

Calcul élémentaire des probabilités

Myriam Maumy-Bertrand¹ et Thomas Delzant¹

¹IRMA, Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Licence 1ère Année 16-02-2006

Sommaire

- 1 La loi de Poisson.
- 2 Règle d'utilisation.
- 3 Deux exemples.
- 4 Ajustement à une distribution expérimentale.

La loi de Poisson. (Du nom de son inventeur).

La loi de Poisson est aussi appelé la LOI des événements *rares*.

La loi de Poisson se définit par une formule assez compliquée.

Définition

Une variable aléatoire X suit une LOI de Poisson de paramètre λ si :

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{où } k \in \mathbb{N}.$$

On écrit alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Son espérance mathématique et son écart-type sont alors donnés par les formules suivantes :

Propriétés

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Remarque

C'est la seule LOI connue qui ait toujours son espérance égale à sa variance.

Le nombre de joueurs qui vont gagner au loto la semaine prochaine.

Il y a $7 \cdot 10^6$ joueurs qui misent au loto. La probabilité de gagner est environ 1 chance sur $5 \cdot 10^6$.

Quelle est la **loi** qui décrit le nombre de **joueurs gagnants** ?

En principe, il s'agit d'une **loi binomiale** $\mathcal{B} \left(7 \cdot 10^6, \frac{1}{5 \cdot 10^6} \right)$.

Mais à l'évidence cette loi décrit un nombre petit devant le nombre des expériences, c'est-à-dire qu'elle décrit des événements **rare**s.

On **remplace la loi binomiale** par la **loi de Poisson** de même **espérance**.

Ici, $\mathbb{E}[X] = 7/5 = 1,4$. On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-1,4} \times \frac{(1,4)^k}{k!}.$$

On a :

- $\mathbb{P}[X = 0] = 0.246$
- $\mathbb{P}[X = 1] = 0.345$
- $\mathbb{P}[X = 2] = 0.241$
- $\mathbb{P}[X = 3] = 0.112$
- $\mathbb{P}[X = 4] = 0.039$
- $\mathbb{P}[X = 5] = 0.011,$

et les autres probabilités sont extrêmement faibles.

Sommaire

- 1 La loi de Poisson.
- 2 Règle d'utilisation.**
- 3 Deux exemples.
- 4 Ajustement à une distribution expérimentale.

Règle d'utilisation.

On remplace la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson d'espérance $n \times p$ notée $\mathcal{P}(np)$, si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- 1 $p < 0,1$
- 2 $np < 10$
- 3 $n > 30$.

Exemple

Un livre de 300 pages contient 200 fautes d'orthographe. Quelle est la variable aléatoire qui décrit le nombre de fautes à la 15-ième page ?

Sommaire

- 1 La loi de Poisson.
- 2 Règle d'utilisation.
- 3 Deux exemples.**
- 4 Ajustement à une distribution expérimentale.

Nombre d'accidents de la route.

On observe en moyenne 7 300 morts par an sur la route.

Question

Quelle est la loi qui décrit le nombre de morts chaque jour ?

Il y a 100 départements en France. Supposons, pour simplifier, qu'en moyenne chacun ait le même nombre de morts.

Question

Quelle est la loi qui décrit le nombre de morts chaque mois dans le Bas-Rhin ?

Standard téléphonique.

On sait que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 108.

Question

Calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait :

- 0 appel,
- 1 appel,
- 2 appels,
- au moins 3 appels.

Sommaire

- 1 La loi de Poisson.
- 2 Règle d'utilisation.
- 3 Deux exemples.
- 4 Ajustement à une distribution expérimentale.**

Ajustement d'une distribution expérimentale et d'une loi de Poisson.

On revient sur les accidents de la route.

Durant une période consécutive de 50 jours, on compte le nombre d'accidents dans une petite ville. On observe :

Nombre d'accidents x_i	Nombre de jours f_i
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1

Questions

- 1 Quelle loi de Poisson peut-on choisir pour décrire le nombre d'accidents par jour ?
- 2 Comparer l'écart-type expérimental et celui de cette loi de Poisson.
- 3 Quelle serait, pour le choix de cette loi, la probabilité pour qu'il se produise 0,1,2,3 ou 4 accidents ?
- 4 Quelle serait, pour cette loi, l'espérance mathématique du nombre de jours où il y a 0,1,2,3,4 accident(s) durant une période de 50 jours ?
- 5 Le choix d'une loi de Poisson était-il judicieux ?

Assurance.

Un agent assure 10 000 personnes contre les incendies.
La probabilité qu'une personne donnée ait un incendie est de 1 chance sur 1 000.

Questions

- 1 Quelle est l'espérance mathématique du nombre d'incendies ?
- 2 Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) pour que 10 sinistres exactement aient lieu ?
- 3 Quelle est la probabilité (à 10^{-2} près) pour que 4 sinistres ou moins aient lieu ?

On pourra prendre $e^{-10} = 4,5 \cdot 10^{-5}$ pour faire les calculs.