

3$^{\text{ème}}$ cas : $\begin{cases}\lim_{x\to x_0} f(x)=0\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x))^{(g(x))}$ est une FI, $\quad (x_0\in IR\cup\{-\infty,+\infty\})$

Exemple : $f(x)=\frac{1}{x}\qquad g(x)=x\qquad x_0=+\infty$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\\ \lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{(x)}$ est une FI

Calcul de $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{(x)}$:

$\left(\frac{1}{x}\right)^{(x)} = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-x\ln x}$.

Or $\lim_{x\to+\infty}(-x\ln x)=-\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{(x)}=0$

II-6 Propriétés des limites

Théorème :

- Soit f une fonction numérique définie sur voisinage V d'un point x_0.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ alors $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|l|$

Exemple : $\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x^3}{x^2-1}\right)=-\frac{3}{2}$, $\quad f(x)=\frac{1-x^3}{x^2-1}\qquad$ Donc $\lim_{x\to1}|f(x)|=\frac{3}{2}$

Théorème :

- Soit f une fonction numérique définie sur voisinage V d'un point x_0.
- Si $\forall x\in V\quad a\le f(x)\le b$ alors $a\le l\le b$

Théorème :

- Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un même voisinage V d'un point x_0, vérifiant : $\forall x \in V \quad f(x) \leq g(x)$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in IR$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in IR$ alors $l \leq l'$

Théorème : (théorème des gendarmes)

- Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même voisinage V d'un point x_0, vérifiant : $\forall x \in V \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in IR$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in IR$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l'' \in IR$ et $l \leq l'' \leq l'$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$

Exemple :

☞ On considère les fonctions : $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

- $\forall x \in IR \quad -1 \leq \sin x \leq 1$
- Donc $\forall x > 0 \quad \dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$
- Ce qui implique que $\exists V(+\infty) / \forall x \in V \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
- De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

II-7 Branches infinies

II-7-1 Branches infinies en un point fini (asymptote verticale)

❖ Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage d'un point a.

a) Equation de l'asymptote

❖ Si $\boxed{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty}$ alors la droite d'équation $\boxed{x = a}$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

b) Exemples :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est alors une asymptote verticale à la courbe C_f.

2) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$, la droite d'équation $x=1$ est alors une asymptote verticale à la courbe C_f.

II-7-2 Branches infinies à l'infini

❖ Dans tout ce paragraphe, f est une fonction réelle définie sur un voisinage de $\pm\infty$.

a) Asymptote horizontale

i) Equation de l'asymptote

❖ Si $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b}$ alors la droite d'équation $\boxed{y=b}$ est une asymptote horizontale à C_f.

ii) Position de la courbe par rapport à son asymptote

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-b\right)=0^+$ alors la courbe représentative de f est en dessus de son asymptote.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-b\right)=0^-$ alors la courbe représentative de f est en dessous de son asymptote.

iii) Exemple : $f(x)=1-\frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$:
  - la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à C_f.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\right)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^-$: C_f est alors en dessous de son asymptote.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$:
  - la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-1\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+$, la courbe C_f est alors en dessus de son asymptote.

b) Asymptote oblique

i) Equation de l'asymptote

❖ Si $\boxed{\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\end{cases}}$ alors la droite d'équation $\boxed{y=ax+b}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative C_f de f.

ii) Position de la courbe par rapport à son asymptote

- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0^{+}$ alors la courbe C_f est en dessus de son asymptote.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0^{-}$ alors la courbe C_f est en dessous de son asymptote.

iii) Exemple : $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\dfrac{f(x)}{x}=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=2$, $f(x)-x=2+\dfrac{1}{x}$
  - la droite d'équation $y=x+2$ est alors une asymptote oblique à la courbe C_f .
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0^{+}$: C_f est alors en dessus de son asymptote.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\dfrac{f(x)}{x}=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=2$, $f(x)-x=2+\dfrac{1}{x}$
  - la droite d'équation $y=x+2$ est alors une asymptote oblique à la courbe C_f .
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0^{-}$: C_f est alors en dessous de son asymptote.

c) Branches paraboliques de direction la droite d'équation $y=ax$

i) Equation :

- Si $\boxed{\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty\end{cases}}$ alors la courbe représentative C_f de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $\boxed{y=ax}$

ii) Exemple : $f(x) = x - \sqrt{x}$

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\begin{cases} \left(x-\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty \end{cases}$,

➩ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

➩ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\infty$, $f(x) - x = -\sqrt{x}$

↳ La courbe C_f admet alors une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

d) Branches paraboliques de direction la droite d'équation $y = 0$

i) Equation :

❖ Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$ alors la courbe représentative C_f de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 0$. (l'axe (Ox) des abscisses).

ii) Exemple : $f(x) = \ln x$

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

↳ La courbe C_f admet alors une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 0$.

e) Branches paraboliques de direction la droite d'équation $x = 0$

i) Equation :

❖ Si $\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{cases}}$ alors la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $\boxed{x = 0}$. (l'axe (Oy) des ordonnés).

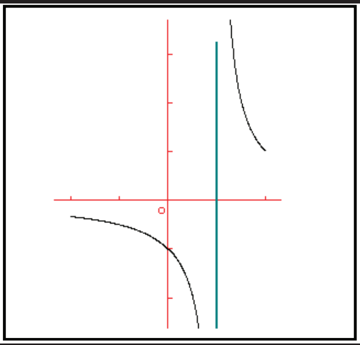
ii) Exemple : $f(x) = e^x$

↳ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

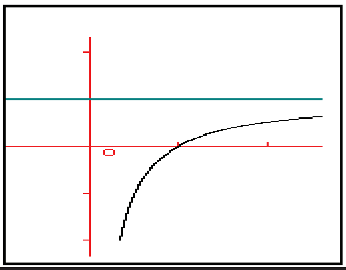
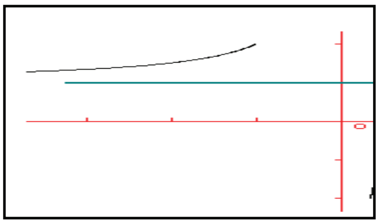
↳ la courbe C_f admet alors une branche parabolique de direction la droite d'équation $x = 0$.

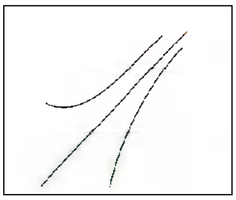
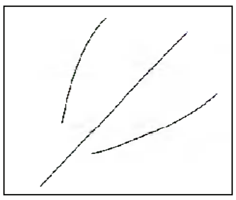
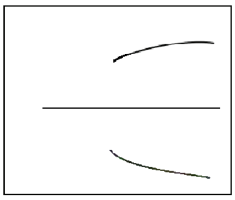
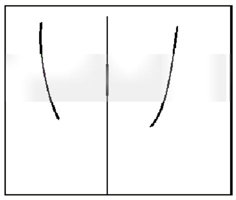
II-7-3 Récapitulatif avec représentations géométriques

a) En un point fini (asymptote verticale)

<table>
<tr>
<td>b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$</td>
<td>Asymptote verticale : $x=a$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

b) A l'infini

<table>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Asymptote horizontale : $y=b$</td></tr>
<tr>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-b\right)=0^-$
C_f au dessous de son asymptote
</td>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-b\right)=0^+$
C_f au dessus de son asymptote
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</td></tr>
<tr>
<td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad (a\neq 0)$</td>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$</td>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$
Asymptote oblique :
$y=ax+b$
</td>
<td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\pm\infty$
Direction asymptotique:
$y=ax$
</td>
<td>Direction asymptotique :
$y=0$
</td>
<td>Direction asymptotique :
$x=0$
</td>
</tr>
</table>

III- Continuité d'une fonction

III-1 Continuité en un point

III-1-1 Continuité en un point

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est continue en un point x_0 de I si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est discontinue en un point x_0 de I si et seulement si f n'est pas continue en x_0.

III-1-2 Continuité à droite, continuité à gauche

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle $[x_0, b[$ est continue à droite au point x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle $]a, x_0]$ est continue à gauche au point x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Théorème :

- Une fonction est continue en un point x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de x_0.

Exemple : $f(x) = |x|$: $\begin{cases} f(x) = -x & si\ x \le 0 \\ f(x) = x & si\ x \ge 0 \end{cases}$

- la fonction f est continue à gauche en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$
- la fonction f est continue à droite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
- Alors la fonction f est continue en 0.

III-1-3 Prolongement par continuité

Théorème :

- Soit f une fonction qui n'est pas définie en un point x_0.
- Si la fonction f admet une limite l quand x tend vers x_0, on peut la prolonger en une fonction continue $\tilde{f}$ définie par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$

Exemple : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

- la fonction f n'est pas définie en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ est alors le prolongement par continuité de f au point 0.

III-1-4 Opérations sur les fonctions continues en un point

- Si f et g sont deux fonctions continues en un point x_0 alors les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $.f$ le sont aussi.
- Si f et g sont deux fonctions continues en un point x_0 et si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue au point x_0.
- Si une fonction f est continue en un point x_0 et si la fonction g est continue au point $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue au point x_0.

III-2 Continuité sur un intervalle

III-2-1 Définitions

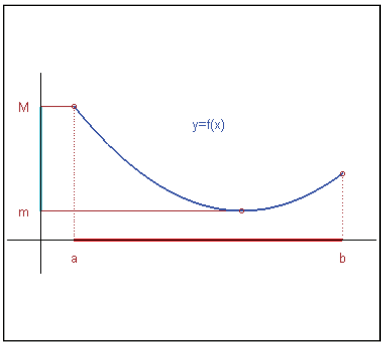
Définitions :

- Une fonction f définie sur un intervalle $]a,b[$ est continue sur $]a,b[$ si et seulement si elle est continue en tout point de $]a,b[$.
- Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b[$ est continue sur $[a,b[$ si et seulement si elle est continue en tout point de $]a,b[$ et continue à droite de a.
- Une fonction f définie sur un intervalle $]a,b]$ est continue sur $]a,b]$ si et seulement si elle est continue en tout point de $]a,b[$ et continue à gauche de b.
- Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle est continue en tout point de $]a,b[$ et continue à droite de a et à gauche de b.

III-2-2 Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle

Théorème :

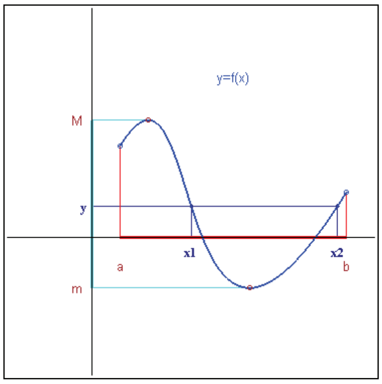
- L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

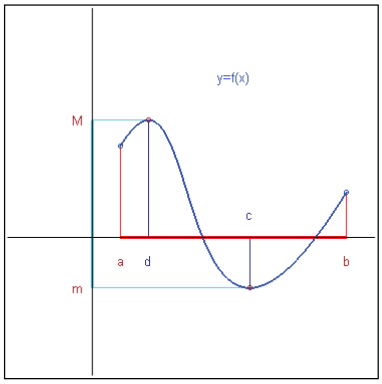


Théorème :

- Si l'intervalle $[m, M]$ est l'image d'un intervalle $[a,b]$ par une fonction continue f alors :

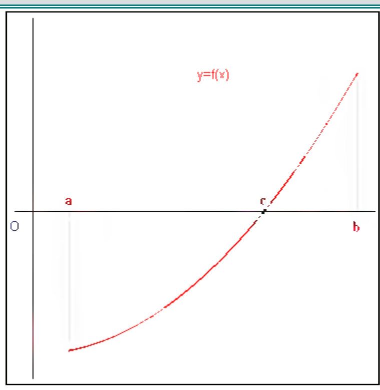
  $\forall y \in [m, M], \quad \exists x \in [a,b] / f(x) = y$ (x n'est en général pas unique).
- En particulier : $\exists c \in [a,b] / f(c) = m$ et $\exists d \in [a,b] / f(d) = M$





Corollaire (Théorème des Valeurs Intermédiaires) :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
- Si $(f(a) \times f(b) < 0)$ alors il existe un point c de l'intervalle $[a,b]$ tel que $f(c) = 0$.



IV- Dérivabilité d'une fonction

IV-1 Dérivabilité en un point

IV-1-1 Dérivabilité en un point

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en un point x_0 de I si et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie :
- Cette limite, lorsqu'elle existe s'appelle la dérivée de la fonction f au point x_0.
- On note $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'appelle taux d'accroissement ou taux de variation de f entre les points x et x_0.

Remarque : Si on pose $h = x - x_0$ alors $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

IV-1-2 Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable à droite en un point x_0 de I si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie.
- Cette limite s'appelle la dérivée à droite de la fonction f au point x_0.
- On note $f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Définition :

- Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable à gauche en un point x_0 de I si et seulement si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie.
- Cette limite s'appelle la dérivée à gauche de la fonction f au point x_0.
- On note $f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Théorème :

- Soit f une fonction dérivable à gauche et à droite d'un point x_0.
- La fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement si : $f_g^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0)$

Exemple : $f(x) = x|x|$: $\begin{cases} f(x) = -x^2 & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

- la fonction f est dérivable à gauche de 0 : $f_g^{'}(0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-x^2}{x} = 0$
- la fonction f est dérivable à droite de 0 : $f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{x^2}{x} = 0$
- la fonction f est dérivable en 0 : $f_g^{'}(0) = f_d^{'}(0)$

Remarque :

- Une fonction f peut être dérivable à gauche et à droite d'un point x_0 sans être dérivable en x_0

Exemple : $f(x) = |x|$: $\begin{cases} f(x) = -x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

- la fonction f est dérivable à gauche de 0 : $f_g^{'}(0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$
- la fonction f est dérivable à droite de 0 : $f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$
- la fonction f n'est pas dérivable en 0 : $f_g^{'}(x_0) \neq f_d^{'}(x_0)$

IV-1-3 Dérivabilité et continuité

Théorème :

- Une fonction f dérivable en un point x_0 est continue au point x_0.

Remarque : La réciproque n'est pas vraie.

Exemple : $f(x) = |x|$: $\begin{cases} f(x) = -x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

- la fonction f est continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$
- la fonction f n'est pas dérivable en 0 : $f_g^{'}(x_0) \neq f_d^{'}(x_0)$

IV-2 Différentielle en un point

Définition :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
- La différentielle de f , notée df , c'est le produit de la dérivée f' par un accroissement arbitraire h de sa variable : $df(x) = f'(x).h$

Remarque :

- En prenant pour f la fonction $f(x) = x$ on obtient $h = dx$, puisque $\begin{cases} df(x) = h, (f'(x) = 1) \\ df(x) = dx \end{cases}$
- D'où la formule : $\boxed{df(x) = f'(x).dx}$

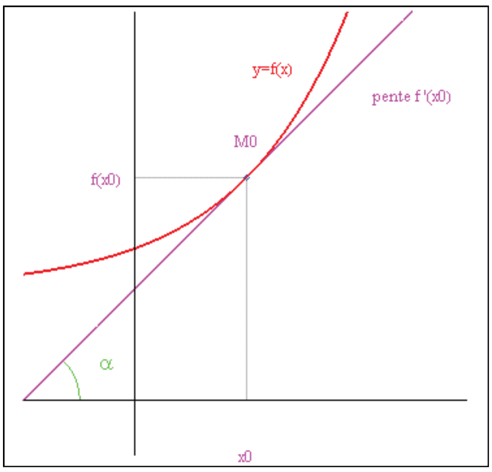
IV-3 Interprétation géométrique de la dérivée

Définition :

- Soit f une fonction dérivable en un point x_0. La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ s'appelle la tangente à la courbe de la fonction f au point x_0.

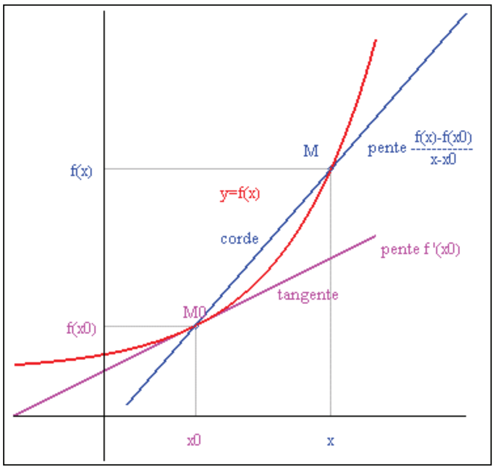
Théorème :

- Soit f une fonction dérivable en un point x_0.
- La tangente à la courbe de la fonction f au point x_0 est la droite de pente $f'(x_0)$ passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$.
- La tangente à la courbe de la fonction f au point x_0 fait avec l'axe des abscisses un angle de tangente $tg(\ ) = f'(x_0)$.



Théorème :

- Soit f une fonction dérivable en un point x_0.
- La tangente à la courbe de la fonction f au point x_0 c'est la limite lorsque $x \to x_0$, de toutes les droites passant par les points $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$.



