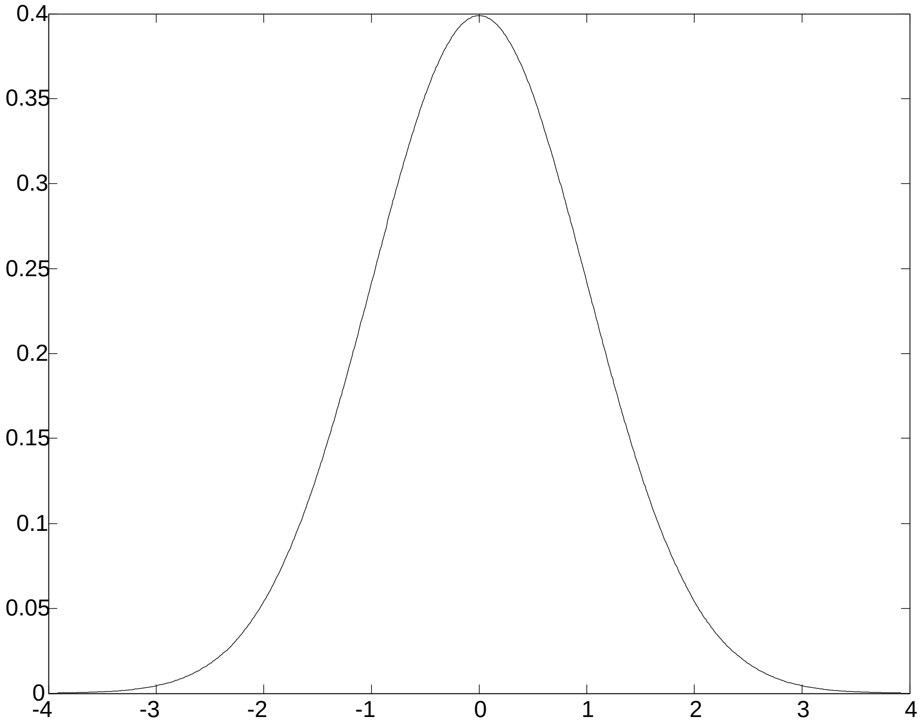
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse Occidentale

e i g

Cours de probabilité et statistique



Denis Bichsel

1 Probabilité et statistique

1.1 Introduction

Le calcul des probabilité semble avoir son origine dans les jeux de hasard; il fallait savoir décider des mises et des gains pour que les jeux soient équitables (ou non). Aujourd'hui, il a investi de très nombreuses activités humaines et son utilisation est nécessaire dans la plupart des activités industrielles.

Il est utile par exemple de savoir si la construction d'un appareil est raisonnable, si il a une chance de fonctionner ou si l'assemblage d'un très grand nombre de composants réduira son espérance de vie de manière inacceptable (navette spatiale par exemple). Le calcul des probabilités et les statistiques sont utilisées pour augmenter, souvent de manière importante, la qualité des produits manufacturés, les coûts de production s'en trouvent réduits car le risque de panne est diminué.

La transmission de l'information est devenue extrêmement importante et se développe sans cesse. Pour que cette transmission soit utile il est nécessaire qu'elle soit sans erreur, il faut donc détecter et corriger les erreurs sans en connaître les causes. C'est pourquoi l'information est transmise de manière redondante (bit de parité etc.), ce qui permet d'effectuer les corrections nécessaires. Un exemple extrême de ces techniques est celui des satellites envoyés à plusieurs milliards de kilomètres de la terre. La distance très importante affaiblit les signaux envoyés par ces engins qui nous arrivent extrêmement faibles et fortement bruités. Il est possible, malgré tout, de reconstruire l'information originale et les images reconstruites sont de bonne qualité.

Un autre domaine du calcul des probabilités et des statistiques est celui de la compression des données. Ici, il faut utiliser les structures particulières des données à stocker pour en minimiser la taille. Mais ces structures ne sont pas parfaitement établies, elles varient statistiquement, c'est ce qui rend difficile le travail de compression. Les travaux de Shannon et de Kolmogorov sur la théorie de l'information ont ouvert de nouveaux domaines de recherche en probabilité et statistique.

1.2 Eléments d'analyse combinatoire

Lorsqu'une expérience est réalisée, un certains nombre d'issues sont possibles. Considérons, par exemple, le jet de deux dés dont les faces sont numérotées de un à six. L'expérience consiste à jeter les dés, à relever les nombres sur les faces supérieures des dés et à additionner ces deux nombres. Les résultats possibles sont compris entre deux et douze. Pour répondre à la question « combien y a-t-il de possibilités d'obtenir la valeur neuf comme somme? », il faut inventorier toutes les manières d'obtenir neuf. Si les dés sont distinguables, les cas favorables sont les suivants: $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$. Il y a donc quatre issues favorables, quatre manières d'obtenir neuf. Ce résultat est établi par dénombrement, par inventaire des cas favorables. L'analyse combinatoire est la théorie mathématique du dénombrement. Principe fondamental du dénombrement.

Théorème 1 *Soient deux expériences, la première peut produire n_1 issues possibles et la seconde, n_2 issues possibles. Il existe alors $n = n_1 n_2$ issues possibles pour les deux expériences considérées conjointement.*

Preuve. Il suffit d'énumérer les résultats des deux expériences. Une issue possible de cette double expérience est notée (i, j) où $i \in [1; n_1]$ et $j \in [1; n_2]$. Il est évident qu'il y a $n_1 n_2$ issues possibles. ■

Théorème 2 *Il s'agit d'une généralisation du précédent. Si le nombre d'expériences conjointes est m et si le nombre d'issues possibles de la $k^{ième}$ expérience est n_k alors le nombre d'issues possibles des m expériences conjointes est $n = n_1 n_2 ... n_k ... n_m$.*

Preuve. Il suffit d'énumérer les résultats des m expériences. Une issue possible de l'expérience conjointe est notée $(i_1, ..., i_k, ...i_m)$ où $i_k \in [1; n_k]$. Il est évident qu'il y a $n_1 ... n_k ... n_m$ issues possibles. ■

Exercice 3 *La commission tripartite de l'école d'ingénieurs est formée du directeur, de 10 professeurs et de 10 étudiants. Il y a dans l'école, 100 professeurs et 500 élèves. Combien peut-on former de commissions différentes?*

Exercice 4 *Les plaques d'immatriculations helvétiques sont formées de deux caractères indiquant le canton (26 cantons et demi-cantons) et d'au plus 6 chiffres. Combien peut-on fabriquer de plaques différentes?*

Exercice 5 *Combien de fonctions définies sur n points peut-on construire si ces fonctions ne peuvent prendre pour valeurs que 0 ou 1?*

1.2.1 Permutations d'objets distinguables

Commençons par un exemple simple. Combien peut-on former de nombres entiers différents en combinant, sans répétition, les chiffres 1, 2 et 3. La réponse est simple, il y en six. Ce résultat s'obtient soit en écrivant toutes les combinaisons de ces trois chiffres, soit en appliquant les théorèmes ci-dessus. Le premier chiffre est à choisir parmi trois chiffres, il y a donc trois issues possibles à la première expérience. Le deuxième choix est à effectuer parmi les deux chiffres restants; il y a deux issues possibles à cette deuxième expérience. Et il n'y a plus de choix, le dernier chiffre est unique. Le produit $3 \cdot 2 \cdot 1$ vaut bien 6.

Remarque 6 *On dit de deux objets qu'ils sont distinguables s'il est possible de les différencier à coup sûr. Une boule blanche et une boule noire sont deux objets distinguables. Mais au contraire deux boules rouges identiques ne sont pas distinguables.*

Proposition 7 *Il y a exactement $N!$ (N factorielle) arrangements différents de N objets distinguables. (la démonstration est évidente).*

Exemple 8 *Dix livres doivent être disposés sur un rayon de bibliothèque. Il y a 4 livres de mathématiques, 3 livres de chimie, 2 livres de français et 1 livres d'anglais. Tous les livres traitant d'un même sujet sont groupés. Combien y-a-t-il de manières de classer ces livres? Le résultat est*

$$N = 4!\,(4!3!2!1!) = 4!288 = 6912$$

Le premier terme $4!$ exprime le choix de l'ordre des sujets.

