TRAVAUX DIRIGÉS

Analyse Mathématiques I

Filière Sciences Economiques et Gestion

Semestre 1

Mohamed HACHIMI

Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales d'Agadir

Chapitre III

Développements limités

Exercice 1

Les fonctions

$$f(x) = x^2 + 3x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1$$

sont-elles équivalentes au voisinage de $+\infty$? au voisinage de 0 ?

Solution de l'exercice 1

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = 1$$

les fonctions f et g sont donc équivalentes en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = 0$$

les fonctions f et g ne sont donc pas équivalentes en 0.

Exercice 2

Etant donné que

$$x \underset{+\infty}{\sim} x+1,$$

les fonctions e^x et e^{x+1} sont-elles aussi équivalentes au voisinage de $+\infty$?

Solution de l'exercice 2

Posons $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{x+1}$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e} \neq 1$$

les fonctions f et g ne sont donc pas équivalentes en $+\infty$, malgré que $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$.

Exercice 3

Déterminer, en utilisant les fonctions équivalentes :

1° $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin \frac{1}{x}$$

2° $$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + x) \ln(1 + x)}{x^3 + 3x^2}$$

Solution de l'exercice 3

1° On a : $x^3 + 2x^2 + 1 \underset{\infty}{\sim} x^3, \quad 4x^2 + 3x + 2 \underset{\infty}{\sim} 4x^2, \quad \sin\frac{1}{x} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

donc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 2} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{4x^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

2° On a : $x^2 + x \underset{0}{\sim} x, \quad x^3 + 3x^2 \underset{0}{\sim} 3x^2, \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + x)\ln(1+x)}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120} \leqslant e^x \leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{3x^5}{120}$$

Solution de l'exercice 4

La fonction $f(x) = e^x$ est plusieurs fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut lui appliquer la formule de Mac-Laurin à l'ordre 5 sur $[0, 1]$. Il existe $c \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

On a : $f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = e^x$

donc : $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 1$ et $f^{(5)}(c) = e^c$

D'où :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{e^c}{120}x^5$$

Solution de l'exercice 4

Comme $0 \leqslant c \leqslant 1$, il vient $1 \leqslant \mathrm{e}^c \leqslant \mathrm{e}$. D'où :

$$1 \leqslant \mathrm{e}^c \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{120}x^5 \leqslant \frac{\mathrm{e}^c}{120}x^5 \leqslant \frac{3}{120}x^5$$

On en déduit :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{3x^5}{120}$$

Exercice 5

Ecrire la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 4, des fonctions suivantes :

1° $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad \text{pour} \quad a = 1 \;;$

2° $g(x) = \ln x, \quad \text{pour} \quad a = 1$

Solution de l'exercice 5

1° f est plusieurs fois dérivable sur $[1,x]$ pour x voisin de 1. On a :

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

La formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 4, est

$$f(x) = f(1)+(x-1)f'(1)+\frac{(x-1)^2}{2}f''(1)+\frac{(x-1)^3}{6}f^{(3)}(1)+\frac{(x-1)^4}{24}f^{(4)}(c)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{(1+c)^5}$$

avec c dans l'intervalle $]1,x[$.

Solution de l’exercice 5

2° g est plusieurs fois dérivable sur $[1, x]$ pour x voisin de 1. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

La formule de Taylor-Lagrange, à l’ordre 4, est

$$g(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{6} f^{(3)}(1) + \frac{(x-1)^4}{24} f^{(4)}(c)$$
$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{(x-1)^4}{4(1-c)^4}$$

avec c dans l’intervalle $]1, x[$.

Exercice 6

Montrer que la fonction

$$f(x) = x + 5x^2 + x^3 \sin x$$

admet un DL d'ordre 3, au voisinage de 0.

Solution de l'exercice 6

On peut écrire f sous la forme :

$$f(x) = 0 + x + 5x^2 + 0x^3 + x^3(\sin x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

donc f admet un DL d'ordre 3, au voisinage de 0

Exercice 7

En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0 de

$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$$

Solution de l'exercice 7

f est plusieurs fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier $f^{(3)}(0)$ existe, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

On a : $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}, \quad f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^3}$

d'où : $f(0) = \ln 2, \quad f'(0) = \dfrac{1}{2}, \quad f''(0) = \dfrac{1}{4}, \quad f^{(3)}(0) = 0$

Ainsi,

$$\ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^3\varepsilon(x)$$

Exercice 8

Trouver le DL d'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Solution de l'exercice 8

On a :

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 9

Trouver le DL d'ordre 3, au voisinage de 1 de la fonction

$$f(x) = e^x$$

Solution de l'exercice 9

En posant $t = x - 1$, on est ramené au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} e^x &= e^{1+t} = e \cdot e^t \\ &= e\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)\right) \end{aligned}$$

ainsi, au voisinage de 1, on a :

$$e^x = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3\varepsilon(x-1)\right)$$

Exercice 10

Trouver le DL d'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{4x} \sin 3x$$

Solution de l'exercice 10

Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} e^{4x} &= 1 + \frac{4x}{1!} + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

D'où : $$\begin{aligned} e^{4x}\sin 3x &= \left(1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3\right)\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= 3x + 12x^2 + \frac{39}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Exercice 11

Trouver le DL d'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$$

Solution de l'exercice 11

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\begin{array}{rrr|l}
x - & \dfrac{x^2}{2} + & \dfrac{x^3}{3} & 1 - \dfrac{x^2}{2} \\ \cline{4-4}
-x & + & \dfrac{x^3}{2} & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} \\ \hline
- & \dfrac{x^2}{2} + & \dfrac{5x^3}{6} & \\
 & \dfrac{x^2}{2} & & \\ \hline
 & + & \dfrac{5x^3}{6} &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

Exercice 12

Trouver le DL d'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$$

Solution de l'exercice 12

Au voisinage de 0, on a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon(u)$$

Comme $\sin 0 = 0$, on peut donc remplacer u, dans l'expression de e^u, par le terme $x - \dfrac{x^3}{6}$:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(On ne garde que les termes de degré $\leqslant 3$).

Exercice 13

Trouver le DL d'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = e^{\cos x}$$

Solution de l'exercice 13

Puisque $\cos 0 = 1 \neq 0$, on écrit $e^{\cos x}$ sous la forme :

$$e^{\cos x} = e^{1+(\cos x)-1} = e\, e^{(\cos x)-1}$$

Au voisinage de 0, on a :

$$(\cos x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon(u)$$

En remplaçant u, dans e^u, par le terme $-\dfrac{x^2}{2}$, on a :

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)\right) = e - \frac{e^2}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$$

(On ne garde que les termes de degré $\leqslant 3$).