Théorème :

- Une fonction f est dérivable en un point x_0 si et seulement si la courbe de la fonction f admet une tangente au point x_0 non parallèle à l'axe des ordonnées.

IV-4 Approximation affine d'une fonction dérivable

Théorème :

- Si f une fonction dérivable en un point x_0 alors on peut écrire $f(x)$, au voisinage de x_0, sous la forme : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\ (x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0}\ (x) = 0$

$$\left(\ (x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)$$

Remarques :

- On peut alors approcher la fonction $f(x)$, au voisinage de x_0, par la fonction affine $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Graphiquement, cette approximation affine revient à remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Exemple : Calcul approché de $\ln(x^2+x-1)$ au point $x=0{,}99$ voisinage du point $x_0=1$

☞ $f(x)=\ln(x^2+x-1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}$

- On prend $x_0=1$: $x_0=1 \Rightarrow x-x_0=-0{,}01$ et $\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=3 \end{cases}$
- La fonction affine qui approche $f(x)$ au voisinage du point $x_0=1$ est alors donnée par :
  $x \mapsto 3(x-1)=3x-3$
- valeur approchée de $f(0{,}99)$: $x=0{,}99 \Rightarrow f(0{,}99)\approx -0{,}03$
- valeur exacte (par une calculatrice) de $f(0{,}99)$: $f(0{,}99)=-0{,}030356...$

IV-5 Dérivabilité sur un intervalle

IV-5-1 Fonction dérivée et fonction de classe C¹

Définitions : (dérivabilité sur un intervalle)

- Une fonction f définie sur un intervalle $]a,b[$ est dérivable sur $]a,b[$ si et seulement si elle est dérivable en tout point de $]a,b[$.
- Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b[$ est continue sur $[a,b[$ si et seulement si elle est dérivable en tout point de $]a,b[$ et dérivable à droite de a.
- Une fonction f définie sur un intervalle $]a,b]$ est dérivable sur $]a,b]$ si et seulement si elle est dérivable en tout point de $]a,b[$ et dérivable à gauche de b.
- Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est dérivable sur $[a,b]$ si et seulement si elle est dérivable en tout point de $]a,b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b.

Définition : (Fonction dérivée)

- Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I alors sa fonction dérivée, notée f', c'est la fonction qui fait correspondre à tout point x de I sa dérivée $f'(x)$.

Définition :

- Une fonction dérivable f sur un intervalle I est de classe C^1 sur I si et seulement si sa fonction dérivée f' est continue sur I.

IV-5-2 Opérations sur les fonctions dérivées

☞ Si f est une fonction dérivable en un point x_0 alors la fonction

- f est dérivable en x_0 et $\boxed{(f)'(x_0)=f'(x_0)}$
- $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et $\boxed{(1/f)'(x_0)=\dfrac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}}$, $(f(x_0)\neq 0)$
- f^n est dérivable en x_0 et $\boxed{(f^n)'(x_0)=nf^{(n-1)}(x_0).f'(x_0)}$

☞ Si f et g sont deux fonctions dérivables en un point x_0 alors la fonction

- $f+g$ est dérivable en x_0 et $\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$
- $f \times g$ est dérivable en x_0 et $\boxed{(f \times g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)}$
- $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\boxed{(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$

Tableau récapitulatif

Opérations sur les fonctions dérivables	
$(f+g)'$	$f'+g'$
$(\ .f)'$, $(\ \in IR)$	$.f'$
$(f \times g)'$	$f.g'+f'.g$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'$, $g \neq 0$	$\dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$
$\left(\dfrac{1}{f}\right)'$, $f \neq 0$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$(f^n)'$	$nf'.f^{n-1}$
$(\sqrt{f})'$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
$(\ln(f))'$	$\dfrac{f'}{f}$
$(e^f)'$	$f'.e^f$

IV-5-3 Limite de la dérivée

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$ dont la fonction dérivée f' est continue sur $]a,b]$.

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l \in IR$ alors la fonction f est dérivable à droite au point a :

$$f_d'(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = l \in IR$$

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \pm\infty$ alors la fonction f n'est pas dérivable à droite au point a :

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \pm\infty$$

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ n'existe pas alors on ne peut pas conclure sur la dérivabilité de f à droite au point a.

Remarque ! La réciproque est fausse

Exemple : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $a = 0$

- La fonction f est dérivable en 0 mais la fonction f' n'a pas de limite en 0.

Exemple : $f(x) = |x^2 - 1|$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$, $a = 1$
  - $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_g'(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -2 \\ f_d'(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_g'(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = 2 \\ f_d'(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = -2 \end{cases}$$

IV-5-4 Règle de l'Hospital

Théorème : (Cette règle permet de lever, dans certains cas, l'indétermination $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a de I, vérifiant $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Si de plus les fonctions f et g sont dérivables sur $I - \{a\}$ et si les fonctions g et g' ne s'annulent pas sur I alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l}$, l fini ou infini

Remarques :

- La réciproque est fausse :

  Exemple : $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$, $g(x)=\sin x$ et $a=0$

  - La fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite finie en 0 mais la fonction $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ n'a pas de limite en 0.

- On peut appliquer la règle de l'Hospital si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ ou si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ($a$ fini ou infini) : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

- Si on applique la règle de l'Hospital et on trouve que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{0}{0}\ ou\ \dfrac{\infty}{\infty}$, on passe aux dérivées secondes : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, et ainsi de suite jusqu'à lever l'indétermination.

Exemples :

1) $h(x)=\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}$, $a>0$: $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, avec $f(x)=e^{x\ln a}-1$ et $g(x)=x$

   ➯ $f(0)=0$ et $g(0)=0$

   ➯ On applique la règle de l'Hospital : $f'(x)=(\ln a)e^{x\ln a}$ et $g'(x)=1$

   ➭ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(\ln a)e^{x\ln a}=\ln a \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ln a$

   ➯ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\ln a$

2) $h(x)=\dfrac{\ln x}{e^{x-1}-x}$: $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, avec $f(x)=\ln x$ et $g(x)=e^{x-1}-x$

   ➯ $f(1)=0$ et $g(1)=0$

   ➯ On applique la règle de l'Hospital :

   ➭ $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g'(x)=e^{x-1}-1$: $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{x\left(e^{x-1}-1\right)}$

   ➭ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty \end{cases}$

   ➯ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=-\infty \end{cases}$

3) $h(x)=\dfrac{\sin x - x}{\sin^3 x}$: $\quad h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, avec $f(x)=\sin x - x$ et $g(x)=\sin^3 x$

- $f(0)=0$ et $g(0)=0$
- On applique la règle de l'Hospital :
  - $f'(x)=\cos x-1$ et $g'(x)=3\cos x.\sin^2 x$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3\cos x.\sin^2 x}=\dfrac{0}{0}$
- On applique la règle de l'Hospital une deuxième fois : $f'(0)=g'(0)=0$
  - $f''(x)=-\sin x$ et $g''(x)=-3\sin^3 x+6\cos^2 x\sin x$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{-3\sin^3 x+6\cos^2 x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{-3\sin^2 x+6\cos^2 x}=-\dfrac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x\to a} h(x)=-\dfrac{1}{6}$

IV-5-5 Fonction composée – Fonction réciproque

a) Fonction composée

Théorème :

Si une fonction f est dérivable en un point x_0 et si la fonction g est dérivable au point $f(x_0)$ alors la fonction $(g\circ f)$ est dérivable au point x_0 et on a :

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

b) Fonction réciproque

Théorème :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I de IR vers $f(I)$.

Si f est dérivable en un point x_0 de I vérifiant $f'(x_0)\neq 0$ et si la bijection réciproque f^{-1} est continue au point $f(x_0)$ alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $f(x_0)$ et on a : $\quad (f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

IV-6 Dérivées de quelques fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
C, (C est une constante réelle)	0
$ax+b$, (a et b deux constantes réelles)	a
x^n, $(n \in IZ)$	nx^{n-1}
x , ($\in IR - IZ$) avec $\begin{cases} x>0, & \text{si } \quad <1 \\ x \geq 0, & \text{si } \quad \geq 1 \end{cases}$	$x^{\ -1}$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

IV-7 Dérivée d'ordre supérieur

IV-7-1 Définitions

Définition : (dérivée seconde)

- Une fonction f dérivable en un point x_0 de I est deux fois dérivable en x_0 si et seulement si sa fonction dérivée f' est dérivable en x_0.
- La dérivée de f' , notée f'' s'appelle la dérivée seconde de f : $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

De proche en proche, on peut ainsi définir les dérivées d'ordre supérieur de f , lorsqu'elles existent :

Définition : (dérivée d'ordre n)

- La dérivée $n^{ième}$ d'une fonction f en un point x_0, notée $f^{(n)}$, est égale à la dérivée de la dérivée $(n-1)^{ième}$ de f au point x_0, lorsqu'elles existent.
- La fonction f est alors n fois dérivable de dérivée $n^{ième}$ $f^{(n)}$: $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$: $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

- $f'(x) = (-1).(1+x)^{-2}$
- $f''(x) = (-1)(-2).(1+x)^{-3} = (-1)^2\, 2!(1+x)^{-(2+1)}$
- $f^{(3)}(x) = (-3).2!(1+x)^{-4} = (-1)^3.3!(1+x)^{-(3+1)}$

- On pense alors à la formule générale suivante :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n .n!(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n .n!.\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

- On utilise un raisonnement par récurrence pour la montrer :
  - Il est aisé de vérifier que la proposition est vrai pour $n = 1,2,3$.
  - Supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^n .n!(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n .n!.\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$ et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)}.(n+1)!(1+x)^{-(n+2)} = (-1)^{(n+1)}.(n+1)!.\frac{1}{(1+x)^{n+2}}$$

    - $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$ et $f^{(n)}(x) = (-1)^n .n!(1+x)^{-(n+1)}$
    - Donc $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n .n!.(-(n+1)).(1+x)^{-(n+1)-1}$
    - Qu'on écrit $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)}.(n+1)!(1+x)^{-(n+2)}$
- Donc $\forall n \in IN$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n .n!(1+x)^{-(n+1)} = (-1)^n .n!.\frac{1}{(1+x)^{n+1}}$

IV-7-2 Fonction de classe C^n

Définition :

- Une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est de classe C^2 sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde f'' est continue sur I.

Définition :

- Une fonction f n fois dérivable sur un intervalle I est de classe C^n sur I si et seulement si sa fonction dérivée n$^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$ est continue sur I.

IV-7-3 Formule de Leibniz

Théorème :

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivable en un point x_0 alors la fonction $(f \times g)$ est n fois dérivable en x_0 et : $(f \times g)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x_0).g^{(n-p)}(x_0)$, avec $f^{(0)} = f$

IV-8 Dérivée logarithmique et élasticité

IV-8-1 Dérivée logarithmique

Définition :

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 telle que $f(x_0) \neq 0$.

- La dérivée logarithmique de la fonction f au point x_0 c'est la dérivée de la fonction $\ln(|f|)$ au point x_0.
- On note $dl(f)$ la dérivée logarithmique de f.

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en un point x_0 telle que $f(x_0) \neq 0$ alors :

$$dl(f)(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Propriétés

$\boxed{dl(f^n) = n.dl(f)}$ $\boxed{dl(f \times g) = dl(f) + dl(g)}$ $\boxed{dl(\frac{f}{g}) = dl(f) - dl(g)}$

Remarque :

La dérivée logarithmique peut servir pour calculer plus simplement la dérivée d'une fonction

Exemple :

Calcul de la dérivée de la fonction : $\boxed{f(x) = \frac{x^2.\ln(x)^4.e^{3x}}{x^2+1}}$

- $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, avec
  - $f_2(x) = x^2 + 1$
  - $f_1(x) = f_3(x).f_4(x).f_5(x)$: $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \ln(x)^4$ et $f_5(x) = e^{3x}$
- $dl(f) = dl(\frac{f_1}{f_2}) = dl(f_1) - dl(f_2)$:
- $dl(f_1) = dl(f_3) + dl(f_4) + dl(f_5)$: $dl(f_1)(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x.\ln(x)} + 3$
  - $dl(f_3)(x) = \frac{f_3'(x)}{f_3(x)} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$
  - $dl(f_4)(x) = \frac{f_4'(x)}{f_4(x)} = \frac{4\ln(x)^3.\frac{1}{x}}{\ln(x)^4} = \frac{4}{x.\ln(x)}$
  - $dl(f_5)(x) = \frac{f_5'(x)}{f_5(x)} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}} = 3$

- $dl(f_2)(x) = \dfrac{f_2'(x)}{f_2(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

- D'où : $dl(f)(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x.\ln(x)} + 3 - \dfrac{2x}{x^2+1}$

- Or $f'(x) = f(x).dl(f)(x)$, donc : $\boxed{f'(x) = \left(\dfrac{x^2.\ln(x)^4.e^{3x}}{x^2+1}\right).\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x.\ln(x)} + 3 - \dfrac{2x}{x^2+1}\right)}$

IV-8-2 Elasticité

Définition :

Soit f une fonction définie en un point $x_0 \neq 0$ telle que $f(x_0) \neq 0$.

L'élasticité de la fonction f au point x_0, notée $E(f)(x_0)$, est égale à :

$$E(f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\dfrac{x-x_0}{x_0}} = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{x_0}{f(x_0)}.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

Théorème :

Si f est une fonction dérivable en un point $x_0 \neq 0$ telle que $f(x_0) \neq 0$ alors :

$$E(f)(x_0) = x_0\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = x_0 dl(f)(x_0)$$

Propriétés

$\boxed{E(f^n)(x) = n.E(f)(x)}$ $\boxed{E(f \times g)(x) = E(f)(x) + E(g)(x)}$ $\boxed{E(\frac{f}{g})(x) = E(f)(x) - E(g)(x)}$

V- Monotonie d'une fonction

V-1 Définitions et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.

- On dit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I ssi :
  $\forall (x,y) \in I^2 : \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) < f(y)$
- On dit que la fonction f est croissante ou largement croissante sur l'intervalle I ssi :
  $\forall (x,y) \in I^2 : \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR .

- On dit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I ssi :

$$\forall (x, y) \in I^2 : \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- On dit que la fonction f est décroissante ou largement décroissante sur l'intervalle I ssi : $\forall (x, y) \in I^2 : \quad x < y \quad \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Définition :

- Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.
- Une fonction est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR . La fonction f est

- strictement croissante sur l'intervalle I ssi $\quad \forall (x, y) \in I^2 : \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$
- largement croissante sur l'intervalle I ssi $\quad \forall (x, y) \in I^2 : \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR . La fonction f est

- strictement décroissante sur l'intervalle I ssi $\quad \forall (x, y) \in I^2 : \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$
- largement décroissante sur l'intervalle I ssi $\quad \forall (x, y) \in I^2 : \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$

V-2 Opérations sur les fonctions monotones

- Si f est une fonction croissante sur un intervalle $[a, b]$ alors
  - la fonction $f + C$ est croissante sur $[a, b]$, C étant une constante.
  - la fonction f est croissante sur $[a, b]$ si >0 et décroissante si <0

- Si f est une fonction décroissante sur un intervalle $[a, b]$ alors
  - la fonction $f + C$ est décroissante sur $[a, b]$, C étant une constante.
  - la fonction f est décroissante sur $[a, b]$si >0 et croissante si <0

- Si f est une fonction croissante sur un intervalle $[a, b]$ ne s'annulant pas sur $[a, b]$ alors la fonction $1/f$ est décroissante sur $[a, b]$.

- Si f est une fonction décroissante sur un intervalle $[a,b]$ ne s'annulant pas sur $[a,b]$ alors la fonction $1/f$ est croissante sur $[a,b]$.

- Si f et g sont deux fonctions simultanément croissantes (respectivement décroissantes) sur un intervalle I alors la fonction $f+g$ l'est aussi.

- Si f et g sont deux fonctions simultanément croissantes ou décroissantes sur un intervalle I alors la fonction $g \circ f$, lorsqu'elle existe, est croissante.

- Si l'une des deux fonctions f et g est croissante et l'autre est décroissante sur un intervalle I alors la fonction $g \circ f$, lorsqu'elle existe, est décroissante.

Remarque :

- Si f et g sont deux fonctions monotones alors $f \times g$ est une fonction monotone, le type de monotonie de $f \times g$ est indépendant du type de la monotonie de f et de g.