1.2.2 Permutations d'objets partiellement indistinguables

Il s'agit ici de traiter des objets dont certains sont indistinguables entre eux mais distinguables d'autres objets.

Remarque 9 *Si tous les objets sont indistinguables entre eux, il n'y a qu'un arrangement possible et donc pas de problème intéressant.*

Exemple 10 *Soient les chiffres 1,2,2,3,3,3, combien d'arrangements différents peut-on former avec ces 6 chiffres? Si les chiffres étaients distinguables, il y auraient 6! arrangements différents. Mais chaque fois que les chiffres 2 sont permutés entre eux, l'arrangement ne change pas. Il en est de même lorsque les chiffres 3 sont permutés entre eux. Ainsi, étant donné un arrangement, tous les arrangements obtenus en permutant les 2 entre eux ou les trois entre eux sont identiques à l'arrangement original. Le nombre d'arrangements différents est alors* $\dfrac{6!}{2!3!} = 60$.

Théorème 11 *Soient n objets parmi lesquels n_1 sont indistinguables entre eux, de même pour n_2, n_3,, n_r. Il y a alors*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

arrangements possibles.

Preuve. Un raisonnement identique à celui effectué dans l'exemple précédent démontre le résultat. ■

Exercice 12 *Parmi les 10 participants à un tournoi de tennis, on compte 4 américains, 3 français, 2 suisses et un brésilien. Si dans le classement on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leur nom, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elle? (Rép. 12600)*

1.3 Les combinaisons

On veut former des arrangements de r objets choisis parmi n objets $(n \geq r)$. Combien peut former de tels arrangements différents? Le raisonnement à effectuer est le suivant:

1) On a n possibilités de choisir le premier élément, $n-1$ de choisir le second jusqu'à $n-r+1$ pour le $r^{ième}$ objet et donc $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ choix possibles si l'ordre du tirage est important.

2) Si l'ordre du tirage n'est pas important, les r objets peuvent avoir été tirés selon $r!$ ordres différents.

Le résultat cherché est alors simplement: Le nombre d'arrangements de r objets tirés parmi n objets lorsque l'ordre du tirage n'a pas d'importance est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Ou exprimé autrement: Le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n objets vaut $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

Définition 13 *Soient deux nombres naturels n et r, $n \geq r$ le nombre « n binomial r » noté $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ vaut:*

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Exemple 14 *On veut former un comité comprenant 3 des 20 personnes d'un groupe. Combien peut-on former de comités différents? La réponse est simplement $\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix} = 1140$.*

Exemple 15 *A partir d'un groupe de 5 hommes et 7 femmes, on forme un comité composé de 2 hommes et de 3 femmes. Combien peut-on former de comités différents?*

Lemme 16 *Une identité remarquable. Soient n et r deux entiers, tels que $n \geq r$ alors*

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!\,(r-1)!}\frac{nr}{nr} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,(r)!}\frac{n(n-r)}{n(n-r)} \\
&= \frac{(n)!}{(n-r)!\,(r)!}\frac{r}{n} + \frac{(n)!}{(n-r)!\,(r)!}\frac{(n-r)}{n} \\
&= \frac{(n)!}{(n-r)!\,(r)!}\left(\frac{r}{n} + \frac{(n-r)}{n}\right) \\
&= \frac{(n)!}{(n-r)!\,(r)!}\,.
\end{aligned}$$

■

L'explication suivante devrait permettre de mieux comprendre cette relation. Soit n objets, fixons notre attention sur l'objet 1, il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ combinaisons de taille r qui contient l'objet 1 et il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$ combinaisons de taille r ne contenant pas l'objet 1. On a ainsi toutes les combinaison de r objets parmi n objets.

Théorème 17 *du binôme. Soient x et y deux nombres réels ou complexes alors l'égalité suivante est vraie:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$$

Preuve. La démonstration peut être effectuée par induction complète. Si $n = 1$ alors la relation

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} x^k y^{1-k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^0 y^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x^1 y^1 = 1y + 1x$$

Admettons pour vraie

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$$

et démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

On pose $i = k+1$ dans la première somme et $i = k$ dans la seconde, il vient:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} x^i y^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} x^i y^{n+1-i} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \right) x^i y^{n+1-i} + y^{n+1} \end{aligned}$$

Afin d'utiliser le lemme précédent, il faut réécrire ceci sous la forme:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n+1-1 \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1-1 \\ i \end{pmatrix} \right) x^i y^{n+1-i} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} x^i y^{n+1-i} + y^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix} x^i y^{n+1-i} \end{aligned}$$

■

1.4 Axiome des probabilités

1.4.1 Ensemble fondamental et événement

Considérons l'expérience du jet de la pièce. Lorsqu'elle est jetée, il n'est pas possible de prédire l'issue de l'expérience bien que nous en connaissions les deux possibilités, pile ou face. Plus généralement considérons une expérience dont toutes les issues possibles sont connues mais qui, lorsqu'elle va être réalisée, ne permet pas de prévoir l'issue qui sera réalisée.

Définition 18 *L'ensemble fondamental S associé à une expérience est l'ensemble des issues possibles de l'expérience.*

Définition 19 *Tout sous-ensemble E de l'ensemble fondamental S est appelé événement.*

Définition 20 *L'événement vide. Un événement qui ne peut survenir est dit événement vide.*

Un événement est un (sous-) ensemble correspondant à diverses issues possibles de l'expérience considérée.

Exemple 21 *Si le résultat de l'expérience est de déterminer le sexe d'un nouveau né, l'ensemble fondamental peut être noté comme suit: $S = \{f, g\}$ pour fille et garçon.*

Exemple 22 *Si le résultat de l'expérience est la valeur lue sur le dé, alors* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Un événement est, par exemple, celui qui consiste à obtenir un nombre pair,* $E = \{2, 4, 6\}$

Exemple 23 *Si l'issue de l'expérience est l'ordre d'arrivée d'une course où sont engagés* 7 *chevaux dont les positions de départ sont notées 1,2,3,4,5,6,7. Alors* $S = \{$*toutes les permutations de (1,2,...,7)*$\}$ *L'ensemble fondamental contient 7! éléments. Un événement est, par exemple, celui du tiercé dans l'ordre. Les chevaux 2, 5, 1 arrivent en tête les autres arrivent dans n'importe quel ordre.* $E = \{2, 5, 1\} \times \{$*toutes les permutations de (3,4,6,7)*$\}$

Opération sur les événements. Les événements sont des sous-ensembles, les opérations usuelles sur les ensembles peuvent être appliquées.

1) Union. Soient E et F deux événements alors leur union, $G = E \cup F$ est l'événement qui contient toutes les issues de E et de F.

2) Intersection. Soient E et F deux événements alors leur intersection, $I = E \cap F$ est l'événement qui contient toutes les issues qui se trouvent simultanément contenues dans E et dans F.

3) Complémentation. Soit un événement E de l'ensemble fondamental S L'événement E^c est l'événement qui contient toutes les issues de S à l'exception de celles contenues dans E.

Exemple 24 *Considérons le jet du dé* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *L'événement* E *est formé des issues* $\{1, 2\}$ *et l'ensemble* $F = \{2, 4, 6\}$ *alors* $E \cup F = \{1, 2, 4, 6\}$, $E \cap F = \{2\}$, $E^c = \{3, 4, 5, 6\}$

Les relations suivantes se vérifient aisément en utilisant les diagrammes de Venn:

$$\begin{aligned} \text{Commutativité} \quad E \cup F &= F \cup E \\ E \cap F &= F \cap E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Associativité} \quad (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G) \\ (E \cap F) \cap G &= E \cap (F \cap G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Distributivité} \quad (E \cup F) \cap G &= (E \cap G) \cup (F \cap G) \\ (E \cap F) \cup G &= (E \cup G) \cap (F \cup G) \end{aligned}$$

Les lois de DeMorgan s'énoncent comme suit:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

L'axiomatique de la théorie des probabilité et quelques conséquences peuvent être exposées. Soit S un ensemble fondamental et E un événement. Nous demandons que la fonction « *probabilité* » définie sur les événements et à valeur dans l'intervalle [0;1] vérifie les axiomes suivants:

Axiome 1

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Axiome 2

$$p(S) = 1$$

Axiome 3 Soit une séquence d'événements E_1,E_2,..., deux à deux exclusifs, c'est-à-dire que $E_i \cap E_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$ alors l'égalité suivante est vraie:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p\left(E_i\right)$$

Lorsque une expérience est réalisée, si nous en acceptons toutes les issues possibles, il est alors certain que l'une des issues sera réalisée et ce, chaque fois que l'expérience est réalisée. C'est l'interprétation de l'axiome 2.