- Six cas sont possibles : (Exemples)

	$f(x)=-x$ $g(x)=x$ $f\times g=-x^2$ **sur** IR^+	$f(x)=-x$ $g(x)=x$ $f\times g=-x^2$ **sur** IR^-	$f(x)=-x$ $g(x)=-x$ $f\times g=x^2$ **sur** IR^+	$f(x)=-x$ $g(x)=-x$ $f\times g=x^2$ **sur** IR^-	$f(x)=x$ $g(x)=x$ $f\times g=x^2$ **sur** IR^+	$f(x)=x$ $g(x)=x$ $f\times g=x^2$ **sur** IR^-
f	**décroissante**	**décroissante**	**décroissante**	**décroissante**	**croissante**	**croissante**
g	**croissante**	**croissante**	**décroissante**	**décroissante**	**croissante**	**croissante**
$f\times g$	**décroissante**	**croissante**	**croissante**	**décroissante**	**croissante**	**décroissante**

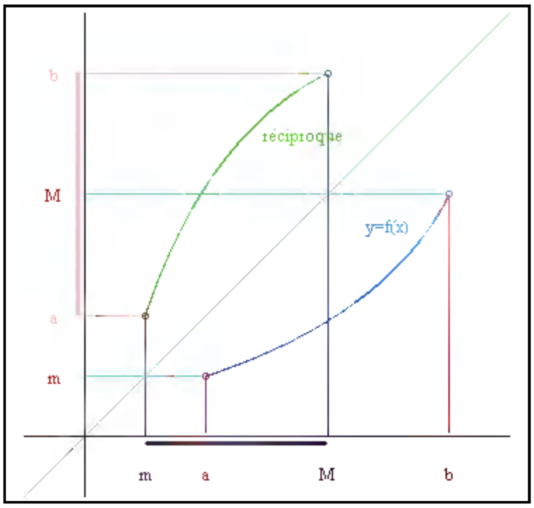
V-3 Stricte monotonie et continuité

Théorème :

- Si une fonction f est continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante de $[f(a), f(b)]$ vers $[a,b]$.
- Si une fonction f est continue et strictement décroissante sur un intervalle $[a,b]$ alors la fonction f est une bijection de $[a,b]$ vers $[f(b), f(a)]$ et sa bijection réciproque est continue et strictement décroissante de $[f(b), f(a)]$ vers $[a,b]$.

Remarque :

- Les graphes d'une bijection f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



V-4 Monotonie d'une fonction dérivable

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I ssi
$$\forall x \in I : \quad f'(x) \quad > 0$$
- la fonction f est largement croissante sur l'intervalle I ssi $\forall x \in I : \quad f'(x) \quad \geq 0$

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I ssi $\forall x \in I : \quad f'(x) \quad < 0$
- la fonction f est largement décroissante sur l'intervalle I ssi
$$\forall x \in I : \quad f'(x) \quad \leq 0$$

VI- Convexité d'une fonction

VI-1 Définition et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est convexe sur I si :

  $\forall (x,y)\in I^2$ et $\forall \ \in [0,1]$, on a : $f(\ .x+(1-\ ).y)\leq \ .f(x)+(1-\ ).f(y)$

- La fonction f est strictement convexe sur I si :

  $\forall (x,y)\in I^2$ et $\forall \ \in [0,1]$, on a : $f(\ .x+(1-\ ).y)< \ .f(x)+(1-\ ).f(y)$

- La fonction f est concave sur I si :

  $\forall (x,y)\in I^2$ et $\forall \ \in]0,1[$, on a : $f(\ .x+(1-\ ).y)\geq \ .f(x)+(1-\ ).f(y)$

- La fonction f est concave sur I si :

  $\forall (x,y)\in I^2$ et $\forall \ \in]0,1[$, on a : $f(\ .x+(1-\ ).y)> \ .f(x)+(1-\ ).f(y)$

Exemples :

1) $f(x)=|x|$ est une fonction convexe.
2) $f(x)=x^2$ est une fonction convexe,
3) la fonction $f(x)=-x^2$ est concave.
4) les fonctions affines ($f(x)=ax+b$) sont des fonctions à la fois convexe et concave.

Théorème :

Une fonction f est concave si et seulement si la fonction $(-f)$ est convexe

Théorème : (Inégalité de Jensen)

Soient f une fonction convexe sur un intervalle I , $x_1,x_2,..,x_n$ des points de I et $_1,\ _2,\dots,\ _n$ n réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{i=n}\ _i=1$, alors : $f\left(\sum_{i=1}^{i=n}\ _i x_i\right)\leq \sum_{i=1}^{i=n}\ _i f(x_i)$

Remarque : (Cas particulier de l'inégalité de Jensen)

Si f est une fonction convexe sur un intervalle I et $(x_1,x_2,..,x_n)\in I^n$ alors :

$\boxed{f\left(\frac{x_1+..+x_n}{n}\right)\leq \frac{f(x_1)+...f(x_n)}{n}}$ ou encore $\boxed{f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}x_i\right)\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}f(x_i)}$, $\left(\ _i=\frac{1}{n}\right)$

VI-2 Opérations sur les fonctions convexes

- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I et si ≥ 0 alors la fonction f est convexe sur I .
- Si f est une fonction concave sur un intervalle I et si ≥ 0 alors la fonction f est concave sur I .

- Si f et g sont deux fonctions convexes sur un intervalle I alors la fonction $f+g$ est convexe sur I .
- Si f et g sont deux fonctions concaves sur un intervalle I alors la fonction $f+g$ est concave sur I .

VI-3 Convexité d'une fonction dérivable

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- la fonction f est convexe (strictement convexe) sur I ssi sa fonction dérivée f' est croissante (strictement croissante) sur I .
- la fonction f est concave (strictement concave) sur I ssi sa fonction dérivée f' est décroissante (strictement décroissante) sur I .

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- la fonction f est convexe sur I ssi $\forall x \in I: \quad f''(x) \quad \geq 0$
- la fonction f est concave sur I ssi $\forall x \in I: \quad f''(x) \quad \leq 0$

Remarque !

- Une fonction f deux fois dérivable et strictement convexe sur un intervalle I n'implique pas que $(\forall x \in I: \quad f''(x) \quad > 0)$.

  Exemple : $f(x) = x^4$

  - f est une fonction deux fois dérivable sur $[-1,1]$:
    - $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$
  - f est une fonction strictement convexe sur $[-1,1]$:
    - f' est strictement croissante sur $[-1,1]$
  - Mais $\exists x_0 \in I \; (x_0 = 0) / f''(x_0) \quad \not> 0 \; : \; (f''(0) = 0)$

- De même, une fonction f deux fois dérivable et strictement concave un intervalle I n'implique pas que $(\forall x \in I: \quad f''(x) \quad < 0)$.

VII- Optimisation d'une fonction

VII-1 Extremums d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f admet

- un maximum global sur I au point x_0 si : $\forall x \in I : \quad f(x) \leq f(x_0)$
- un minimum global sur I au point x_0 si : $\forall x \in I : \quad f(x) \geq f(x_0)$
- un maximum local sur I au point x_0 si : $\exists V(x_0) \subseteq I / \forall x \in V(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$
- un minimum local sur I au point x_0 si : $\exists V(x_0) \subseteq I / \forall x \in V(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle extremum global de f sur I un maximum ou un minimum global sur I.
- On appelle extremum local de f sur I un maximum ou un minimum local sur I.

VII-2 Extremums et points d'inflexion

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un point de I.

- Le point x_0 est un extremum de la fonction f si la courbe de f, dans un repère orthonormée, change de concavité au point $M_0(x_0, f(x_0))$ sans changer de sens.
- Le point x_0 est un point d'inflexion de la fonction f si la courbe de f, dans un repère orthonormée, change de concavité au point $M_0(x_0, f(x_0))$ en changeant de sens.

VII-3 Cas d'une fonction dérivable

VII-3-1 Condition nécessaire

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la fonction f présente un extremum en un point x_0 de I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque ! La réciproque est fausse

Exemple : $f(x)=x^3$

- f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$: $f'(x)=3x^2$
- $f'(0)=0$ mais 0 n'est ni minimum $(f(-1)<f(0))$ ni maximum $(f(1)>f(0))$ de f sur $[-1,1]$.

VII-3-2 Condition suffisante

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction f' s'annule en un point x_0 de I en changeant de signe alors la fonction f présente un extremum au point x_0.
- Si la fonction f' s'annule en un point x_0 de I sans changer de signe alors la fonction f présente un point d'inflexion au point x_0.

Exemples :

1) $f(x)=x^3$
   - f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$ et $f'(x)=3x^2$
   - $f'(0)=0$ et f' ne change pas de signe $(\forall x\in[-1,1]: f'(x)\geq 0)$
   - 0 est alors un point d'inflexion de f sur $[-1,1]$.

2) $f(x)=x^2$
   - f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$ et $f'(x)=2x$
   - $f'(0)=0$ et f' change de signe $\begin{cases} f'(x)\geq 0 & x\geq 0 \\ f'(x)\leq 0 & x\leq 0 \end{cases}$
   - 0 est alors un extremum de f sur $[-1,1]$.

3) $f(x)=x|x|$: $\begin{cases} f(x)=-x^2 & si\ x\leq 0 \\ f(x)=x^2 & si\ x\geq 0 \end{cases}$
   - f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1,1]$ et $\begin{cases} f'(x)=-2x & si\ x\leq 0 \\ f'(x)=2x & si\ x\geq 0 \end{cases}$
   - $f'(0)=0$ et f' ne change pas de signe $(\forall x\in[-1,1]: f'(x)\geq 0)$
   - 0 est alors un point d'inflexion de f sur $[-1,1]$.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I telle que la fonction dérivée f' s'annule en un point x_0 de I, $f'(x_0)=0$, alors la fonction f présente

- un maximum au point x_0 si $f''(x_0)<0$
- un minimum au point x_0 si $f''(x_0)>0$
- un point d'inflexion au point x_0 si $f''(x_0)=0$

Exemples :

1) $f(x)=x^3$
   - f est une fonction deux fois dérivable sur $[-1,1]$: $f'(x)=3x^2$ et $f''(x)=6x$
   - $f'(0)=0$ et $f''(0)=0$
   - 0 est alors un point d'inflexion de f sur $[-1,1]$.

2) $f(x)=x^2$
   - f est une fonction deux fois dérivable sur $[-1,1]$: $f'(x)=2x$ et $f''(x)=2$
   - $f'(0)=0$ et $f''(0)>0$
   - 0 est alors un minimum de f sur $[-1,1]$.

Remarque !

❖ Une fonction peut avoir un point d'inflexion ou un extremum sans être deux fois dérivable.

Exemple : $f(x)=x|x|$: $\begin{cases} f(x)=-x^2 & si\ x\le 0 \\ f(x)=x^2 & si\ x\ge 0 \end{cases}$

- 0 est un point d'inflexion de f sur $[-1,1]$.
- Mais la fonction f n'est pas deux fois dérivable sur $[-1,1]$ car :
  - $\begin{cases} f'(x)=-2x & si\ x\le 0 \\ f'(x)=2x & si\ x\ge 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} f''(x)=-2 & si\ x<0 \\ f''(x)=2 & si\ x>0 \end{cases}$
  - f n'est alors pas deux fois dérivable en 0.

VII-4 Cas d'une fonction convexe

Théorème :

- Si f est une fonction convexe sur un intervalle $]a,b[$ alors tout extremum local est un minimum de f sur $]a,b[$.
- Si f est une fonction concave sur un intervalle $]a,b[$ alors tout extremum local est un maximum de f sur $]a,b[$.

VII-5 Cas d'une fonction convexe et dérivable

Théorème :

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et x_0 un point de $]a,b[$ vérifiant $f'(x_0)=0$.

- Si la fonction f est concave sur $]a,b[$ alors x_0 est un maximum de f sur $]a,b[$.
- Si la fonction f est convexe sur $]a,b[$ alors x_0 est un minimum de f sur $]a,b[$.

VIII- Annexe (fonctions usuelles)

VIII-1 Fonction puissance

VIII-1-1 Cas où la puissance est un entier strictement positif

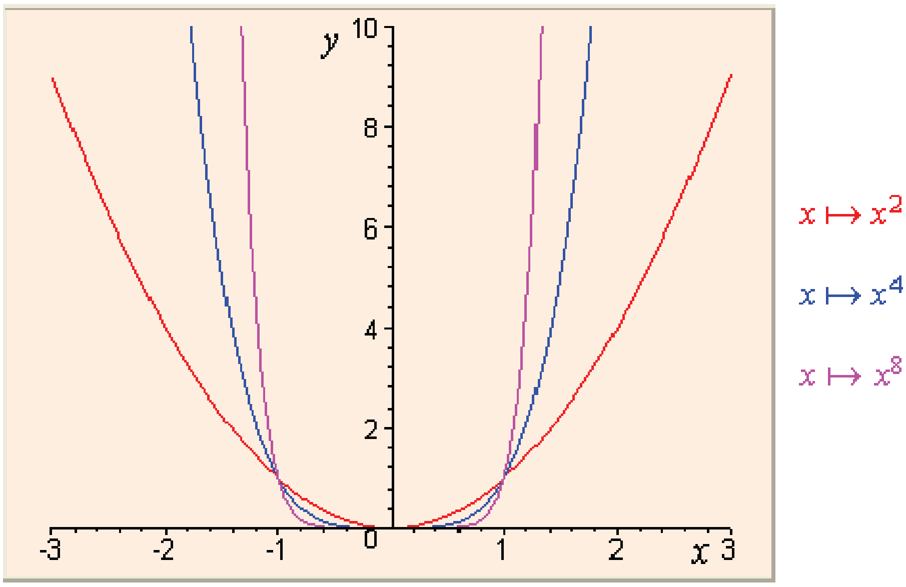
C'est la fonction $f : x \mapsto x^n$, n est un entier strictement positif

a) Cas où n est pair

1) La fonction f est définie sur IR.
2) La fonction f est paire : $(-x)^n = (x)^n$
3) La fonction f est continue et dérivable sur IR.
4) Limites de f aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)^n = +\infty$
5) La fonction dérivée f' de f : $f'(x) = nx^{n-1}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
6) f est
   i) décroissante sur $]-\infty,0]$ $(x \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0)$
   ii) croissante sur $[0,+\infty[$ $(x \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0)$
7) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^n	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

8) Graphe de f :

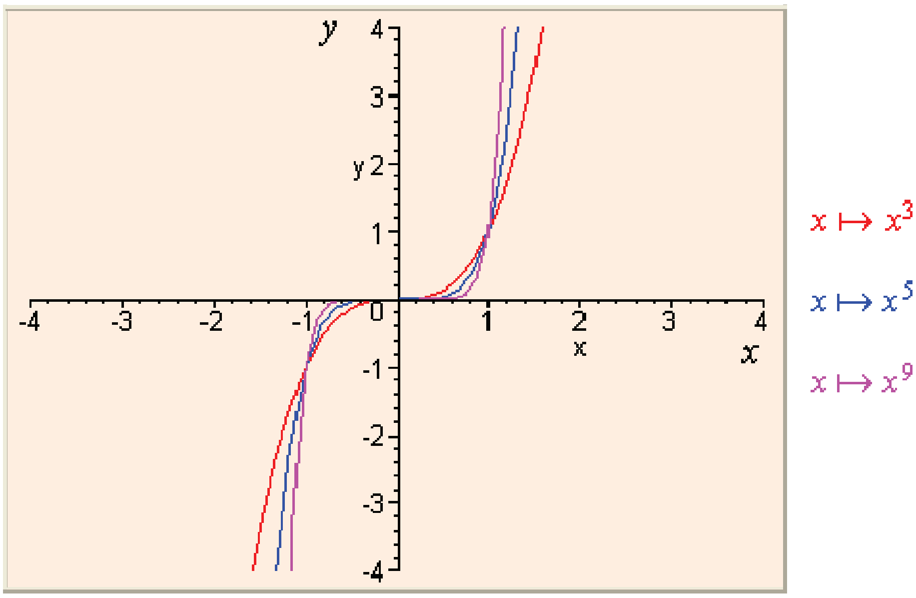


b) Cas où n est impair

1) La fonction f est définie sur IR .
2) La fonction f est impaire : $(-x)^n = -(x)^n$
3) La fonction f est continue et dérivable sur IR
4) Limites de f aux bornes de D_f : $\lim_{x\to+\infty}(x)^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(x)^n = -\infty$
5) La fonction dérivée f' de f :
   i) Si $n \geq 2$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   ii) Si $n = 1$ alors M : $\forall x \in IR, f'(x) \neq 0$
6) f est croissante sur IR $(\forall x \in IR \Rightarrow f'(x) \geq 0)$
7) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^n	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

8) Graphe de f :



VIII-1-2 Cas où la puissance est un entier strictement négatif

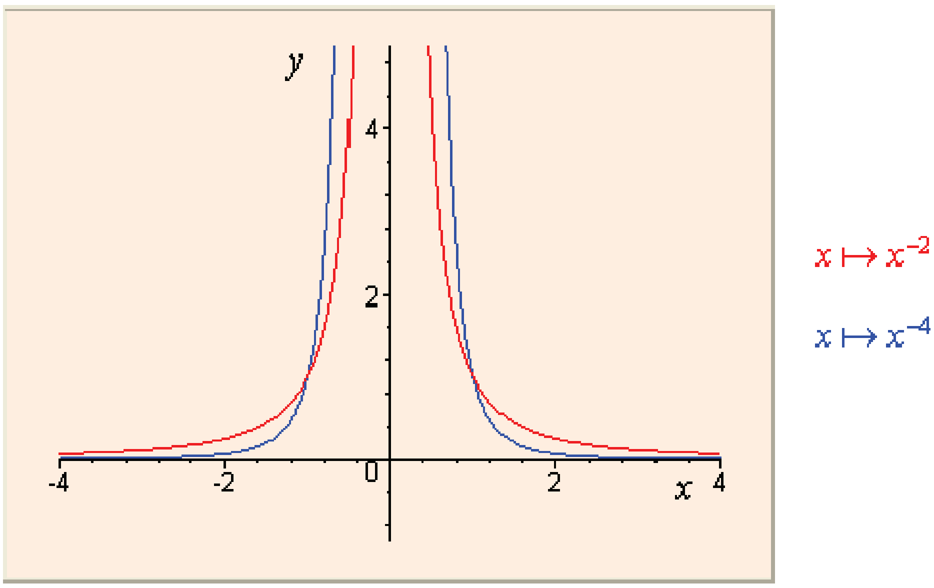
C'est la fonction $f : x \mapsto x^n$, n est un entier strictement négatif . On pose $n = -m$, m est alors un entier strictement positif. L'étude de cette fonction se déduit alors de celle de la fonction puissance étudiée au paragraphe précédent, $x^n = \dfrac{1}{x^m}$.

a) Cas où n est pair

1) La fonction f est définie sur IR^*.
2) La fonction f est paire : $(-x)^n = (x)^n$
3) La fonction f est continue et dérivable sur IR^*.
4) Limites de f aux bornes de D_f : $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
   i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^n = 0$
   ii) $\lim\limits_{x\to 0^-}(x)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^n = +\infty$
5) La fonction dérivée f' de f : $f'(x) = nx^{n-1}$
6) f est croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$
7) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

8) Graphe de f :

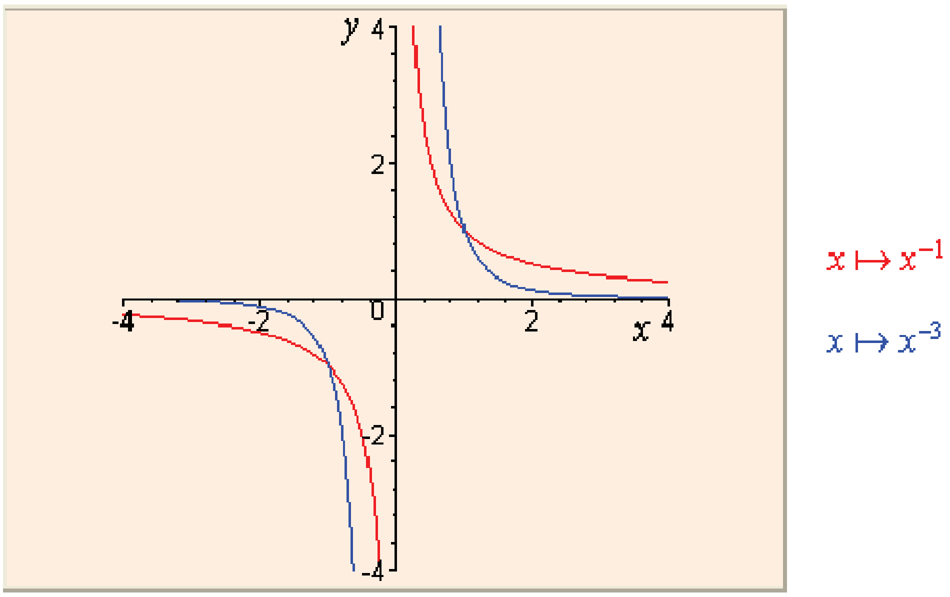


b) Cas où n est impair

1) La fonction f est définie sur IR^*.
2) La fonction f est impaire : $(-x)^n = -(x)^n$
3) La fonction f est continue et dérivable sur IR^*.
4) Limites de f aux bornes de D_f : $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
   i) $\lim\limits_{x\to 0^-}(x)^n = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^n = +\infty$
   ii) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x)^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)^n = 0$
5) La fonction dérivée f' de f : $f'(x) = nx^{n-1}$
6) f est décroissante sur IR^*
7) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

8) Graphe de f :



VIII-1-3 Cas où la puissance est un rationnel

C'est la fonction $f : x \mapsto x^r$, r est rationnel. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in IZ \times IZ^*$, l'étude de cette fonction se déduit alors de celles des fonctions "puissances entières ".

a) Cas où r est strictement positif

1) La fonction f est définie et continue sur IR^+.
2) Limites de f aux bornes de D_f , $D_f = [0,+\infty[$: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x)^r = +\infty$
3) La fonction dérivée f' de f : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = rx^{r-1}$
   a) Si $r > 1$ alors f est dérivable à droite de 0 : $f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^r}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{r-1} = 0$
   b) Si $r = 1$, f c'est la fonction identité.
   c) Si $0 < r < 1$ alors f n'est pas dérivable à droite de 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^r}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{r-1} = +\infty$
4) f est croissante sur IR^+.
5) D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
x^r	0 $\nearrow$	$+\infty$

b) Cas où est strictement négatif

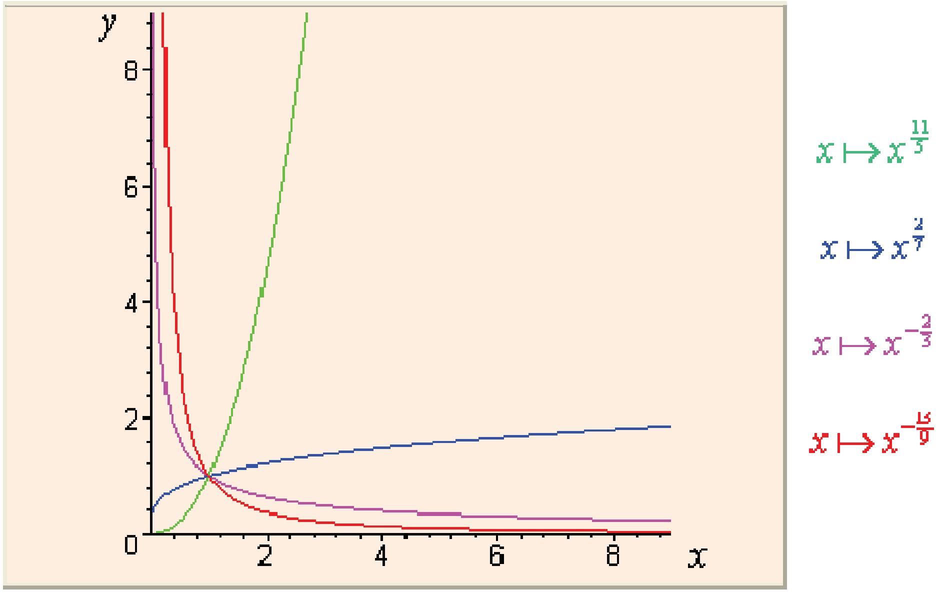
1) La fonction f est définie et continue sur IR^{*+}.
2) Limites de f aux bornes de D_f , $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$:

$$\lim_{x \to 0^+} (x)^r = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (x)^r = 0$$

3) La fonction dérivée f' de f : $\forall x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[, \quad f'(x) = rx^{r-1}$
4) f est décroissante sur IR^{*+}.
5) D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
x^r	$\Vert$ $+\infty$ $\searrow$	0

c) Graphes de



Remarque :

Si r est non nul alors la fonction puissance $f: \ x \mapsto x^r$ est continue et strictement monotone de IR^{*+} vers lui-même, c'est donc une bijection de IR^{*+} vers IR^{*+} . Sa bijection réciproque est $f^{-1}: \ x \mapsto x^{\frac{1}{r}}$.

VIII-2 Fonction exponentielle et fonction logarithmique népérien

VIII-2-1 Fonction exponentielle

1) La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur IR .
2) Limites de f aux bornes de $D_f = IR$: $\lim_{x \to -\infty}(e^x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty}(e^x) = +\infty$
3) La fonction dérivée : $(e^x)' = e^x$
4) La fonction exponentielle est croissante sur IR .
5) Le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

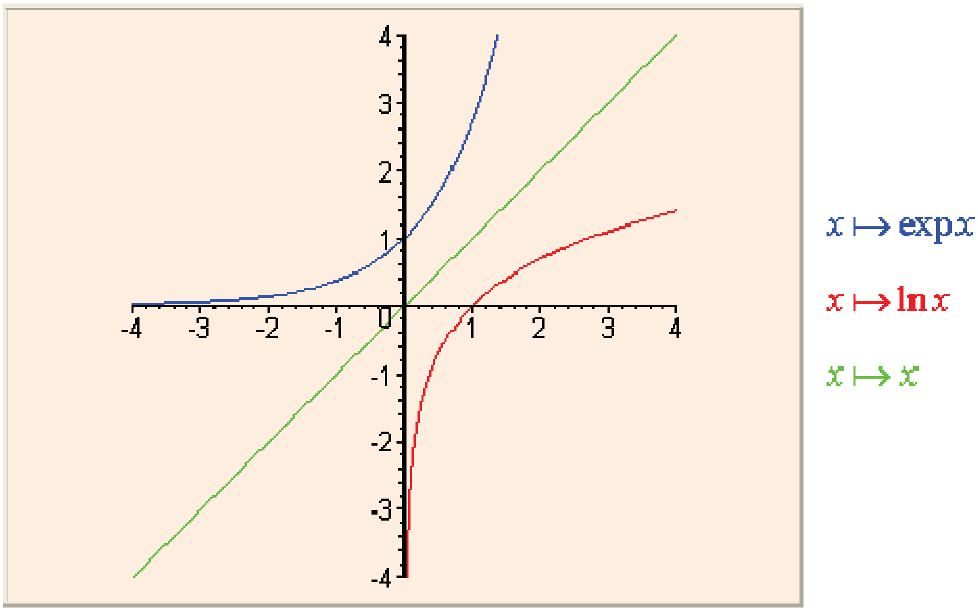
VIII-2-2 Fonction logarithme népérien

1) La fonction logarithme népérien est définie, continue et dérivable sur IR^{*+} .
2) Limites de f aux bornes de $D_f =]0,+\infty[$: $\lim_{x \to 0^+}(\ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}(\ln x) = +\infty$
3) La fonction dérivée : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4) La fonction logarithme népérien est croissante sur IR^{*+} .
5) D'où le tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
e^x	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

VIII-2-3 Graphe des deux fonctions

- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante de IR vers IR^{*+}.
- La fonction exponentielle est alors bijective de IR vers IR^{*+}.
- La fonction logarithme népérien c'est la bijection réciproque de cette fonction.
- Les graphes des deux fonctions, exponentielle et logarithme népérien, sont alors symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) :



VIII-2-4 Propriétés et formules fondamentales

$\forall a \in]0,+\infty[\quad \forall b \in]0,+\infty[\quad \forall n \in IN^*$	
$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$	$\ln(n.a) = n.\ln a$
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$	$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$

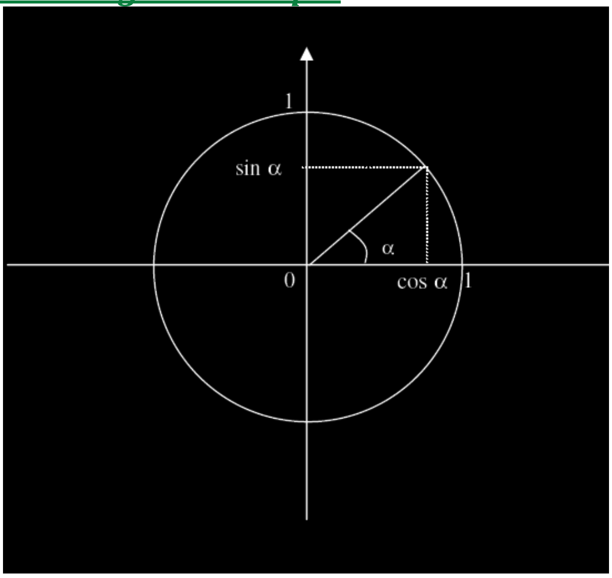
$\forall a \in IR \quad \forall b \in IR \quad \forall n \in IN^*$	
$e^{a+b} = e^a.e^b$	$e^{n.a} = (e^a)^n$
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$\forall n \in IN^*$	
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

VIII-3 Fonction circulaires

VIII-3-1 Introduction

a) Définition et cercle trigonométrique



- Le cercle trigonométrique c'est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon 1.

- Soit M un point du cercle de coordonnés x et y : $M(x,y)$
- Si   est l'angle que fait $[O,M)$ avec l'axe des abscisses, alors : $\begin{cases} x = \cos \\ y = \sin \end{cases}$

- Le cosinus représente l'abscisse
- Le sinus représente l'ordonnée

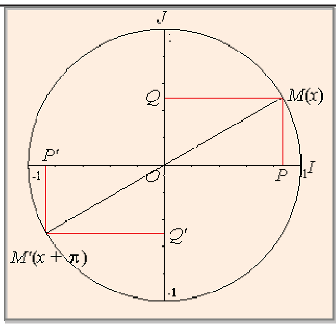
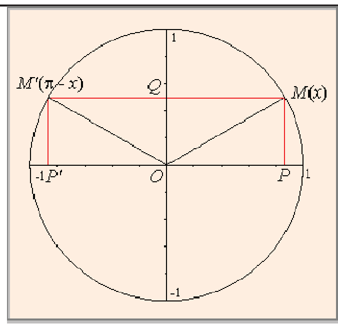
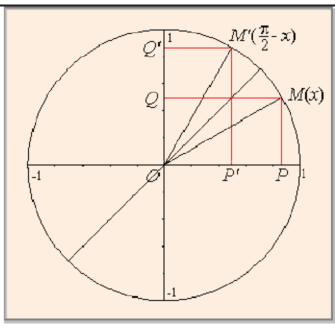
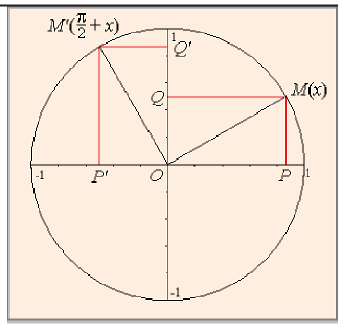
b) Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\ }{6}$	$\frac{\ }{4}$	$\frac{\ }{3}$	$\frac{\ }{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

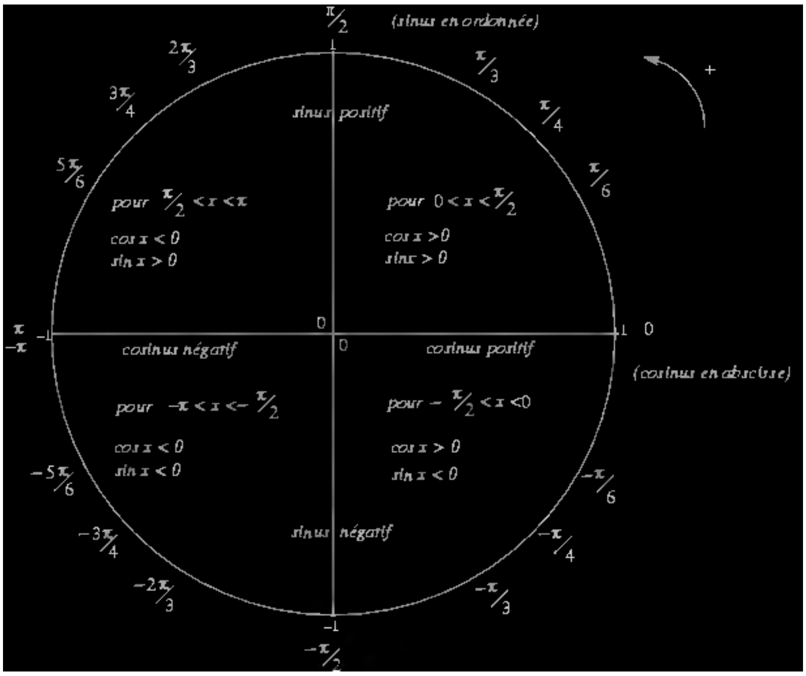
c) Formules

$\forall x \in IR$		$\forall x \in IR - \left\{\frac{\ }{2} + k \ \ , k \in IZ\right\}$
$-1 \le \cos x \le 1$	$-1 \le \sin x \le 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$		

d) Relations fondamentales

$\cos(\ +x)=-\cos x$ $\sin(\ +x)=-\sin x$		$\cos(\ -x)=-\cos x$ $\sin(\ -x)=\sin x$	
$\cos(\frac{}{2}-x)=\sin x$ $\sin(\frac{}{2}-x)=\cos x$		$\cos(\frac{}{2}-x)=-\sin x$ $\sin(\frac{}{2}-x)=\cos x$	

e) Signe de sinus et cosinus



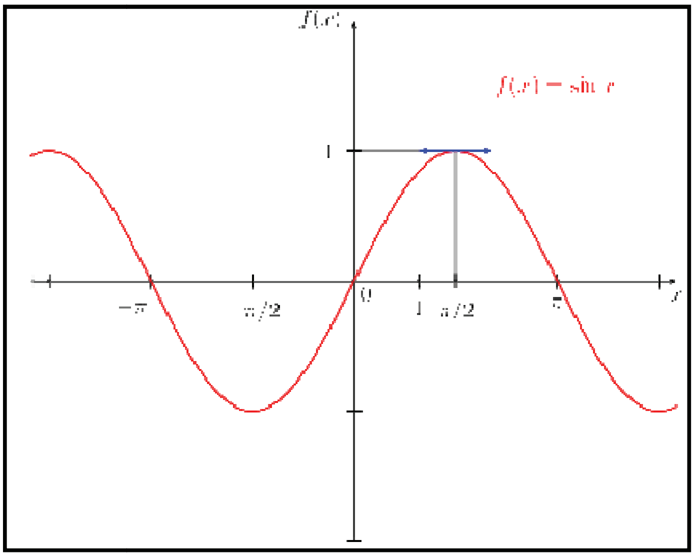
VIII-3-2 sinus et arcsinus

a) sinus

1) La fonction sinus est définie sur IR .
2) La fonction sinus est continue et dérivable sur IR .
3) La fonction sinus est impaire : $\sin(-x) = -\sin x$
4) La fonction sinus est périodique, de période 2 .
5) Le domaine d'étude peut alors être réduit à $[0, \;]$: $\sin 0 = \sin \; = 0$
6) La fonction dérivée : $\sin'(x) = \cos x$
7) La fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{}{2}, \;\right]$
8) D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{}{2}$		
$\sin' x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$			1		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