Dans le cas où l'événement retenu E n'est pas identique à l'ensemble fondamental S, l'issue de l'expérience peut être comprise dans E ou non. Et si l'expérience est réalisée suffisamment souvent le rapport entre le nombre d'issues favorables et le nombre de fois que l'expérience est réalisée est comprise entre 0 et 1. C'est l'origine de l'axiome 1. Le troisième axiome nous dit que la probabilité est une fonction additive sur les événements disjoints. Autrement dit, si deux événements sont disjoints $E_i \cap E_j = \emptyset$, alors la probabilité que l'issue de l'expérience soit comprise dans la réunion de E_i et de E_j est égale à la somme des probabilités que l'issue soit dans E_i ou dans E_j. Examinons maintenant quelques conséquences qui découlent de l'axiomatique.

Théorème 25 *Soit l'événement vide $\emptyset$, et p une probabilité définie sur S, alors $p(\emptyset) = 0$.*

Preuve. Soit la séquence d'événements E_1, E_2, avec $E_1 = S$, $E_i = \emptyset\ \forall i,\ i > 1$. Appliquons les axiomes 2 et 3:

$$\begin{aligned} 1 &= p(S) = p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = p(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} p(E_i) \\ &= p(S) + \sum_{i=2}^{\infty} p(\emptyset) \end{aligned}$$

ce qui implique que $p(\emptyset) = 0$. ∎

L'interprétation de ce résultat est immédiate. Quelque soit l'expérience, l'événement vide, celui qui n'est jamais réalisé, a une probabilité nulle d'être réalisé.

Théorème 26 *Soit E_1,...,E_n n événements disjoints alors l'égalité $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$ est vérifiée.*

Preuve. Il suffit de compléter la séquence finie de n événements disjoints par une infinité d'événements vides $E_{n+1} = \emptyset, \ldots$ et d'appliquer l'axiome 3:

$$\begin{aligned} p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) = p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p(E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)\ . \end{aligned}$$

∎

Théorème 27 *Soit l'événement E de l'ensemble fondamental S alors*

$$p(E^c) = 1 - p(E)$$

Preuve. Les événements E et E^c sont disjoints par définition et leur réunion est égale à S. Il vient:

$$\begin{aligned} p(S) &= 1 = p(E + E^c) = p(E) + p(E^c) \Rightarrow \\ p(E^c) &= 1 - p(E)\ . \end{aligned}$$

∎

Théorème 28 *Si E et F sont deux événements inclus dans S et si $E \subset F$ alors $p(E) \leq p(F)$.*

Preuve. Puisque E est inclus dans F, F peut être exprimé comme suit $F = E \cup (E^c \cap F)$. Les événements E et $E^c \cap F$ sont exclusifs, ce qui permet d'écrire

$$p(F) = p(E \cup (E^c \cap F)) = p(E) + p(E^c \cap F)$$

ce qui démontre le résultat car $p(E^c \cap F) \geq 0$. ■

Exemple 29 *Au jeu de dé, soit l'événement « obtenir 1 ou 3 » noté E et l'événement « obtenir un nombre inférieur à 5 » noté F. Il est évident que $E \subset F$. Le dénombrement nous donne dans ce cas $p(E) = \frac{1}{3}$ et $p(F) = \frac{2}{3}$; ce qui est en accord avec le théorème.*

Théorème 30 *Si E et F sont deux événements inclus dans S alors*

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

Preuve. Il faut utiliser l'identité suivante: $E \cup F = E \cup (E^c \cap F)$ qui se vérifie simplement par un diagramme de Venn. Les événements E et $E^c \cap F$ sont manifestement exclusifs et nous pouvons écrire:

$$p(E \cup F) = p(E \cup (E^c \cap F)) = p(E) + p(E^c \cap F)$$

Pour continuer il faut utiliser une autre identité de la théorie des ensembles:

$$F = S \cap F = (E \cup E^c) \cap F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$$

Puisque $E \cap F$ et $E^c \cap F$ sont exclusifs, il vient:

$$p(F) = p(E \cap F) + p(E^c \cap F)$$

En mettant ensemble ces deux résultats, il vient:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(E^c \cap F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$$

■

L'interprétation de ce théorème est la suivante. Lorsque deux événements ne sont pas exclusifs, leur intersection ne doit pas être « comptée deux fois » lorsque la réunion des événements est considérée. La probabilité qui est associée à l'intersection des deux événements doit être prise en compte une seule fois.

Exemple 31 *On jette deux pièces (pile ou face) et on suppose que les quatre issues possibles (P,P) (P,F) (F,P) (F,F) sont équi-probables, chacune des probabilité vaut $\frac{1}{4}$. Soient les événements $E = \{(P,P),(P,F)\}$ et $F = \{(P,P),(F,P)\}$. L'interprétation de E et F est : E est l'événement « La première pièce tombe sur pile » et F est l'événement « la seconde pièce tombe sur pile ». La réunion des deux ensembles $E \cup F$ est l'événement « L'une des deux pièces au moins tombe sur pile »*

$$\begin{aligned} p(E \cup F) &= p(E) + p(F) - p(E \cap F) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - p(\{(P,P)\}) \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cette probabilité peut être calculée directement, elle vaut:

$$p(E \cup F) = p\{(P,P),(P,F),(F,P)\} = \frac{3}{4}$$

Quelques exemples et exercices. Considérons le cas particulier où toutes les issues d'une expérience sont équi-probables. Nous supposons encore que le nombre N d'issues est fini. L'issue ou événement élémentaire d'indice i a donc la probabilité

$$p(\{i\}) = \frac{1}{N}$$

En effet tous les événements élémentaires (issues) sont exclusifs, leur réunion est égale à l'ensemble fondamental ce qui permet d'écrire:

$$1 = p(S) = p\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j\right) = \sum_{j=1}^{N} p(E_j) = Np(E_i)$$

et donc

$$p(E_i) = \frac{1}{N}, \quad ,\forall i = 1, \ldots, N$$

Exercice 32 *Deux dés sont jetés, calculez la probabilité que la somme des faces soit égale à 7.* $\left(Rép. = \frac{1}{6}\right)$.

Exercice 33 *Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 noires. On tire deux boules, calculez la probabilité d'obtenir deux blanches, deux noires, une noire et une blanche; la première boule tirée n'est pas remise dans l'urne avant de tirer la seconde boule.*

Exercice 34 *Même exercice que le précédent, mais cette fois la première boule tirée est remise dans l'urne avant de tirer la seconde.*

Exercice 35 *Un comité de 5 personnes doit être élu parmi 6 hommes et 9 femmes. Si le choix est le résultat du hasard, quelle est la probabilité que le comité soit composé de 3 hommes et 2 femmes.* $(Rép. = \frac{240}{1001})$.

Exercice 36 *Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes et une main est formée de 5 cartes. Si les cinq cartes sont consécutives, pas nécessairement de la même couleur, la main est une suite. Quelle la probabilité de se voir distribuer une suite?. Rép.* $= 10\left(4^5 - 4\right) / \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 37 *Une main de poker est dit main pleine si elle comprend 3 cartes de la même valeur et une paire, 2 cartes de même valeur, mais différentes des trois premières. Quelle est la probabilité d'obtenir une main pleine? Rép.* $= 13 \cdot 12 \cdot \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$.

Exercice 38 *Dans une classe de 30 étudiants, quelle est la probabilité que deux d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour (oubliez le 29 février)? Quelle est la probabilité qu'ils aient tous leur anniversaire un jour différent?*

Théorèmes de passage à la limite.

Définition 39 *Une suite d'événements* $\{E_n, n \geq 1\}$ *est dite croissante si:*

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

Elle est dite décroissante si:

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

Définition 40 *Soit* $\{E_n, n \geq 1\}$ *une suite croissante d'événements, la limite de cette suite est définie comme suit:*

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Définition 41 *Soit* $\{E_n, n \geq 1\}$ *une suite décroissante d'événements, la limite de cette suite est définie comme suit:*

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Théorème 42 *Soit $\{E_n, n \geq 1\}$ une suite soit croissante, soit décroissante d'événements, alors*

$$\lim_{n\to\infty} p(E_n) = p\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

La démonstration assez technique, n'est pas reproduite ici. Mais il est important de comprendre qu'il est possible d'échanger les opérations « limite » et « probabilité » lorsque la suite d'événements est soit croissante soit décroissante. Voyons comme application de ce théorème un paradoxe plutôt déstabilisant.

Le paradoxe du remplissage de l'urne. Une urne est remplie de la manière suivante avec des boules numérotées: Au temps $t = 0$ les 10 boules numérotée 1 à 10 sont mises dans l'urne et la boule 10 est retirée. Au temps $t = \frac{1}{2}$ les boules 11 à 20 sont ajoutées et la boule 20 est retirée. Au temps $t = \frac{3}{4}$, les boules 20 à 30 sont ajoutées et la boule 30 est retirée. Le processus présenté ici s'accélère, les opérations d'ajout et de retrait s'effectuent aux temps $t_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, les boules numérotées de $10n+1$ à $10(n+1)$ sont ajoutées et la boule numérotée $10(n+1)$ est retirée. Ainsi au temps $t = 1$ une infinité de boules se trouvent dans l'urne, celles qui ne si trouvent pas sont les boules dont le numéro est divisible par 10. L'opération est recommencée mais cette fois c'est la boule 1 qui est retirée et ensuite la boule 2 et après n opérations, c'est la boule n. Si cette manière de procéder est appliquée, l'urne est vide à la fin de l'opération! Jusqu'ici, il n'y a pas de probabilité, aussi procédons d'une troisième manière. Ajoutons les boules comme précédemment et à chaque fois retirons une boule au hasard, bien sûr seule une boule déjà introduite peut être retirée à un instant donné. Pour commencer notons par E_n l'événement « la boule 1 est encore dans l'urne après n ajouts et retraits ». La probabilité de cet événement vaut:

$$p(E_n) = \frac{9}{10}\frac{18}{19}\frac{27}{28}\cdots\frac{9n}{9n+1}$$

L'événement, « la boule est encore dans l'urne au temps $t = 1$ » est simplement $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Les événements E_n forment une suite décroissante, ce qui permet de calculer la probabilité que la boule 1 se trouve dans l'urne au temps $t = 1$:

$$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} p(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

Il reste à montrer que ce produit infini est nul. Il est plus simple de montrer que l'inverse de ce produit infini est infini:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+1}{9n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right) \geq \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{9n}\right), \forall m \geq 1$$

Mais

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{9n}\right) &= \left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\left(1+\frac{1}{27}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9m}\right)\\ &\geq 1+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\cdots\frac{1}{9m} = 1+\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque m tend vers l'infini, la somme diverge et le produit est infini. Ceci implique que la boule 1 a la probabilité 0 de se trouver dans l'urne au temps $t = 1$. Ce résultat s'applique évidemment aux boules 1 à 10 sans changement. Pour les boules 11 à 20, la probabilité de se trouver dans l'urne en $t = 1$ vaut:

$$p_{11,20} = \prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

Plus généralement en notant F_{10k+l} l'événement « la boule d'indice $10k+l$ (l prend les valeurs 1 à 10) est dans l'urne au temps $t = 1$ » et calculons la probabilité que cette boule se trouve dans l'urne au temps $t = 1$.

$$p_{10k+l} = \prod_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

Un calcul direct comme celui conduit précédemment montre que cette probabilité est nulle. Ainsi la probabilité que l'urne ne soit pas vide à minuit satisfait:

$$p\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p\left(F_i\right) = 0$$

Selon le calcul des probabilités, l'urne est vide à la fin de ce petit jeu.

Exercice 43 *Une expérience consiste à lancer la pièce 10 fois. Calculez la probabilité d'obtenir FACE une seule fois, 5 fois, 5 fois FACE et ensuite 5 fois PILE.*

Exercice 44 *Le dé à 6 faces est lancé 10 fois, quelle est la probabilité d'obtenir une fois au moins chacune des 6 valeurs?*

Exercice 45 *Le dé est lancé 10 fois, quelle est la probabilité d'obtenir des valeurs toutes inférieures à 5.*

Exercice 46 *On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité d'obtenir un « black jack » c'est-à-dire que l'une des cartes est un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi?*

Exercice 47 *On jette deux dés, calculer les probabilités d'obtenir k pour somme des points ($k = 1 \ldots 12$).*

Exercice 48 *Une urne contient 3 boules rouges et 7 noires. Les joueurs A et B tirent sans remise, une boule à tour de rôle jusqu'à ce qu'une rouge sorte. A commence, quelle est la probabilité que A gagne?*

1.4.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Le concept de probabilité conditionnelle est important lorsqu'on calcule des probabilités alors qu'une partie de l'information est connue. Commençons par un exemple.

Exemple 49 *Si on jette deux pièces de monnaie simultanément, la probabilité d'obtenir deux fois PILE est évidemment de un quart. Si les pièces sont jetées l'une après l'autre et que l'on voit la première afficher PILE alors la probabilité d'obtenir deux fois PILE est de un demi. Ainsi, obtenir deux fois PILE lorsque la première pièce affiche PILE est plus probable que d'obtenir deux fois PILE sans information (ce qui est évident).*

Définition 50 *Soit E et F deux événements dont les probabilités sont $p(E)$ et $p(F)$ respectivement. La probabilité de voir se réaliser E lorsque F s'est réalisé est par définition:*

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

Il est évident que cette probabilité est nulle si E et F sont exclusifs, elle vaut 1 si $E = F$.

Exemple 51 *On jette deux dés, quelle est la probabilité d'obtenir 5 comme somme des deux valeurs affichées? Quelle est la probabilité d'obtenir 5 comme somme des deux valeurs si le premier vaut 3? Dans le premier cas, les cas favorables, équi-probables, sont $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, et la probabilité vaut $\frac{1}{9}$. Dans le second cas, il faut que le second dé affiche 2, et la probabilité vaut $\frac{1}{6}$. Calculons ce résultat en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle. Notons par E l'événement « la somme vaut 5 » et par F l'événement, « le premier dé vaut 3 » L'événement $E \cap F$ est celui dont la somme est 5 et dont le valeur du premier dé est 3. Il n'y a qu'une possibilité de réaliser cet événement sur les 36 issues possibles des deux dés et donc $p(E \cap F) = \frac{1}{36}$.*

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

Exercice 52 *Une urne contient 10 billes blanches, 5 jaunes et 10 noires. Une bille est tirée de l'urne, elle n'est pas noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune? $\left(Rép. = \frac{1}{3}\right)$.*

Exercice 53 *Une urne comprend 8 boules rouges et 4 blanches, on tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité que les deux boules soient rouges? $\left(Rép. = \frac{14}{33}\right)$.*

1.4.3 Formule de Bayes

Commençons par une identité qui se démontre par un diagramme de Venn ou par ce qui précède. Soit l'ensemble fondamental S, un événement E, un autre événement F et son complémentaire F^c. Il est possible d'écrire:

$$p(E) = p(E \cap S) = p(E \cap (F \cup F^c)) = p(E \cap F) + p(E \cap F^c)$$

En utilisant la probabilité conditionnelle, il vient:

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E|F)\,p(F) + p(E|F^c)\,p(F^c) \\ &= p(E|F)\,p(F) + p(E|F^c)\,(1 - p(F)) \end{aligned}$$

Cette formule dite des **probabilités totales** peut être interprétée comme suit: la probabilité que l'événement E se réalise est la moyenne pondérée que E se réalise lorsque F s'est réalisé et que E se réalise lorsque F ne s'est pas réalisé.