9) Graphe de f :



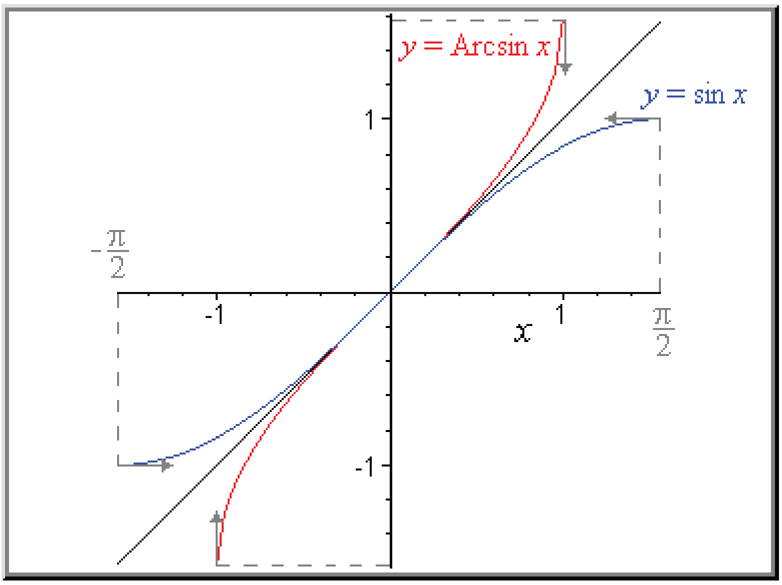
b) Arcsinus

- La fonction sinus est continue et strictement croissante de $\left[-\frac{}{2},\frac{}{2}\right]$ vers $[-1,1]$.
- La fonction sinus est alors bijective de $\left[-\frac{}{2},\frac{}{2}\right]$ vers $[-1,1]$.
- La bijection réciproque de cette fonction s'appelle arcsinus.
- arcsinus est alors une bijection de $[-1,1]$ vers $\left[-\frac{}{2},\frac{}{2}\right]$.

1) La fonction arcsinus est définie et continue sur $[-1,1]$.
2) La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$.
3) La fonction arcsinus est impaire
4) La fonction dérivée : $\forall x \in \left]-1,1\right[: \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5) La fonction arcsinus est croissante sur $[-1,1]$
6) D'où le tableau de variations :

x	-1		1
$\arcsin x$	$-\frac{}{2}$	$\nearrow$	$\frac{}{2}$

7) Graphe de f :



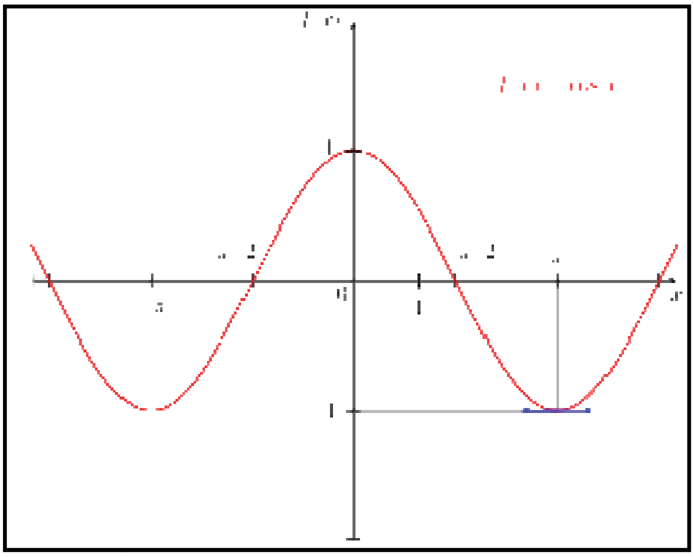
VIII-3-3 cosinus et arccosinus

a) cosinus

1) La fonction cosinus est définie sur IR .
2) La fonction cosinus est continue et dérivable sur IR .
3) La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos x$
4) La fonction cosinus est périodique, de période $2\ \ $.
5) Le domaine d'étude peut alors être réduit à $[0,\ \ ]$: $\cos 0 = 1$ et $\cos\ \ = -1$
6) La fonction dérivée : $\cos'(x) = -\sin x$
7) La fonction cosinus est décroissante sur $[0,\ \ ]$.
8) D'où le tableau de variations :

x	0	
$\cos' x$	-	
$\cos x$	1	0

9) Graphe de f :



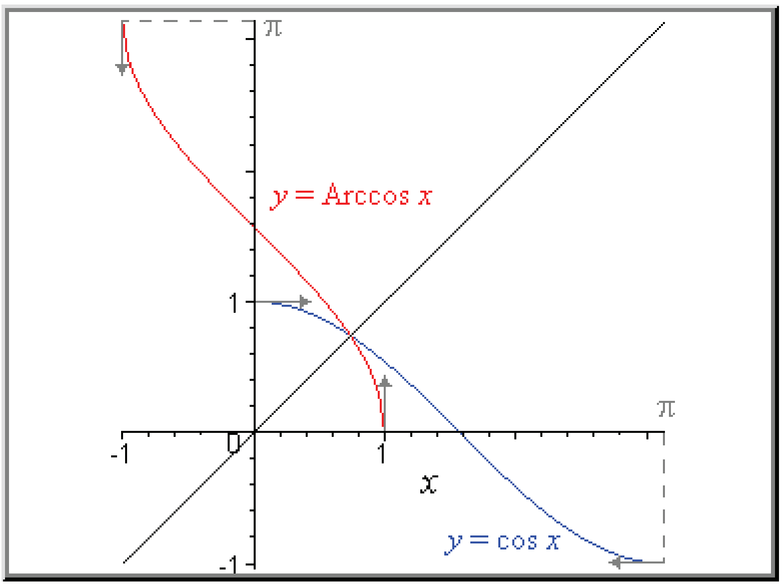
b) Arccosinus

- La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de l'intervalle $[0, \ ]$ vers l'intervalle $[-1,1]$.
- La fonction cosinus est alors bijective de $[0, \ ]$ vers $[-1,1]$.
- La bijection réciproque de cette fonction s'appelle arccosinus.
- arccosinus est alors une bijection de $[-1,1]$ vers $[0, \ ]$.

1) La fonction arccosinus est définie et continue sur $[-1,1]$.
2) La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$.
3) La fonction arccosinus est paire
4) La fonction dérivée : $\forall x \in \left]-1,1\right[: \quad \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
5) La fonction arccosinus est croissante sur $[-1,1]$
6) D'où le tableau de variations :

x	-1 $\qquad$ 1
$\arccos x$	$\searrow$ 0

7) Graphe de f :



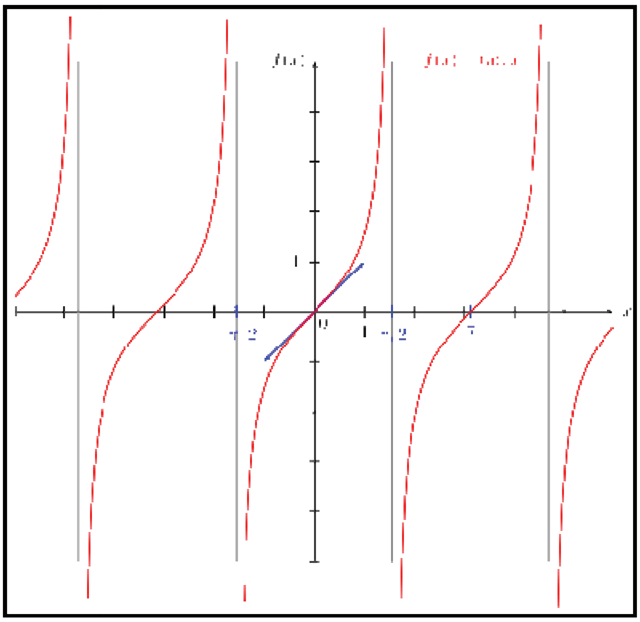
VIII-3-4 tangente et arctangente

a) tangente

1) La fonction tangente est définie sur $IR-\left\{\frac{}{2}+k\ \ ,k\in IZ\right\}$.
2) La fonction tangente est continue et dérivable sur $IR-\left\{\frac{}{2}+k\ \ ,k\in IZ\right\}$.
3) La fonction tangente est impaire : $\tan(-x)=-\tan x$
4) La fonction tangente est périodique, de période .
5) Le domaine d'étude peut alors être réduit à $\left[0,\frac{}{2}\right[$: $\tan 0=0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{}{2}}\tan x=+\infty$
6) La fonction dérivée : $\tan'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7) La fonction tangente est croissante sur $\left[0,\frac{}{2}\right[$.
8) D'où le tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{}{2}$
$\tan' x$	$+$ $\qquad$ 0
$\tan x$	0 $\nearrow$ $+\infty$

9) Graphe de f :



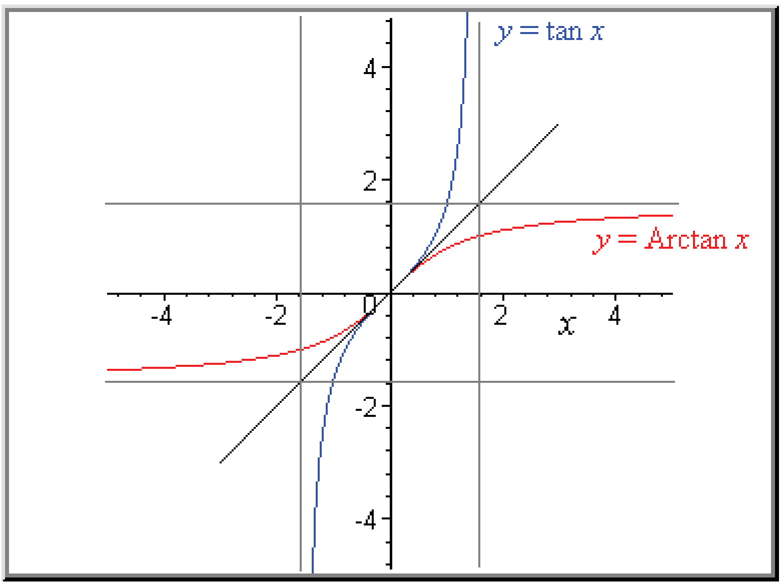
b) Arctangente

- La fonction tangente est continue et strictement croissante de l'intervalle $\left]-\frac{}{2},\frac{}{2}\right[$ vers IR .
- La fonction tangente est alors bijective de $\left]-\frac{}{2},\frac{}{2}\right[$ vers IR .
- La bijection réciproque de cette fonction s'appelle arctangente.
- arctangente est alors une bijection de IR vers $\left]-\frac{}{2},\frac{}{2}\right[$.

1) La fonction arctangente est définie et continue sur IR .
2) La fonction arctangente est dérivable sur IR .
3) La fonction arctangente est impaire
4) La fonction dérivée : $\forall x \in \left]-1,1\right[:\quad \arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
5) La fonction arctangente est croissante sur IR
6) D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{}{2}$ ↗	$\frac{}{2}$

7) Graphe de f :



CHAPITRE 2 : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

I- Théorème des accroissements finis

I-1 Théorème de Rolle

I-1-1 Théorème de Rolle

Théorème :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$ alors : $\exists c \in]a,b[/ f'(c)=0$

Remarques :

- Le point c, où s'annule la fonction dérivée, n'est en général pas unique.
- Toutes les conditions du théorème sont nécessaires : On ne peut appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes:
  - f définie de $[0,1]$ vers IR par $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\in[0,1[\\ 0 \text{ si } x=1 \end{cases}$ car f n'est pas continue sur $[0,1]$.
  - f définie de $[-1,1]$ vers IR par $f(x)=|x|$ car f n'est pas dérivable sur $]-1,1[$.

Exemples :

1) $f(x)=x^2$ et $[a,b]=[-1,1]$
   - f est une fonction continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $f(-1)=f(1)=1$.
   - On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle $[-1,1]$:
     - $f'(x)=2x \Rightarrow c=0$
     - $c=0$ est alors le point de $]-1,1[$ qui vérifie le théorème de Rolle sur $[-1,1]$.

2) $f(x)=x^3-x+1$ et $[a,b]=[0,1]$
   - f est une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et $f(0)=f(1)=1$.
   - On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle $[0,1]$:
     - $f'(x)=3x^2-1$: $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad c_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ou $c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$
     - $c_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}\notin]0,1[$ et $c_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\in]0,1[$
     - $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ est alors le point de $]0,1[$ qui vérifie le théorème de Rolle sur $[0,1]$.

3) $f(x)=x^3-x+1$ et $[a,b]=[-1,1]$

- f est une fonction continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $f(-1)=f(1)=1$.
- On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle $[-1,1]$:
  - $f'(x)=3x^2-1$: $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3}$
  - $c_1=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ et $c_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sont donc les deux points de $]-1,1[$ qui vérifient le théorème de Rolle sur l'intervalle $[-1,1]$.

I-1-2 Théorème de Rolle à l'infini

Théorème :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$ alors : $\quad \exists c\in\,]a,+\infty[\,/\,f'(c)=0$
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $]-\infty,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]-\infty,b[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(b)$ alors : $\quad \exists c\in\,]-\infty,b[\,/\,f'(c)=0$
- Si f est une fonction dérivable sur $IR=]-\infty,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ alors : $\quad \exists c\in IR/\,f'(c)=0$

Remarque :

- Les mêmes remarques que pour le théorème de Rolle sur un intervalle $[a,b]$.

Exemples :

1) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $[1,+\infty[$

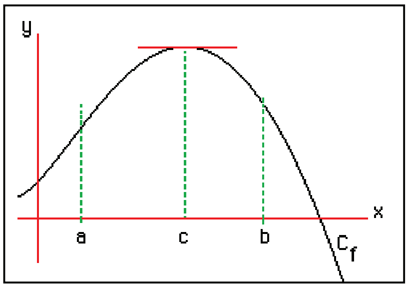
- f est une fonction continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)=0$
- On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle $[1,+\infty[$:
  - $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$: $\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$
  - $c=e$ est alors le point de $]1,+\infty[$ qui vérifie le théorème de Rolle sur $[1,+\infty[$.

2) $f(x)=x^2$ sur IR

- f est une fonction dérivable sur IR et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- On peut donc appliquer le théorème de Rolle à f sur l'intervalle IR : $f'(x)=2x \Rightarrow c=0$
  - $c=0$ est alors le point de $]-1,1[$ qui vérifie le théorème de Rolle sur IR.

I-1-3 Interprétation géométrique

❖ Il existe au moins un point appartenant à l'intervalle $]a,b[$, $(a \in IR \cup \{-\infty\}$ et/ou $b \in IR \cup \{+\infty\})$, où la courbe de f admet une tangente horizontale :



I-2 Théorème des accroissements finis

I-2-1 Théorème

Théorème :

- Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que : $f(a)-f(b)=f'(c).(a-b)$ ou $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

Remarques :

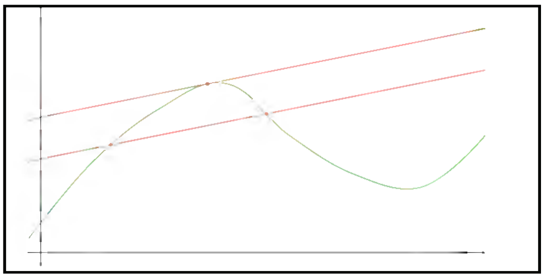
- Si $f(a)=f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle.
- Le point c, comme pour le théorème de Rolle, n'est en général pas unique.