Généralisons cette formule comme suit: Soient $F_1, \ldots F_n$ des événements deux à deux exclusifs tels que

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

il suit:

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i)$$

Et puisque les événements F_i s'excluent mutuellement, il vient:

$$p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E|F_i)\,p(F_i)$$

Ici, encore une fois, l'interprétation de la moyenne pondérée s'applique sans autre: la probabilité que E se réalise est égale à la moyenne pondérée par les probabilités $p(F_i)$ des probabilités conditionnelles de voir E se réaliser lorsque F_i s'est réalisé.

Supposons maintenant que l'événement E s'est réalisé et que nous cherchions à déterminer la probabilité que l'un des F_j se soit aussi réalisé, il faut calculer la probabilité conditionnelle suivante:

$$p(F_j|E) = \frac{p(E \cap F_j)}{p(E)} = \frac{p(E|F_j)\,p(F_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(E|F_i)\,p(F_i)}$$

C'est la formule de Bayes.

Voici une application de la formule de Bayes. Il s'agit d'estimer le contenu d'une urne qui contient des boules blanches et/ou des boules noires. Pour estimer son contenu, on effectue 6 tirages successifs avec remise. Tous les tirages donnent une boule blanche. Que peut-on dire de la composition de l'urne? Supposons d'abord que l'urne contienne 6 boules. Avant d'effectuer le moindre tirage, il y a 7 possibilités, qui vont de 0 blanches et 6 noires à 6 blanches et 0 noires: $(0B, 6N)$, $(1B, 5N)$,...,$(6B, 0N)$. La probabilité de réalisation de ces états est à priori équiprobable, chaque réalisation a donc pour probabilité $\frac{1}{7}$. La probabilité de tirer une boule blanche si l'urne en contient k est $\frac{k}{6}$ et celle de tirer successivement 6 boules blanches avec remise vaut $\left(\frac{k}{6}\right)^6$. Cette probabilité, dans la notation précédente c'est $p(E|F_k)$. La probabilité qu'il y ait k boules blanches en fonction du résultat obtenu au cours de cette expérience vaut:

$$p(F_k|E) = \frac{p(E|F_k)\,p(F_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(E|F_i)\,p(F_i)} = \frac{\left(\frac{k}{6}\right)^6 \frac{1}{7}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{6}\right)^6 \frac{1}{7}} = \frac{k^6}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^6}$$

Le tableau suivant donne les probabilités cherchées:

Compositions	$0B, 6N$	$1B, 5N$	$2B, 4N$	$3B, 3N$	$4B, 2N$	$5B, 1N$	$6B, 0N$
k	0	1	2	3	4	5	6
$p(F_k \vert E)$	0.0	10^{-5}	10^{-3}	0.01	0.06	0.23	0.70

Si M est le nombre de boules dans l'urne la distribution des boules blanches et noires est de la forme $(kB, (M-k)N)$ où $0 \leq k \leq M$ et la probabilité uniforme supposée nous dit que la probabilité de cette répartition est égale à $\frac{1}{M+1}$. La probabilité de tirer 6 fois une boule blanche vaut, dans ce cas $\left(\frac{k}{M}\right)^6$ et la probabilité cherchée vaut

$$p(F_k|E) = \frac{k^6}{\sum\limits_{m=0}^{M} m^6}$$

L'information est mince, car M est inconnu. Mais il est important de noter que le dénominateur est indépendant de k et puisque le numérateur est k^6 les distributions avec grand nombre de boules blanches sont favorisées.

Cet exemple-ci est peut-être plus convaincant. Un laboratoire d'analyses assure avec une fiabilité (probabilité) de 95% la détection d'une maladie particulière lorsqu'elle est présente. Le test indique un résultat faussement positif pour 1% des personnes saines auxquelles il est appliqué. Si 0,5% de la population porte la maladie, quelle est la probabilité qu'une personne soit vraiment malade lorsque le test est positif? La solution se construit comme suit. Soit D l'événement « la personne est malade » et E l'événement « le test est positif ». La probabilité $p(D/E)$ voulue, la probabilité que la personne soit malade lorsque le test est positif, s'évalue comme suit:

$$p(D|E) = \frac{p(D \cap E)}{p(E)} = \frac{p(E|D)\,p(D)}{p(E|D)\,p(D) + p(E|D^c)\,p(D^c)}$$

$$p(D|E) = \frac{(0,95)\,(0,005)}{(0,95)\,(0,005) + (0,01)\,(0,995)} = \frac{95}{294} = 0,323$$

Ainsi seulement le 32% des personnes dont le test est positif sont vraiment malades! Il vaut mieux faire plusieurs tests et si possible des tests différents pour assurer le diagnostique. Voici un argument différent pour mieux comprendre ce résultat. Puisque le 0,5% de la population est affectée, sur 200 personnes, le test détectera correctement 0,95 cas. Parmi les 199 personnes saines, le test va, à tort, détecter $(199)\,(0,01)$ cas de maladie. Ainsi à 0,95 cas de maladie correctement détecté s'ajoutent 1,99 cas faussement détecté. Dès lors, la proportion de cas correctement détectés vaut:

$$\frac{0,95}{0,95 + (199)\,(0,01)} = \frac{95}{294} = 0,323$$

1.5 Variables aléatoires discrètes

Les expériences discutées jusqu'ici, telles que le jet de la pièce avec pour issues « PILE ou FACE », le lancé du dé avec pour issue « la face supérieure du dé porte le chiffre 4 », un jeu de cartes avec pour issue « obtenir un black jack » sont certes des expériences où le calcul des probabilités s'applique pleinement, mais il devient nécessaire d'introduire les variables aléatoires pour pouvoir exploiter le calcul des probabilités. De fait la notion de variable aléatoire a déjà été utilisée, sans le dire. En effet, lorsque nous considérons l'expérience du jet de deux dés et que nous posons la question « quelle est la probabilité d'obtenir 7 comme somme des deux dés », nous devons convertir les issues de l'expérience en nombres et effectuer des opérations arithmétiques pour déterminer la probabilité demandée. Dans cet exemple, les nombres sont simplement les valeurs des faces des dés, ces nombres sont donc fonctions des issues de l'expérience. Nous pouvons maintenant généraliser ce petit exemple et donner la définition des variables aléatoires.

Définition 54 *Une variable aléatoire est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble fondamental* S.

Cette définition semble anodine, mais l'intérêt des variables aléatoires, c'est d'être définies sur le même ensemble que l'ensemble de définition des probabilités. Ainsi les valeurs prises par ces variables peuvent être discutées de manière probabiliste.

Exemple 55 *On jette trois pièces et le nombre de piles est désigné par Y. Y est une variable aléatoire, elle dépend de l'issue de l'expérience et les valeurs que cette variable aléatoire peut prendre sont 0, 1, 2 et 3. Les probabilités associées à ces valeurs sont:*

$$\begin{array}{l} p(Y=0)=p\{(F,F,F)\}=\frac{1}{8} \\ p(Y=1)=p\{(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P)\}=\frac{3}{8} \\ p(Y=2)=p\{(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)\}=\frac{3}{8} \\ p(Y=3)=p\{(P,P,P)\}=\frac{1}{8} \end{array}$$

Exercice 56 *On jette deux dés et la variable aléatoire considérée est celle qui donne la somme des valeurs obtenues sur chaque dé. Construisez un tableau semblable à celui de l'exemple précédent.*

Exercice 57 *Même exercice, mais c'est la différence des deux valeurs lues qui est la variable aléatoire (valeur du premier dé moins valeur du second dé).*

Exercice 58 *Dans une urne se trouvent 20 boules numérotées de 1 à 20. On en tire trois boules, sans remise. Quelle est la probabilité que l'une des boules au moins porte un numéro supérieur ou égal à 17? Indication: il faut introduire la variable aléatoire X qui est le plus grand numéro tiré. Il faut ensuite calculer $p\{X=i\}$ où i prend les valeurs $17,\ldots,20$ et conclure.*

Exercice 59 *La pièce est jetée 10 fois, quelle est la probabilité que PILE apparaisse au moins 4 fois?*

1.5.1 Fonction de répartition.

Définition 60 *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est une fonction définie sur l'ensemble des réels R comme suit:*

$$F:R\rightarrow R,\quad F:b\mapsto F(b),\quad F(b)=p\{X\leq b\}$$

C'est la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à b.