Exemple : $f(x)=x^3-x+1$ et $[a,b]=[-2,1]$

- f est une fonction continue sur $[-2,1]$ et dérivable sur $]-2,1[$
- On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[-2,1]$:
  - $f(-2)=-5$ et $f(1)=1$
  - $\exists c \in]-2,1[$ tel que : $f'(c)=\dfrac{f(-2)-f(1)}{-2-1}=2$
  - $f'(x)=3x^2-1$: $f'(x)=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow c_1=-1$ ou $c_2=1$
  - $c_1=-1$, $(1 \notin]-2,1[)$ est alors le point de $]-2,1[$ qui vérifie le théorème des accroissements finis sur $[-2,1]$.

I-2-2 Interprétation géométrique

❖ Il existe au moins un point appartenant à l'intervalle $]a,b[$ où la tangente à la courbe de f est parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$:



I-2-3 Conséquence : limite de la dérivée

Théorème : (vu au premier chapitre)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$ dont la fonction dérivée f' est continue sur $]a,b]$.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = l \in IR$ alors la fonction f est dérivable à droite au point a :

$$f_d'(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = l \in IR$$

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$ alors la fonction f n'est pas dérivable à droite au point a :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$$

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ n'existe pas alors on ne peut pas conclure sur la dérivabilité de f à droite au point a.

I-3 Théorème des accroissements finis généralisés

I-3-1 Théorème

Théorème :

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ alors : $\exists c \in \,]a,b[\text{ tel que : } \dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Remarques :

- Si la fonction g est une constante, on retrouve le théorème des accroissements finis.
- Le point c n'est en général pas unique.

I-3-2 Application : règle de l'Hospital

Théorème : (vu au premier chapitre)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a de I, vérifiant $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

- Si de plus les fonctions f et g sont dérivables sur $I-\{a\}$ et si les fonctions g et g' ne s'annulent pas sur I alors :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l},\ l \text{ fini ou infini}$$

II- Formules de Taylor

II-1 Formule de Taylor–Lagrange avec reste de Lagrange

Théorème :

- Si f est une fonction de classe C^n (admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n) sur un intervalle $[a,b]$ admettant une dérivée (n+1)$^{\text{ième}}$ sur l'intervalle $]a,b[$ alors il existe au moins un point c de l'intervalle $]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

ou encore, en écriture abrégée : $$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Définition :

- Cette formule s'appelle la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n.
- L'expression $\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$ c'est la partie principale ou régulière de la formule.
- L'expression $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ c'est le reste de Lagrange.

Remarques :

- Pour $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.
- En posant $h = b-a$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n :

$$f(b) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + f^{(n+1)}(a+\quad h), \quad \text{avec } 0 < \quad < 1$$

ou encore : $$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\quad h), \quad \text{avec } 0 < \quad < 1$$

II-2 Formule de Mac Laurin avec reste de Lagrange

❖ Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à tout intervalle $[a,x]$, $x\in[a,b]$. Si de plus $a=0$, on obtient le théorème suivant :

Théorème :

- Si f est une fonction de classe C^n (admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n) sur un intervalle $[0,b]$ admettant une dérivée (n+1)ième sur l'intervalle $]0,b[$ alors pour tout $x\in[0,b]$ il existe au moins un point c de l'intervalle $]0,x[$ tel que :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

ou encore, en écriture abrégée : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

ou encore : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\ \ x)$, avec $0<\ \ <1$

Définition :

- Cette formule c'est la formule de Mac Laurin, avec reste de Lagrange, à l'ordre n.
- L'expression $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$ c'est la partie principale ou régulière de la formule.
- L'expression $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ ou $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\ \ x)$ c'est le reste de Lagrange.

II-3 Formule de Taylor–Young

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR et a un point de I.

- Si la fonction f est n fois dérivable en a alors il existe une fonction   définie de I vers IR de limite nulle en a, $\lim\limits_{x\to 0}\ \ (x)=0$, telle que $\forall x\in I$, on a :

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\ \ (x),$$

ou encore, en écriture abrégée : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+(x-a)^n\ \ (x)$,   avec

$\lim\limits_{x\to a}\ \ (x)=0$

Définition :

- Cette formule s'appelle la formule de Taylor-Young de f au voisinage de a à l'ordre n .
- L'expression $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ c'est la partie principale de la formule.
- L'expression $(x-a)^n \quad (x)$ c'est le reste de Lagrange.

Remarques :

- Si $a=0$, on obtient la formule : $f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)+(x)^n \quad (x)$, avec $\lim_{x\to 0} \quad (x)=0$
- La formule de Taylor-Young peut servir pour la construction des développements limités de plusieurs fonctions n fois dérivables.

III- Développements limités au voisinage de 0

III-1 Définitions et propriétés

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 (intervalle I de IR contenant 0) sauf peut être au point 0 .

- On dit que la fonction f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n s'il existe un polynôme $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de degré au plus égal à n et une fonction définie de I vers IR tels que :

$$\forall x \in I \ : \qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+(x)^n \quad (x) , \quad \lim_{x\to 0} \quad (x)=0$$

- $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ s'appelle la partie principale ou régulière du développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre n .
- On écrira « développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n » plus simplement $Dl_n(0)$.

Dans toute la suite, désignera indifféremment une fonction vérifiant $\lim_{x\to 0} \quad (x)=0$

Propriétés

1. Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.
2. Si une fonction f admet un $Dl_n(0)$, dont la partie régulière est $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors pour tout $p \le n$, f admet un $Dl_p(0)$, de partie régulière égale à $F_p(x)=\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

3. Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un $Dl_n(0)$ alors sa partie régulière est paire (respectivement impaire).
4. Un polynôme $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de degré $\leq n$ admet le $Dl_p(0)$, pour tout $p \leq n$, de partie régulière égale à $F_p(x)=\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.
5. Si une fonction f admet un $Dl_n(0)$ alors $\lim_{x \to 0} f(x)$ est finie.

III-2 Développement limité et formule de Taylor-Young

III-2-1 Condition suffisante de l'existence d'un développement limité

Théorème :

- Si une fonction f est n fois dérivable en 0 alors elle admet le $Dl_n(0)$ suivant : $f(x)=F_n(x)+(x)^n \quad (x)$, avec $\lim_{x \to 0} \quad (x)=0$ (Formule de Taylor-Young)
- $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière de $Dl_n(0)$, $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
- $Dl_n(0)$: $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}.x+\dfrac{f''(0)}{2!}.x^2+\cdots\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n+(x)^n \quad (x)$, $\lim_{x \to 0} \quad (x)=0$

III-2-2 Exemple de D.L. calculé sans la formule de Taylor Young

$Dl_n(0)$ ***de la fonction*** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **:**

- On sait que : $\left(1-x^{n+1}\right)=(1-x)\times\left(1+x+x^2+\cdots x^n\right)$
- D'où : $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n$
- Q'on peut écrire : $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n+x^n\dfrac{x}{1-x}$
- D'où le $Dl_n(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots x^n+x^n \quad (x)$,

avec $\quad (x)=\dfrac{x}{1-x}$: $\lim_{x \to 0} \quad (x)=0$

III-2-3 Exemples de D.L. calculés par la formule de Taylor-Young

(1) $Dl_n(0)$ de la fonction e^x :

- La fonction e^x est n fois dérivable en 0 :
  - $f^{(n)}(0)=1$ car $\forall n\in IN : e^{(n)}(x)=e^x$: $\quad a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\dfrac{1}{k!}$
- $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}x^k=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n$
- $Dl_n(0)$: $\quad e^x=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}x^k+(x)^n\ (x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\ (x)=0$ ou encore :
- $Dl_n(0)$: $\boxed{e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+(x)^n\ (x)}$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\ (x)=0$

(2) $Dl_n(0)$ de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$:

- La fonction $\dfrac{1}{1+x}$ est n fois dérivable en 0 : $\quad f^{(n)}(0)=(-1)^n.n!$
  - car $\forall n\in IN$: $\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n.n!.\dfrac{1}{(1+x)^{n+1}}$ $\qquad$ (voir chap. 1)
- $a_k=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\dfrac{(-1)^k.k!}{k!}=(-1)^k$
- $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.x^k=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n$
- $Dl_n(0)$: $\quad \dfrac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+(x)^n\ (x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\ (x)=0$

ou encore :

- $Dl_n(0)$: $\boxed{\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+(x)^n\ (x)}$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\ (x)=0$

Remarques :

- ❖ Il n'est pas toujours possible de déterminer le $Dl_n(0)$ d'une fonction f, n fois dérivable en 0 par la formule de Taylor Young car le calcul des dérivées $n^{ième}$ de f au point 0 n'est pas toujours aisé.
- ❖ On verra d'autres moyens pour calculer ces $Dl_n(0)$, utilisant les opérations sur les $Dl_n(0)$ fournis par la formule de Taylor-Young.

III-3 Opérations sur les développements limités

III-3-1 Substitution

Théorème :

- Si une fonction f admet un $Dl_n(0)$ alors la fonction $f \circ g$, avec $g(x) = ax^m$ admet un $Dl_{m\times n}(0)$:
- Si $f(x) = P(x) + (x)^n \varepsilon(x)$ alors $f(ax^m) = P(ax^m) + (x)^{m.n} \varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Remarque :

❖ Pour obtenir le $Dl_{m\times n}(0)$ de $f(ax^m)$ il suffit de remplacer x dans le $Dl_n(0)$ de $f(x)$ par ax^m.

Exemples :

a. $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } f(x) = \dfrac{1}{1-x}}$: $g(x) = -x$ $(a = -1$ et $m = 1)$

- $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + (x)^n \varepsilon(x)$
- $Dl_n(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$:
  - On remplace dans le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$, x par $(-x)$
  - D'où le $Dl_n(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$: $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + (x)^n \varepsilon(x)}$

b. $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}}$: $g(x) = x^2$ $(a = 1$ et $m = 2)$

- $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + (x)^n \varepsilon(x)$
- $Dl_{2n}(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$:
  - On remplace dans le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$, x par (x^2)
  - $Dl_{2n}(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2n} + (x)^{2n+1} \varepsilon(x)$
  - $Dl_n(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2p} + (x)^{2p+1} \varepsilon(x)} \quad ((n = 2p \text{ ou } n = 2p+1)$$

Remarque :

❖ Pour obtenir le $Dl_n(0)$ de $f\left(ax^m\right)$ on ne garde du $Dl_{m\times n}(0)$ que les puissances de x inférieures ou égales à n

Exemples : $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}}$

- $Dl_{2n}(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4\cdots+x^{2n}+(x)^{2n+1}\ (x)$
- $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$ est alors : $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4\cdots+x^{2p}+(x)^{2p+1}\ (x)}$ ($n=2p$ **ou** $n=2p+1$)
- Pour $n=2$, on a $Dl_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+(x)^2\ (x)$
  - $Dl_4(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+(x)^4\ (x)$
  - $Dl_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+(x)^2\ (x)$
- Pour $n=3$, on a $Dl_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+(x)^3\ (x)$
  - $Dl_6(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+(x)^6\ (x)$
  - $Dl_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+(x)^3\ (x)$

III-3-2 Multiplication par un scalaire

Théorème :

- Si une fonction f admet un $Dl_n(0)$ alors la fonction f , $\in IR$, admet un $Dl_n(0)$:
- Si $f(x)=P(x)+(x)^n\ (x)$ alors $f(x)=\ P(x)+(x)^n\ (x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\ (x)=0$

Exemple : $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}}$: $=2$

- $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4\cdots+x^{2p}+(x)^{2p+1}\ (x)$, ($n=2p$ **ou** $n=2p+1$)
- $Dl_n(0)$ de $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$: On multiplie le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$ par 2
  - D'où le $Dl_n(0)$ de $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$:

$$\boxed{\frac{2}{1-x^2}=2+2x^2+2x^4\cdots+2x^{2p}+(x)^{2p+1}\ (x)},\qquad (n=2p \ \textbf{ou}\ n=2p+1)$$

III-3-3 Somme

Théorème :

- Si deux fonctions f et g admettent des $Dl_n(0)$ alors la fonction $f+g$ admet un $Dl_n(0)$
- Si $\begin{cases} f(x)=P(x)+(x)^n \quad (x) \\ g(x)=Q(x)+(x)^n \quad (x) \end{cases}$ alors $(f+g)(x)=P(x)+Q(x)+(x)^n \quad (x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \quad (x)=0$

Exemple : $f(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad g(x)=\dfrac{1}{1-x}$: $\boxed{(f+g)(x)=\dfrac{2}{1-x^2}}$

- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+(x)^n \quad (x)$ et $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2\cdots+x^n+(x)^n \quad (x)$
- $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}=\left(1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+(x)^n \quad (x)\right)+\left(1+x+x^2\cdots+x^n+(x)^n \quad (x)\right)$
- D'où : $\boxed{\dfrac{2}{1-x^2}=2+2x^2+2x^4\cdots+2x^{2p}+(x)^{2p+1} \quad (x)}$ (déjà calculé plus haut)

III-3-4 Produit

Théorème :

- Si 2 fonctions f et g admettent des $Dl_n(0)$ alors la fonction $f\times g$ admet un $Dl_{2n}(0)$
- Si $\begin{cases} f(x)=P(x)+(x)^n \quad (x) \\ g(x)=Q(x)+(x)^n \quad (x) \end{cases}$ alors $(f\times g)(x)=P(x)\times Q(x)+(x)^{2n} \quad (x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \quad (x)=0$

Exemple : $f(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad g(x)=\dfrac{1}{1-x}$: $\boxed{(f\times g)(x)=\dfrac{1}{1-x^2}}$

- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n+(x)^n \quad (x)$ et $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2\cdots+x^n+(x)^n \quad (x)$
- D'où : $\dfrac{1}{1-x^2}=\left[\left(1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n\right)\times\left(1+x+x^2\cdots+x^n\right)\right]+(x)^{2n} \quad (x)$

Remarque :

❖ Pour obtenir le $Dl_n(0)$ de $f\times g$ on ne garde du $Dl_{2n}(0)$ que les puissances de x inférieures ou égales à n.

Exemple : $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } \dfrac{1}{1-x^2}}$

- $Dl_{2n}(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = \left[\left(1-x+x^2\cdots+(-1)^n x^n\right)\times\left(1+x+x^2\cdots+x^n\right)\right]+(x)^{2n}\ (x)$
- Pour $n=2$, on a :
  - $Dl_4(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = \left[\left(1-x+x^2\right)\times\left(1+x+x^2\right)\right]+(x)^4\ (x)$
  - $Dl_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = 1+x^2+(x)^2\ (x)$
- Pour $n=3$, on a :
  - $Dl_6(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = \left[\left(1-x+x^2-x^3\right)\times\left(1+x+x^2+x^3\right)\right]+(x)^6\ (x)$
  - $Dl_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x^2}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = 1+x^2+(x)^3\ (x)$

III-3-5 Quotient

a) Division de deux polynômes suivant les puissances croissantes

Définition :

- Effectuer la division de A par B, lorsque $B(0)\neq 0$, suivant les puissances croissantes à l'ordre n c'est déterminer deux polynômes Q et R tels que : $A(x)=B(x).Q(x)+x^{n+1}R(x)$, avec $\deg Q\leq n$ ou $Q=0$.

Remarque :

- Pour effectuer une division suivant les puissances croissantes, on ordonne les polynômes suivant les puissances croissances de x.

Théorème :

- Soient A par B deux polynômes. Si $B(0)\neq 0$ alors il existe deux polynômes Q et R tels que : $A(x)=B(x).Q(x)+x^{n+1}R(x)$, avec $\deg Q\leq n$ ou $Q=0$,
- Q et R sont obtenus par la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par B.

Exemple : $A(x)=1+x$ et $B(x)=1+x^2$

Division à l'ordre 1 :

$$\begin{array}{l|l} 1+x & 1+x^2 \\ \cline{2-2} \underline{1+x^2} & 1+x \\ x-x^2 & \\ \underline{x+x^3} & \\ -x^2-x^3 & \end{array}$$

D'où : $\underbrace{1+x}_{A(x)} = \underbrace{\left(1+x^2\right)}_{B(x)}.\underbrace{\left(1+x\right)}_{Q(x)}+x^2\underbrace{\left(-1-x\right)}_{R(x)}$

Division à l'ordre 2 :

$$\begin{array}{l|l} 1+x & \underline{1+x^2} \\ \underline{1+x^2} & 1+x-x^2 \\ x-x^2 & \\ \underline{x+x^3} & \\ -x^2-x^3 & \\ \underline{-x^2-x^4} & \\ -x^3+x^4 & \end{array}$$

D'où : $\underbrace{1+x}_{A(x)} = \underbrace{(1+x^2)}_{B(x)}.\underbrace{(1+x-x^2)}_{Q(x)} + x^3\underbrace{(-1+x)}_{R(x)}$

b) $Dl_n(0)$ du quotient

Théorème :

- Soient f et g deux fonctions admettent les $Dl_n(0)$: $f(x) = A(x) + (x)^n \varepsilon(x)$ et $g(x) = B(x) + (x)^n \varepsilon(x)$. Si $B(0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet le $Dl_n(0)$:
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Q(x) + (x)^n \varepsilon(x)$, Q étant le quotient de la division de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n.