Enumérons quelques propriétés de la fonction de répartition.

$$\begin{array}{lrcl} 1) & F(a) & \leq & F(b) \text{ dès que } a<b \\ 2) & \lim\limits_{b\rightarrow\infty} F(b) & = & 1 \\ 3) & \lim\limits_{b\rightarrow-\infty} F(b) & = & 0 \\ 4) & \lim\limits_{n\rightarrow\infty} F(b_n) & = & F(b) \end{array}$$

La première propriété découle du fait que si $a<b$ l'événement $\{X\leq a\}$ est inclus dans l'événement $\{X\leq b\}$ la probabilité du premier est donc plus petite ou égale à celle du second.

Pour démontrer la deuxième propriété, il faut construire une suite b_n qui tend vers l'infini. Les événements $\{X\leq b_n\}$, $n\geq 1$ sont croissants emboîtés et leur union est $\{X<\infty\}$ il vient alors:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} p\{X\leq b_n\}=p\{X<\infty\}=1$$

La troisième propriété s'obtient de manière similaire, en construisant une suite d'événements emboîté dont l'intersection est égale à l'ensemble vide. La quatrième se démontre en construisant une suite décroissante b_n convergeant vers b. $\{X_n\leq b_n\}$, $n\geq 1$ est une suite emboîtée d'événements dont l'intersection est $\{X\leq b\}$ et par continuité la conclusion suit et la fonction de répartition est continue à droite.

Exemple 61 *La variable aléatoire est la valeur indiquée par le dé. Voici le graphe de sa fonction de répartition (voir figure 1).*

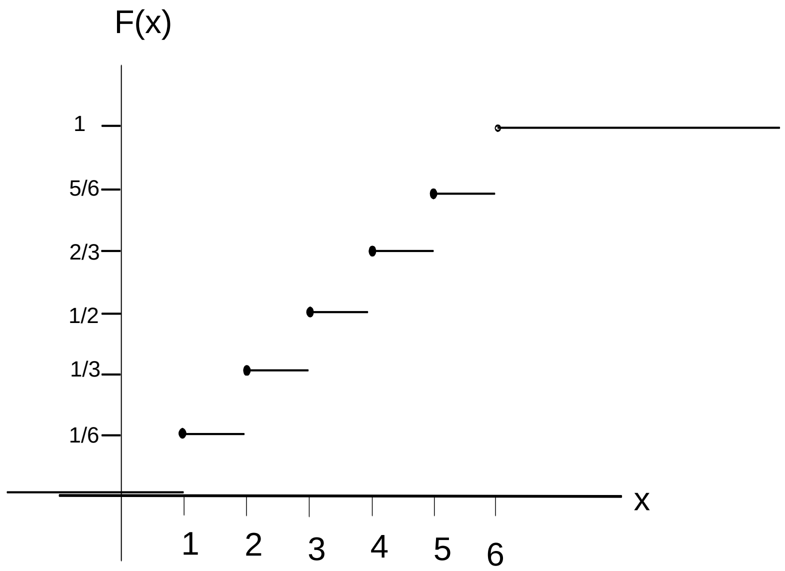


Figure 1: Fonction de répartition des valeurs du dé

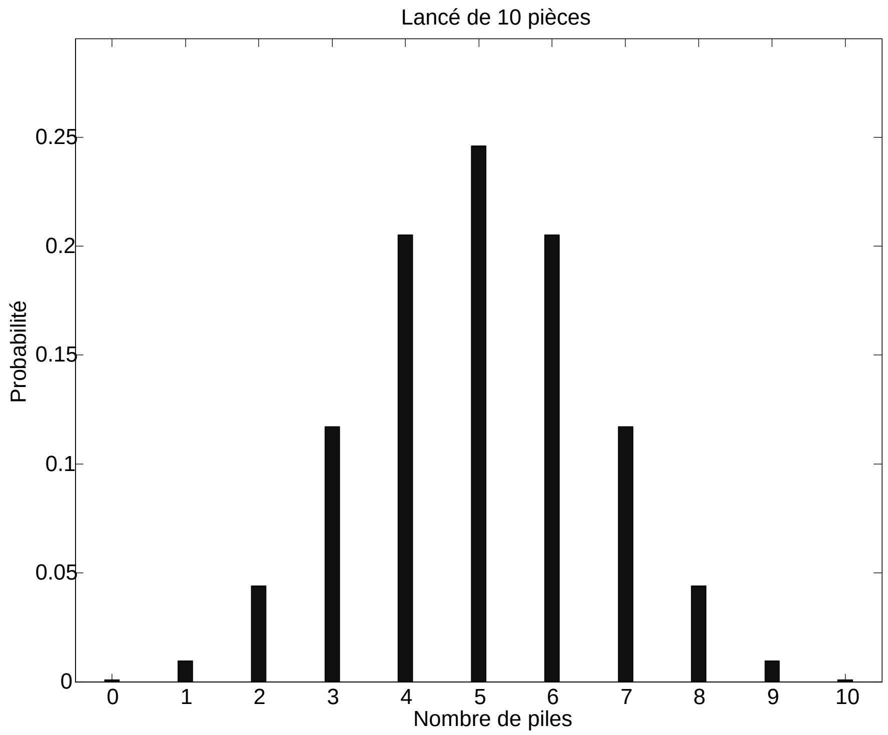


Figure 2: Histogramme de la distribution binomiale

Définition 62 *Une variable aléatoire ne pouvant prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs est dite discrète.*

La variable aléatoire de la valeur du dé en est un exemple. Si la variable est discrète, sa loi de probabilité est définie comme suit:

Définition 63 *Soit X une variable aléatoire discrète, sa loi de probabilité est définie par:*

$$p(a) = p\{X = a\}$$

Cette loi ne peut être positive que pour un ensemble au plus dénombrable d'arguments. De plus la variable aléatoire discrète doit nécessairement prendre l'une des valeurs $x_1, x_2, \ldots$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Représentation graphique sous forme d'histogrammes. Si le nombre de valeurs que peut prendre la variable aléatoire est faible (<20) la représentation graphique sous forme d'histogrammes est utile. Un exemple est donné à la figure 2, où la variable aléatoire est le nombre de fois que pile est obtenu dans le jet de dix pièces.

Exercice 64 *L'expérience consiste à lancer deux dés et la variable aléatoire est la somme des nombres des deux dés. Dessinez la loi de probabilité de cette somme sous forme d'histogramme.*

Exercice 65 *Ecrivez un programme Matlab (Maple) pour calculer la loi de probabilité qui donne le nombre de PILE lors du lancé de n pièces $(n \leq 30)$ et représentez cette loi sous forme d'histogrammes.*

Comme les exemples et exercices ci-dessus, le montre, la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier dont les valeurs discrètes varient entre 0 et 1.

Fonction de répartition et probabilité. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est construite à partir de la loi de probabilité. Inversement, étant donné une fonction de répartition, il est possible de construire la loi de probabilité. Voici un exemple de cette construction. Soit la fonction de répartition F dont l'interprétation est : $F(b)$ est la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à b. Alors la probabilité pour que la variable aléatoire prenne une valeur supérieure à a et inférieure ou égale à b vaut : $F(b) - F(a)$ et formellement:

$$p\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a), \quad \forall a < b$$

Pour démontrer cette égalité, il faut construire les deux événements exclusifs suivants:

$$\{X \leq a\} \quad \text{et} \quad \{a < X \leq b\}$$

et l'union de ces deux événements exclusifs vaut:

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$

il suit immédiatement:

$$p(\{X \leq b\}) = p(\{X \leq a\}) + p(\{a < X \leq b\})$$

ce qui démontre l'égalité proposée ci-dessus. Il est donc possible de travailler de manière équivalente avec la loi de probabilité ou avec la fonction de répartition.