Exemple : $\boxed{Dl_3(0) \text{ de } \frac{1-x}{1+x}}$: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$ $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-x}{1+x}}$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + (x)^n \varepsilon(x)$: $A(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + (x)^3 \varepsilon(x)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + (x)^n \varepsilon(x)$: $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + (x)^3 \varepsilon(x)$, $B(0) \neq 0$
- D'où : $\boxed{\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + (x)^3 \varepsilon(x)}$

$$\begin{array}{l|l} 1-x+x^2-x^3 & \underline{1+x+x^2+x^3} \\ \underline{1+x+x^2+x^3} & 1-2x+2x^2-2x^3 \\ -2x-2x^3 & \\ \underline{-2x-2x^2-2x^3-2x^4} & \\ 2x^2+2x^4 & \\ \underline{2x^2+2x^3+2x^4+2x^5} & \\ -2x^3-2x^5 & \\ \underline{-2x^3-2x^4-2x^5-2x^6} & \\ 2x^4+2x^6 & \end{array}$$

III-3-6 Intégration

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 .

- Si la fonction dérivée f' admet un $Dl_n(0)$ alors la fonction f admet un $Dl_{n+1}(0)$:
- Si $f'(x) = Q(x) + (x)^n \quad (x)$ alors $f(x) = P(x) + (x)^{n+1} \quad (x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \quad (x) = 0$, $P(x) = \int_0^x Q(t)dt$

Exemple : $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } f(x) = \ln(1+x)}$: $f(x) = \ln(1+x)$ **et** $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

- $Dl_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + (x)^n \quad (x)$
  - $Q(x) = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n$
  - D'où : $P(x) = \int_0^x Q(t)dt = \int_0^x \left(1 - t + t^2 \cdots + (-1)^n t^n\right)dt$
  - $P(x) = \int_0^x (1)dt + \int_0^x (-t)dt + \cdots \int_0^x \left((-1)^n t^n\right)dt = \left[t - \frac{1}{2}t^2 \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}\right]_0^x$
  - $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$
- $Dl_{n+1}(0)$ de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + (x)^{n+1} \quad (x)$
- D'où : $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (x)^n \quad (x)}$

III-3-7 Dérivation

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un voisinage de 0 .

- Si $\begin{cases} f(x) = P(x) + (x)^n \quad (x) \\ f'(x) = Q(x) + (x)^{n-1} \quad (x) \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 0} \quad (x) = 0$ alors $P'(x) = Q(x)$

Exemple : $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } f'(x) = \frac{1}{1+x}}$: $f(x) = \ln(1+x)$ **et** $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

- $Dl_n(0)$ de $f(x)$: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (x)^n \quad (x)$
  - $P(x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$: $Q(x) = P'(x)$
  - D'où : $Q(x) = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$
- $Dl_{n-1}(0)$ de $f'(x)$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + (x)^{n-1} \quad (x)$

III-3-8 Composition

Théorème :

Soit f une fonction admettant le $Dl_n(0)$: $f(x) = P(x) + (x)^n \ (x)$ et soit g une fonction admettant le $Dl_n(0)$: $g(x) = Q(x) + (x)^n \ (x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \ (x) = 0$

- Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ alors la fonction $g \circ f$ admet le $Dl_{n^2}(0)$:

$$(g \circ f)(x) = Q(P(x)) + (x)^{n\times n} \ (x), \quad \lim_{x \to 0} \ (x) = 0$$

Remarque :

❖ Pour obtenir le $Dl_n(0)$ de $g \circ f$ on ne garde du $Dl_{n^2}(0)$ que les puissances de x inférieures ou égales à n.

Exemple : $\boxed{Dl_n(0) \text{ de } h(x) = \dfrac{1}{1-\ln(1-x)}}$

- On peut écrire la fonction h sous la forme $h = g \circ f$, comme composée des deux fonctions : $f(x) = \ln(1-x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
- On connaît les $Dl_n(0)$:
  - $Dl_n(0)$ de $f(x)$: $\ln(1-x) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 \cdots - \dfrac{1}{n}x^n + (x)^n \ (x)$
    - D'où : $P(x) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 \cdots - \dfrac{1}{n}x^n$
  - $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + (x)^n \ (x)$
    - D'où : $Q(x) = 1 + x + x^2 \cdots + x^n$
- $Dl_2(0)$ de $\dfrac{1}{1-\ln(1-x)}$:
  - $P(x) = -x - \dfrac{1}{2}x^2$ et $Q(x) = 1 + x + x^2$
  - $Q(P(x)) = 1 + \left(-x - \dfrac{1}{2}x^2\right) + \left(-x - \dfrac{1}{2}x^2\right)^2$
  - En ne gardant que les puissances de x inférieures ou égales à 2, on a :
  - $Q(P(x)) = 1 + \left(-x - \dfrac{1}{2}x^2\right) + (-x)^2$
  - D'où $Dl_2(0)$: $\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2 \ (x)$

III-4 Développements limités usuels

Liste, non exhaustive, des trois $Dl_n(0)$ à connaitre

$f(x)$	$Dl_n(0)$
e^x	$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (x)^n \quad (x)$
$(1+x)^m$	$(1+x)^m = 1 + m.x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n + (x)^n \quad (x)$
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (x)^n \quad (x)$

IV- Développements limités généralisés au voisinage de 0

IV-1 Définitions

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 (intervalle I de IR contenant 0) sauf peut être au point 0 qui n'admet pas un $Dl_n(0)$.

- On dit que la fonction f admet un développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre $n-p$ s'il existe un entier $\boxed{p>0}$ tel que la fonction $x^p.f$ admet un $Dl_n(0)$:

$\forall x \in I$, on a $\quad x^p.f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + (x)^n \quad (x)$, $\qquad \lim_{x\to 0} \quad (x) = 0$

ou encore : $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-p} + (x)^{n-p} \quad (x)}$, $\qquad \lim_{x\to 0} \quad (x) = 0$

- On écrira « développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre $n-p$ » plus simplement $DLG_{n-p}(0)$.

IV-2 Développements limités généralisés d'un quotient

Théorème :

Soients A par B deux polynômes.

- Si $B(0)=0$ alors il existe un entier $p>0$ et deux polynômes Q et R tels que $A(x)=\frac{1}{x^p}B(x).Q(x)+x^{n+1}R(x)$, avec $\deg Q\leq n$ ou $Q=0$.
- Q et R sont obtenus par la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par $\frac{B}{x^p}$

Remarque :

- Si $B(0)=0$ alors il existe un entier $p>0$ tel que $B(x)=x^p.B'(x)$, avec $B'(0)\neq 0$
  - La division de A par B' suivant les puissances croissantes à l'ordre n donne :
    $$A(x)=B'(x).Q(x)+x^{n+1}R(x)\text{, avec } \deg Q\leq n \text{ ou } Q=0$$
  - Donc : $A(x)=\frac{1}{x^p}B(x).Q(x)+x^{n+1}R(x)$

Exemple : $A(x)=1+x$ et $B(x)=x^2+x^4$: $B(x)=x^2.B'(x)$, $B'(x)=1+x^2$

- La division de A par B' à l'ordre 1 donne : $\underbrace{1+x}_{A(x)}=\underbrace{(1+x^2)}_{B'(x)}.\underbrace{(1+x)}_{Q(x)}+x^2\underbrace{(-1-x)}_{R(x)}$
- D'où : $\underbrace{1+x}_{A(x)}=\frac{1}{x^2}\underbrace{(1+x^2)}_{B(x)}.\underbrace{(1+x)}_{Q(x)}+x^2\underbrace{(-1-x)}_{R(x)}$
- La division de A par B' à l'ordre 2 donne : $(1+x)=\frac{1}{x^2}(1+x^2).(1+x-x^2)+x^3.(-1+x)$
- D'où : $(1+x)=\frac{1}{x^2}(x^2+x^4).(1+x-x^2)+x^3.(-1+x)$

Théorème: ($DLG_{n-p}(0)$)

Soient f et g deux fonctions admettent les $Dl_n(0)$: $\begin{cases} f(x)=A(x)+(x)^n \quad (x) \\ g(x)=B(x)+(x)^n \quad (x) \end{cases}$

- Si $B(0)=0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet le $DLG_{n-p}(0)$:
  $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x^p}Q(x)+(x)^{n-p} \quad (x)}, \quad \boxed{p>0}$$
- Q est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par $\frac{B}{x^p}$.

V- D.L. et D.L.G. au voisinage d'un point autre que 0

V-1 Au voisinage d'un point fini

V-1-1 Définitions

Définition : ($Dl_n(x_0)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (intervalle I de IR contenant x_0) sauf peut être au point x_0.

- On dit que la fonction f admet un développement limité au voisinage du point x_0 à l'ordre n s'il existe un polynôme F_n de degré au plus égal à n et une fonction définie de I vers IR tels que

$$\forall x \in I \ : \ \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \ \ (x)}, \qquad \lim_{x \to x_0} \ (x) = 0$$

- $F_n(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-x_0)^k$ s'appelle la partie principale ou régulière du développement limité de f au voisinage du point x_0 à l'ordre n.
- On écrira « développement limité au voisinage du point x_0 à l'ordre n » $Dl_n(x_0)$.

Remarques :

- C'est une généralisation de la définition d'un $Dl_n(0)$: Si on prend $x_0 = 0$ on retrouve la définition d'un $Dl_n(0)$.
- Si une fonction f admet un $Dl_n(x_0)$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ est finie.

Définition : ($DLG_{n-p}(x_0)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 (intervalle I de IR contenant x_0) sauf peut être au point x_0 qui n'admet pas un $Dl_n(x_0)$.

- On dit que la fonction f admet un développement limité généralisé au voisinage de x_0 à l'ordre $n-p$ s'il existe un entier $\boxed{p > 0}$ tel que la fonction $(x-x_0)^p.f(x)$ admet un $Dl_n(x_0)$: $\forall x \in I$, $(x-x_0)^p.f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \ \ (x)$, $\lim_{x \to x_0} \ (x) = 0$

ou encore $\forall x \in I$: $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-x_0)^{k-p} + (x-x_0)^{n-p} \ \ (x)}$, $\lim_{x \to x_0} \ (x) = 0$

- On écrira « développement limité généralisé au voisinage de 0 à l'ordre $n-p$ » plus simplement $DLG_{n-p}(x_0)$.

Remarque :

- C'est une généralisation de la définition d'un $DLG_{n-p}(0)$: Si on prend $x_0 = 0$ on retrouve la définition d'un $DLG_{n-p}(0)$.

V-1-2 Calcul pratique

Pour déterminer le $Dl_n(x_0)$ ou le $DLG_{n-p}(0)$ d'une fonction f, on peut se ramener au voisinage de 0 par un changement de variables. On pose $y = x - x_0$ et $g(y) = f(x)$.

- Si la fonction g admet le $Dl_n(0)$: $g(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k + (y)^n \ \varepsilon(y)$ alors la fonction f admet le $Dl_n(x_0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \ \varepsilon(x)$.
- Si la fonction g admet le $DLG_{n-p}(0)$: $g(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{k-p} + (y)^{n-p} \ \varepsilon(y)$ alors la fonction f admet le $DLG_{n-p}(x_0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x - x_0)^{k-p} + (x - x_0)^{n-p} \ \varepsilon(x)$.

V-1-3 Exemples

1) $\boxed{Dl_n(x_0) \text{ de } f(x) = \frac{1}{x} \text{ au point } x_0 = 1}$

- On pose : $y = x - 1$ et $g(y) = f(x)$: $g(y) = \frac{1}{1+y}$
- La fonction $g(y) = \frac{1}{1+y}$ admet le $Dl_n(0)$

$$g(y) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 \cdots + (-1)^n y^n + (y)^n \ \varepsilon(y), \quad \lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$$

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ admet alors le $Dl_n(1)$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 \cdots + (-1)^n (x-1)^n + (x-1)^n \ \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0$$

2) $\boxed{DLG_{n-2}(1) \text{ de } f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} \text{ au point } x_0 = 1}$

La fonction $f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$ n'admet pas un $Dl_n(1)$ car $\lim_{x \to 1} f(x)$ n'est pas fini.

- on pose : $y = x - 1$ et $g(y) = f(x)$: $g(y) = \frac{1}{y^2(1+y)}$

- Le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+y}$ est donné par : $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 \cdots + (-1)^n y^n + (y)^n \quad (y)$
- La fonction $g(y) = \dfrac{1}{y^2(1+y)}$ admet alors le $DLG_{n-2}(0)$:

$$g(y) = \frac{1}{y^2(1+y)} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + 1 - y + y^2 \cdots + (-1)^n y^{n-2} + (y)^{n-2} \quad (y),\ \lim_{y\to 0} \quad (y) = 0$$

- La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)^2}$ admet alors le $DLG_{n-2}(1)$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} + 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (-1)^n (x-1)^{n-2} + (x-1)^{n-2} \quad (x),\ \lim_{x\to 1} \quad (x) = 0$$

V-2 Au voisinage de l'infini

V-2-1 Définitions

a) Au voisinage de $-\infty$

Définition 1 : ($Dl_n(-\infty)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$ (intervalle $\left]-\infty, A\right[$ avec $A < 0$).

- On dit que la fonction f admet un $Dl_n(-\infty)$ s'il existe un polynôme F_n de degré au plus égal à n et une fonction définie de $\left]-\infty, A\right[$ vers IR tels que :

$\forall x \in I = \left]-\infty, A\right[$: $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (x)}$, avec $\lim_{x\to -\infty} \quad (x) = 0$

- $F_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\dfrac{1}{x}\right)^k$ s'appelle la partie principale ou régulière du $Dl_n(-\infty)$.

Remarque : Si une fonction f admet un $Dl_n(-\infty)$ alors $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ est finie.

Définition 2 : ($DLG_{n-p}(-\infty)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $-\infty$ (intervalle $\left]-\infty, A\right[$ avec $A < 0$) qui n'admet pas un $Dl_n(-\infty)$.

- On dit que la fonction f admet un $DLG_{n-p}(-\infty)$ s'il existe un entier $\boxed{p > 0}$ tel que la fonction $\left(\dfrac{1}{x}\right)^p . f(x)$ admet un $Dl_n(-\infty)$:

$\forall x \in I = \left]-\infty, A\right[$, $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)^p . f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (x)}$, $\lim_{x\to -\infty} \quad (x) = 0$

ou encore $\forall x \in I = \left]-\infty, A\right[$:

$$\boxed{f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p + a_{p+1}\frac{1}{x} + a_{p+2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} \quad (x)}$$

b) Au voisinage de $+\infty$

Définition 1 : ($Dl_n(+\infty)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (intervalle $]A,+\infty[$ avec $A>0$).

- On dit que la fonction f admet un $Dl_n(+\infty)$ s'il existe un polynôme F_n de degré au plus égal à n et une fonction définie de $]A,+\infty[$ vers IR tels que :

$$\forall x \in I =]A,+\infty[\ : \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (x)}, \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \quad (x) = 0$$

- $F_n\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\frac{1}{x}\right)^k$ s'appelle la partie principale ou régulière du $Dl_n(+\infty)$.

Remarque : Si une fonction f admet un $Dl_n(+\infty)$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ est finie.

Définition 2 : ($DLG_{n-p}(+\infty)$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (intervalle $]A,+\infty[$ avec $A>0$) qui n'admet pas un $Dl_n(+\infty)$.

- On dit que la fonction f admet un $DLG_{n-p}(+\infty)$ s'il existe un entier $\boxed{p>0}$ tel que la fonction $\left(\frac{1}{x}\right)^p . f(x)$ admet un $Dl_n(+\infty)$:

$$\forall x \in I =]A,+\infty[, \ \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)^p . f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . \left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (x)}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \quad (x) = 0$$

ou encore $\forall x \in I =]A,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p + a_{p+1}\frac{1}{x} + a_{p+2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} \quad (x)}$$

V-2-2 Calcul pratique

a) Au voisinage de $-\infty$

❖ Pour déterminer le $Dl_n(-\infty)$ ou $DLG_{n-p}(-\infty)$ d'une fonction f, on peut se ramener au voisinage de 0 par un changement de variables.

- On pose : $y = \frac{1}{x}$ et $g(y) = f(x)$
- Puisque la fonction f est définie sur $]-\infty, A[$ alors la fonction g est définie sur $\left]\frac{1}{A}, 0\right[$ et pas sur un intervalle I de IR contenant 0.