1.5.2 Variable de Bernoulli et variable binomiale

Variable de Bernoulli. Si une expérience a deux issues possibles, la première ayant la probabilité p de se réaliser, la seconde a la probabilité $q = 1 - p$ de se réaliser. (Jacques Bernoulli, mathématicien et physicien Bâlois) interprétait l'une des issues comme « un succès » et l'autre comme un « échec ». Associons une variable aléatoire X à cette expérience, dont les valeurs sont respectivement 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec:

$$\begin{aligned} p(0) &= p\{X = 0\} = q = 1 - p \\ p(1) &= p\{X = 1\} = p \end{aligned}$$

Cette loi est bien une loi de probabilité pourvu que le nombre p soit compris entre 0 et 1.

Variables binomiales. Si une expérience ayant deux issues possibles de probabilités respectives p et $q = 1 - p$ est répétée n fois, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que la première issue apparaît (le nombre de succès) est dite variable aléatoire binomiale et ses paramètres sont (n, p), n le nombre de répétitions et p la probabilité de succès de l'expérience fondamentale.

Définition 66 *La loi de probabilité d'une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p) est définie par:*

$$p(i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i (1 - p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Cette loi découle du fait que les issues successives de l'expérience élémentaire sont indépendantes les unes des autres. Il faut encore remarquer qu'une séquence comportant i succès et $(n - i)$ échecs a pour probabilité $p^i (1 - p)^{(n-i)}$ d'être réalisée; il y a en outre $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ séquences différentes de i succès et $(n - i)$ échecs, ce qui justifie la loi binomiale. Les exemples déjà vu de distributions binomiales sont les exemples relatifs aux lancés de la pièce.

Exemple 67 *En moyenne, un étudiant sur 20 est daltonien. Quelle est la probabilité qu'il y en ait deux dans une classe de 25 étudiants? Solution: Désignons par X le nombre d'étudiants daltoniens, c'est une variable aléatoire de paramètres $(n, p) = \left(25, \frac{1}{20}\right)$ La probabilité cherchée est simplement*

$$p(X = 2) = \left(\binom{25}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{(25-2)} \right) = .2305176508$$

Exercice 68 *Une entreprise vend ses vis par paquets de 10. La probabilité qu'une vis soit défectueuse est de 0,01. Si l'entreprise remplace les paquets ayant au moins deux vis défectueuses, quelle est la proportion de paquets à remplacer? Rép* $\approx 0,004$.

Exercice 69 *On admet qu'un trait physique, (la couleur des yeux, le fait d'être gaucher) est déterminé par une paire de gênes. Le gêne dominant est noté d, le récessif est noté r et la paire de gênes qui décide du trait physique peut être dd, dr, rd, rr. Les porteurs des paires dd, dr et rd ne se distingue pas les uns des autres mais les porteurs de la paire rr eux, sont différents. Si les deux parents sont hybrides, dr ou rd quelle est la probabilité que 3 de leurs 4 enfants manifestent le trait dominant?*
$\left(Rép. = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}\right)$

Fonction de répartition de la loi binomiale. Soit la loi binomiale de paramètres (n,p) il faut calculer $p\,(X \leq i)$:

$$p\,(X \leq i) = \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\,(1-p)^{(n-k)} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Exercice 70 *Ecrivez un programme Matlab (Maple) qui vous donne simultanément les graphique de la loi binomiale* (n,p) *et de sa fonction de répartition. Pour le calcul de la fonction de répartition il est avantageux d'utiliser le résultat suivant:*

$$p\,\{X = k\} = \frac{(n-k+1)\,p}{k\,(1-p)} p\,\{X = k-1\}\,, \quad k = 1, \ldots, n$$

que vous pouvez démontrez.

1.5.3 Variable de Poisson

Définition 71 *La variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs 0,1,2,$\cdots$ est dite de Poisson avec paramètre* λ, $\lambda \in R$, *si*

$$p\,(i) = p\,\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est bien une loi de probabilité car $p\,(i)$ est positif et

$$\sum_{i=0}^{\infty} p\,(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

(voir figure 3). Les applications de la loi de Poisson sont très diverses. On rencontre cette loi en physique des particules pour décrire le nombre de particules α émise par un matériau radioactif pendant un temps donné. Le nombre d'erreurs par page écrite semble également bien suivre cette loi etc.

Exemple 72 *On mesure le nombre de particules α émises par un matériau radioactif. L'expérience montre qu'en moyenne il y a 3,2 particules émises par seconde. Ce nombre de particules émises par seconde est une variable aléatoire de Poisson. On veut calculer la probabilité que deux particules soient émises au cours de la prochaine seconde. On veut aussi calculer la probabilité pour qu'au plus deux particules α soient observées au cours de la prochaine seconde. Solution: La distribution est de Poisson, et comme nous le verrons,(1.5.5) le paramètre λ est égal à la moyenne de la variable aléatoire, ici* $3,2$. *Ainsi la probabilité de 2 désintégrations exactement est*

$$p\,(X = 2) = e^{-3,2}\frac{(3,2)^2}{2!} = 0.2087$$

et la probabilité d'avoir au plus 2 désintégration vaut:

$$p\,(X \leq 2) = e^{-3,2}\left(1 + \frac{3,2}{1!} + \frac{(3,2)^2}{2!}\right) = 0.3799$$

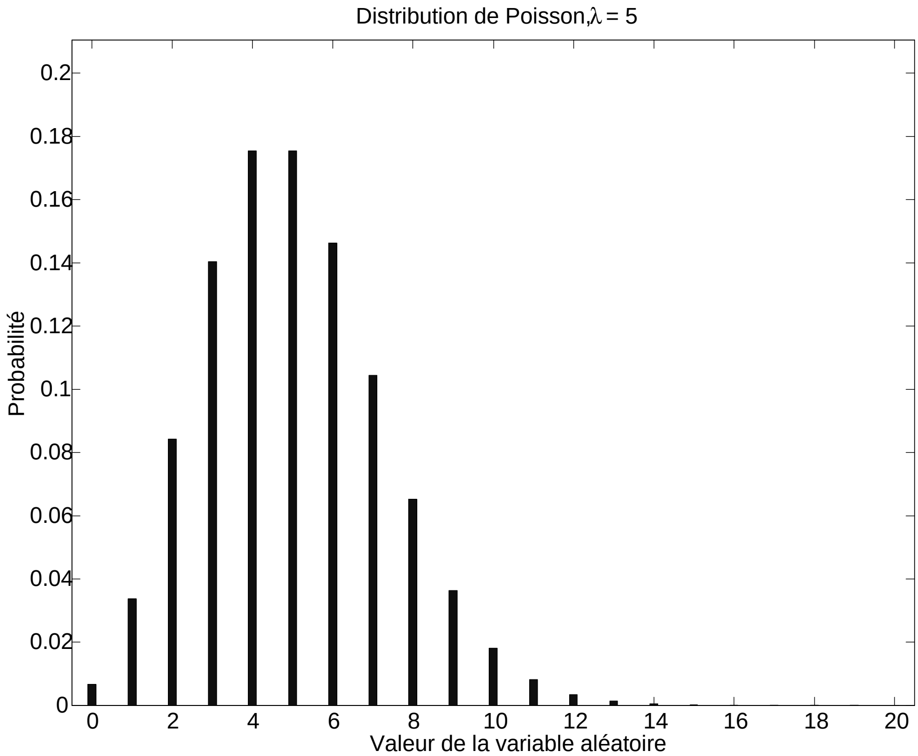


Figure 3: Distribution de Poisson

Exercice 73 *Ecrivez un programme Matlab (Maple) pour représenter la loi de Poisson de paramètre λ.*

Exercice 74 *Le nombre d'erreurs engendrées par une ligne de transmission pendant la transmission d'un paquet semble suivre la loi de Poisson avec pour paramètre $\lambda = 0.01$. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur exactement durant la transmission d'un paquet? Quelle est la probabilité qu'il y ait plus d'une erreur pendant la transmission d'un paquet?*

Fonction de répartition de la répartition de Poisson. Le calcul de la fonction de répartition peut, comme celle de la distribution binomiale, être exprimée sous forme itérative. En effet, de la définition de la loi de Poisson, il suit:

$$p\{X = i + 1\} = \frac{\lambda}{i+1} p\{X = i\}$$

Ainsi, en ayant calculé $p\{X = 0\} = e^{-\lambda}$, il est aisé de calculer $p\{X = 1\}, \ldots$ par la formule de récurrence ci-dessus et de sommer les valeurs obtenues pour construire la fonction de répartition. Mais il y a des difficultés numériques, car si λ est très grand, la valeur numérique de $e^{-\lambda}$ peut être numériquement approximée par 0, ce qui ne convient pas à la récurrence. Dans un tel cas, il faut estimer la valeur de la variable i pour laquelle $p(i)$ peut être évaluée correctement et ensuite appliquer la récurrence.