- Si la fonction g admet le $Dl_n(0)$, dit à gauche de 0 :

$$\forall y \in \left]\frac{1}{A},0\right[, \qquad g(y)=\sum_{k=0}^{n} a_k y^k + (y)^n \ (y), \qquad \lim_{y\to 0^-} (y)=0$$

alors la fonction f admet le $Dl_n(-\infty)$:

$$\forall x \in \left]-\infty, A\right[, \qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k.\left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \ (x), \qquad \lim_{x\to -\infty} (x)=0$$

- Si la fonction g admet le $DLG_{n-p}(0)$:

$$\forall y \in \left]\frac{1}{A},0\right[, \qquad g(y)=\sum_{k=0}^{n} a_k y^{k-p} + (y)^{n-p} \ (y), \qquad \lim_{y\to 0^-} (y)=0$$

alors la fonction f admet le $DLG_{n-p}(-\infty)$:

$$\forall x \in \left]-\infty, A\right[, \qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k.\left(\frac{1}{x}\right)^{k-p} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} \ (x), \qquad \lim_{x\to -\infty} (x)=0$$

b) Au voisinage de $+\infty$

❖ Pour déterminer le $Dl_n(+\infty)$ ou $DLG_{n-p}(+\infty)$ d'une fonction f, on peut se ramener au voisinage de 0 par un changement de variables.

- On pose : $y=\dfrac{1}{x}$ et $g(y)=f(x)$
- Puisque la fonction f est définie sur $\left]A,+\infty\right[$ alors la fonction g est définie sur $\left]0,\frac{1}{A}\right[$ et pas sur un intervalle I de IR contenant 0.

- Si la fonction g admet le $Dl_n(0)$, dit à droite de 0 :

$$\forall y \in \left]0,\frac{1}{A}\right[: \qquad g(y)=\sum_{k=0}^{n} a_k y^k + (y)^n \ (y), \qquad \lim_{y\to 0^+} (y)=0$$

alors la fonction f admet le $Dl_n(+\infty)$:

$$\forall x \in \left]A,+\infty\right[: \qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k.\left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n \ (x), \qquad \lim_{x\to +\infty} (x)=0$$

- Si la fonction g admet le $DLG_{n-p}(0)$:

$$\forall y \in \left]0,\frac{1}{A}\right[, \qquad g(y)=\sum_{k=0}^{n} a_k y^{k-p} + (y)^{n-p} \ (y), \qquad \lim_{y\to 0^+} (y)=0$$

alors la fonction f admet le $DLG_{n-p}(-\infty)$:

$$\forall x \in \left]A,+\infty\right[, \qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k.\left(\frac{1}{x}\right)^{k-p} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n-p} \ (x), \qquad \lim_{x\to +\infty} (x)=0$$

V-2-3 Exemples

a) Au voisinage de $+\infty$

1) $\boxed{Dl_n(+\infty) \text{ de } f(x)=\dfrac{1}{1+x}}$:

- On pose : $y=\dfrac{1}{x}$ et $g(y)=f(x)$: $\quad g(y)=\dfrac{y}{1+y}=y\times\dfrac{1}{1+y}$
- Le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+y}$ est donné par :

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2\cdots+(-1)^n y^n+(y)^n\ (y),\quad \lim_{y\to 0^+}(y)=0$$

- La fonction $g(y)=\dfrac{y}{1+y}$ admet alors le $Dl_n(0)$

$$g(y)=\frac{y}{1+y}=y-y^2+y^3\cdots+(-1)^n y^{n+1}+(y)^{n+1}\ (y),\qquad \lim_{y\to 0^+}(y)=0$$

- La fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ admet alors le $Dl_n(+\infty)$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n\ (x),\qquad \lim_{x\to+\infty}(x)=0$$

2) $\boxed{DLG_{n-1}(+\infty) \text{ de } f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}}$:

- On pose : $y=\dfrac{1}{x}$ et $g(y)=f(x)$: $\quad g(y)=\dfrac{1}{y(1+y)}$
- Le $Dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+y}$ est donné par :

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2\cdots+(-1)^n y^n+(y)^n\ (y),\quad \lim_{y\to 0^+}(y)=0$$

- La fonction $g(y)=\dfrac{1}{y(1+y)}$ admet alors le $DLG_{n-1}(0)$:

$$g(y)=\frac{1}{y(1+y)}=\frac{1}{y}-1+y-y^2+\cdots+(-1)^n y^{n-1}+(y)^{n-1}\ (y),\qquad \lim_{y\to 0}(y)=0$$

- La fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ admet alors le $DLG_{n-1}(+\infty)$:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\ (x),\quad \lim_{x\to+\infty}(x)=0$$

b) Au voisinage de $-\infty$

1) $\boxed{Dl_n(-\infty) \text{ de } f(x)=\frac{1}{1+x}}$ **:**

On établit le $Dl_n(-\infty)$ de la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x}$ de la même manière que le $Dl_n(+\infty)$ le de la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x}$:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n\ (x)\text{, } \lim_{x\to-\infty}\ (x)=0$$

2) $\boxed{DLG_{n-1}(-\infty) \text{ de } f(x)=\frac{x^2}{1+x}}$ **:**

On établit le $DLG_{n-1}(-\infty)$ de la fonction $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ de la même manière que le $DLG_{n-1}(+\infty)$ de la fonction $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\ (x)\text{,} \qquad \lim_{x\to+\infty}\ (x)=0$$

VI- Utilisation des développements limités

VI-1 Equivalent d'une fonction et calcul de limite

Théorème:

Soit f une fonction qui admet le $Dl_n(0)$: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+(x)^n\ (x)$, $\lim_{x\to0}\ (x)=0$.

- Si $m=Min\{0\le i\le n / a_i\ne0\}$ alors les fonctions f et $\left(a_mx^m\right)$ sont équivalentes au voisinage de 0 : $\boxed{f\underset{0}{\approx}a_mx^m}$ et $\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(a_mx^m\right)}$

Exemple : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^{-x}-1}$

- $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+(x)^2\ (x)$ Donc : $e^x-1=x+\frac{1}{2!}x^2+(x)^2\ (x)$
  - d'où : $\left(e^x-1\right)\underset{0}{\approx}x$

- $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 + (x)^2 \ (x)$ Donc : $e^{-x} - 1 = -x + \frac{1}{2!}x^2 + (x)^2 \ (x)$
  - d'où : $\left(e^{-x} - 1\right) \underset{0}{\approx} -x$

- Donc : $\left(\frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}\right) \underset{0}{\approx} \frac{x}{-x}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}\right) = -1$

Théorème:

Soit f une fonction qui admet le $DLG_{n-p}(0)$: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{k-p} + (x)^{n-p} \ (x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \ (x) = 0$.

- Si $m = Min\{0 \leq i \leq n / a_i \neq 0\}$ alors les fonctions f et $\left(a_m x^{m-p}\right)$ sont équivalentes au voisinage de 0 : $\boxed{f \underset{0}{\approx} a_m x^{m-p}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(a_m x^{m-p}\right)}$

Remarque :

- Puisqu'il s'agit d'un $DLG_{n-p}(0)$ alors $m < p$.
- On écrira alors $\boxed{f \underset{0}{\approx} a_m \frac{1}{x^{p-m}}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(a_m \frac{1}{x^{p-m}}\right)}$.

VI-2 Approximation d'une fonction et calcul d'une valeur approchée

VI-2-1 Approximation d'une fonction

Théorème:

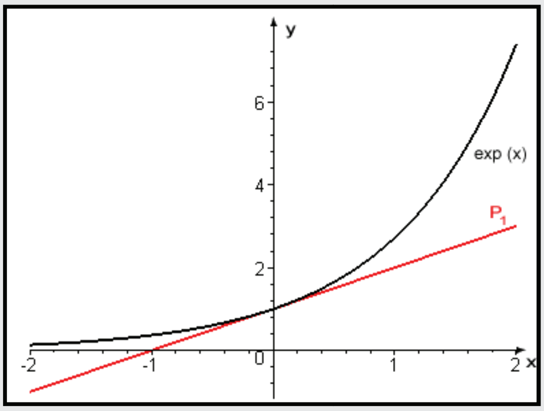
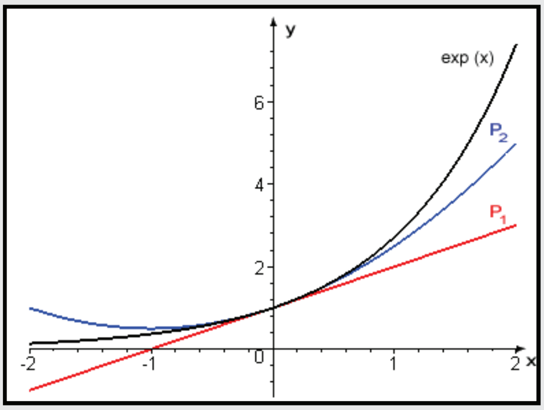
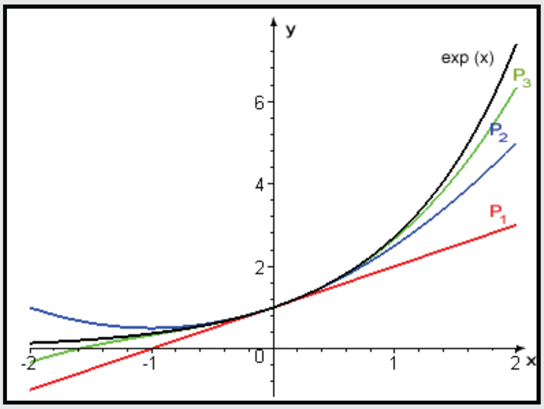
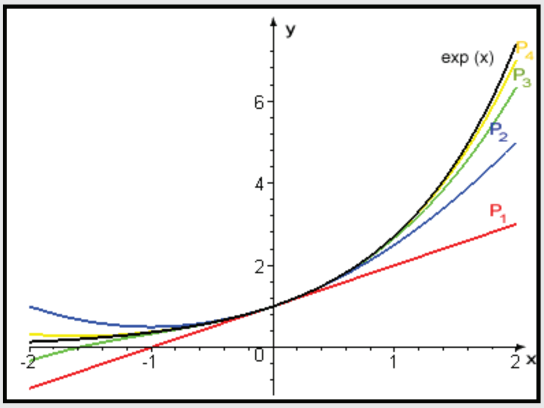
- Si une fonction f admet le $Dl_n(0)$: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + (x)^n \ (x)$, alors on peut l'approcher au voisinage du point 0 par le polynôme $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Remarque:

- Plus le degré n du polynôme $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ est grand, plus l'approximation de f au voisinage du point 0 par ce polynôme est meilleure.

Exemple : $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (x)^n \ (x), \qquad P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

Graphes de $f(x)=e^x$ et de $P_n(x)$	
 $P_1 = 1 + x$	 $P_2 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2$
 $P_3 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$	 $P_4 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$

VI-2-2 Calcul d'une valeur approchée

Théorème:

- Si une fonction f admet le $Dl_n(0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + (x)^n \varepsilon(x)$, alors on peut l'approcher au voisinage du point 0 par le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Exemple : **Calcul d'une valeur approchée de** e

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (x)^n \ (x), \qquad P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

- $e^x \approx P_n(x)$, avec $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n$
- Pour $x = 1$: $e \approx P_n(1)$
  - $n = 1$: $P_1 = 1 + x$ $e \approx 2$
  - $n = 2$: $P_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ $e \approx 2{,}5$
  - $n = 3$: $P_3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ $e \approx 2{,}666$
  - $n = 4$: $P_4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$ $e \approx 2{,}7083$
- Valeur donnée par une calculatrice : $e \approx 2{,}718$

VI-3 Equation d'une tangente et position par rapport au graphe

Théorème:

- Si une fonction f admet le $Dl_n(x_0)$, $n \geq 2$:

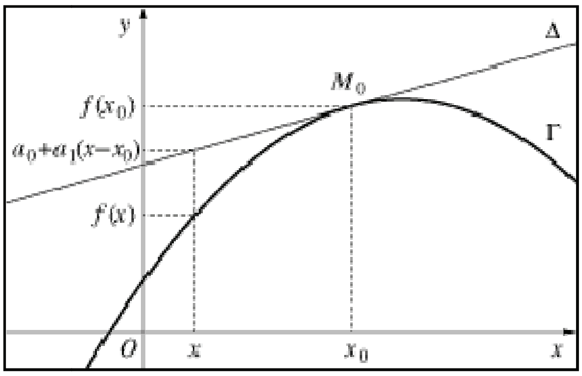
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \cdots + a_n(x - x)^n + (x - x_0)^n \ (x), \ a_p \neq 0$$

alors

- Le graphe de f admet une tangente, au point x_0, d'équation :

$$y = a_0 + a_1.(x - x_0) \text{ ou encore } y = a_1.x + (a_0 + a_1 x_0).$$

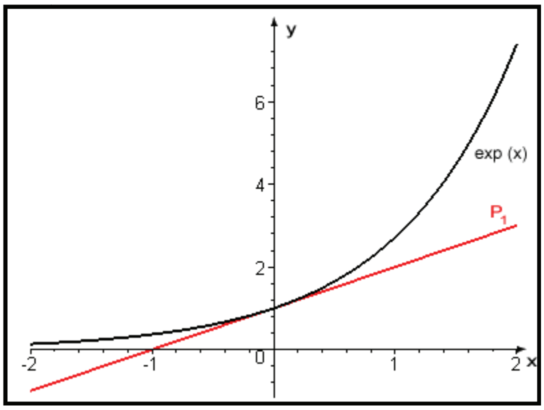
- Le signe de $a_p(x - x_0)^p$ donne la position du graphe de f par rapport à cette tangente, où $p = Min\{1 \leq i \leq n / a_i \neq 0\}$



Exemples :

1) $f(x) = e^x$ **:** $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (x)^n \ \ (x)$

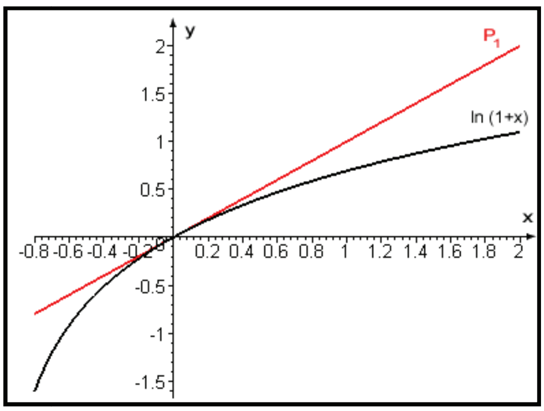
- Le graphe de $f(x) = e^x$ admet une tangente, au point $x_0 = 0$, d'équation $y = 1 + x$
- Comme $a_2 x^2 = \frac{1}{2}x^2 > 0$ alors le graphe de $f(x) = e^x$ est en dessus de sa tangente au point $x_0 = 0$:



Graphes de $f(x) = e^x$ et de sa tangente P_1 au point $x_0 = 0$

2) $f(x) = \ln(1+x)$ **:** $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (x)^n \ \ (x)$

- Le graphe de $f(x) = \ln(1+x)$ admet une tangente, au point $x_0 = 0$, d'équation $y = x$
- Le graphe de $f(x) = \ln(1+x)$ est en dessous de sa tangente au point $x_0 = 0$ car $a_2 x^2 = -\frac{1}{2}x^2 < 0$:



Graphes de $f(x) = \ln(1+x)$ et de sa tangente P_1 au point $x_0 = 0$

VI-4 Equation d'une asymptote et position par rapport au graphe

Théorème: (asymptote oblique)

- Si une fonction f admet le $DLG_{n-1}(\mp\infty)$:

$$f(x)=a_0x+a_1+a_2\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}(x),$$ alors

- Le graphe de f admet une asymptote oblique, au voisinage de $\mp\infty$, d'équation : $y=a_0+a_1x$
- la position du graphe de f par rapport à cette asymptote est donné par le signe de $a_p\left(\frac{1}{x}\right)^p$, $p=\underset{a_p\neq 0}{Min}\{2\leq i\leq n-1\}$

Théorème: (asymptote horizontale)

- Si une fonction f admet le $DLG_{n-1}(\mp\infty)$: $f(x)=a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n(x)$

Alors

- Le graphe de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $\mp\infty$, d'équation : $y=a_0$
- Le signe de $a_p\left(\frac{1}{x}\right)^p$ donne la position du graphe de f par rapport à cette asymptote,

où $p=Min\{1\leq i\leq n/a_p\neq 0\}$

Exemples

1) $\boxed{f(x)=\frac{1}{1+x}}$: $\quad f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3+\cdots(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n(x)$

- Le graphe de $f(x)=\frac{1}{1+x}$ admet une asymptote horizontale, au voisinage de $\mp\infty$, d'équation : $y=0$
  - Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{x}>0$ alors le graphe de $f(x)=\frac{1}{1+x}$ est en dessus de son asymptote.
  - Au voisinage de $-\infty$, $\frac{1}{x}<0$ alors le graphe de $f(x)=\frac{1}{1+x}$ est en dessous de son asymptote.

2) $\boxed{DLG_{n-1}(+\infty) \text{ de } f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}}$ **:** $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-1}(x)$

- Le graphe de $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ admet une asymptote oblique, au voisinage de $\mp\infty$, d'équation : $y=x-1$
    - Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{x}>0$ alors le graphe de $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ est en dessus de son asymptote.
    - Au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{1}{x}<0$ alors le graphe de $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ est en dessous de son asymptote.

Sommaire