1.5.4 Espérance ou moyenne d'une variable aléatoire discrète

La connaissance de la distribution de probabilité ou de la fonction de répartition est très riche, parfois un peu trop. Il suffit souvent de connaître quelques propriétés de la distribution pour en connaître les caractéristiques principales. La première de ces propriétés est l'espérance ou moyenne de la variable aléatoire, la deuxième est la variance et l'écart-type qui est la racine carrée de la variance. Ce sont les deux (ou trois) propriétés que nous verrons ici.

Définition 75 *Soit une loi de probabilité discrète et la variable aléatoire X, qui prend les valeurs discrètes x_i, l'espérance ou moyenne de X est définie par:*

$$E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$$

C'est donc la moyenne des valeurs x_i que peut prendre X, pondérées par les probabilités de réalisation $p(x_i)$.

Exemple 76 *Soit le lancé du dé, la valeur moyenne obtenue en lançant assez souvent le dé, la valeur moyenne des valeurs obtenues est:*

$$E[X] = \sum_i x_i p(x_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6}\frac{6*7}{2} = 3,5$$

Théorème 77 *Soit la variable aléatoire X et le nombre α alors*

$$E[\alpha X] = \alpha E[X]$$

Preuve. $E[\alpha X] = \sum_i \alpha x_i p(x_i) = \alpha \sum_i x_i p(x_i) = \alpha E[X]$ ■

Théorème 78 *Soit deux variables aléatoires X et Y de même distribution de probabilité. La moyenne de la somme ou de la différence des variables aléatoires est égale à la somme ou la différence des moyennes des variables aléatoires:*

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$$

Preuve. $E[X \pm Y] = \sum\limits_i (x_i \pm y_i) p(i) = \sum\limits_i x_i p(i) \pm \sum\limits_i y_i p(i) = E[X] \pm E[Y]$ ■

1.5.5 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

La moyenne ou l'espérance est la première des caractéristiques d'une variable aléatoire. Mais comme l'exemple suivant le montre, la moyenne ne donne pas d'information quant à « l'étalement » de la variable aléatoire. Considérons par exemple les variables aléatoires W, Y et Z définies comme suit:

$$W = 0 \quad \text{avec probabilité } 1$$

$$Y = \left\{ \begin{array}{rl} -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

et

$$Z = \left\{ \begin{array}{rl} -10 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ 10 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Elles ont toutes une moyenne nulle mais leurs dispersions sont très différentes et la moyenne ne l'indique pas. La variance est introduite afin de caractériser l'étalement de la variable aléatoire, afin de caractériser sa répartition autour de la moyenne.

Définition 79 *Soit la variable aléatoire X sa variance est définie par*

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

où μ est l'espérance de X.

Un calcul simple permet d'évaluer la variance comme suit:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] = E\left[X^2\right] - E[2\mu X] + E\left[\mu^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2\mu E[X] + E\left[\mu^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[\mu^2\right] = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Elle est donc égale à l'espérance du carré de la variable aléatoire dont on soustrait le carré de la moyenne. Il faut remarquer que la variance est toujours positive (ou nulle) car $Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$ et la moyenne de nombres positifs ou nuls est positive ou nulle.

Théorème 80 *Soit la variable aléatoire X dont la variance est $Var(X)$. La variance de la variable aléatoire*

$$Y = aX + b$$

où a et b sont deux nombres vaut:

$$Var(Y) = a^2 Var(X)$$

Preuve. $Var(Y) = Var(aX+b) = E\left[(aX+b-(aE[X]+b))^2\right] = E\left[(aX-aE[X])^2\right]$
$= E\left[a^2(X-E(X))^2\right] = a^2 E\left[(X-E(X))^2\right] = a^2 Var(X)$ ■

Définition 81 *Soit X une variable aléatoire et $Var(X)$ sa variance. L'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X est défini par:*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Espérance, variance et écart-type d'une variable binomiale. Considérons la loi binomiale de paramètres (n, p), l'espérance, le nombre moyen de succès défini par:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} ip(i)$$

vaut:

$$E[X] = np$$

La variance vaut:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

et l'écart-type vaut:

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Démontrons ces résultats. Soit

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{in!}{(n-i)!i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} p^{(i-1)} (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

En posant $k = i - 1$, il vient:

$$\begin{aligned} E[X] &= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np \end{aligned}$$

Ainsi lorsque de nombreuses pièces sont lancées, le nombre moyen de piles est simplement $n/2$ Il en est de même si la même pièce est lancée de nombreuses fois. Au lancé du dé, le nombre moyen d'apparitions de la face 5 est simplement $1/6$.

Calculons maintenant la variance et l'écart-type de la distribution binomiale. La variance vaut:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - (np)^2$$

Calculons $E\left[X^2\right]$.

$$E\left[X^2\right]=\sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Mais en utilisnat l'identité $i^2 = i(i-1)+i$, il vient

$$E\left[X^2\right]=\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}+\sum_{i=0}^{n} i\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}$$

Le second des deux termes est la valeur moyenne de la distribution binomiale qui vaut np. La variance de X vaut donc:

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-(np)^2=\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}+np-(np)^2$$

Il reste à calculer la somme: $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i} &= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\frac{n!}{(n-i)!i!}p^i(1-p)^{n-i}= \\ \sum_{i=2}^{n}\frac{n!}{(n-i)!(i-2)!}p^i(1-p)^{n-i} &= n(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-i)!(i-2)!}p^{i-2}(1-p)^{n-i}\end{aligned}$$

En ajoutant et en soustrayant 2 de manière à mettre en évidence la binomiale nous pouvons écrire:

$$Var(X)=n(n-1)p^2\sum_{i=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-2-(i-2))!(i-2)!}p^{i-2}(1-p)^{n-2-(i-2)}+np-(np)^2$$

En posant $j=i-2$:

$$Var(X)=n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-2-j)!j!}p^j(1-p)^{n-2-j}+np-(np)^2$$

La définition de la binomiale permet d'écrire:

$$Var(X)=n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j}+np-(np)^2$$

Mais la somme à évaluer vaut 1 (développement de $(p+(1-p))^{n-2}$). ce qui permet d'écrire:

$$Var(X)=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)=npq$$

Espérance, variance et écart-type d'une variable de Poisson Considérons la variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. La valeur moyenne de la variable aléatoire X est:

$$E[X]=\sum_{i=0}^{\infty} ip(i)=\lambda$$

La variance vaut elle:

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\lambda$$

Démontrons ces résultats. L'espérance s'écrit:

$$E[X]=\sum_{i=0}^{\infty} ip(i)=\sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i\lambda^i}{i!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

Le changement d'indice $k = i - 1$ permet d'écrire:

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Le calcul de la variance est direct:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - \lambda^2$$

Calculons $E\left[X^2\right]$.

$$E\left[X^2\right] = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

En posant $k = i - 1$, il vient:

$$E\left[X^2\right] = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Mais $\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$, (cf. calcul de la moyenne) et $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$, par définition de l'exponentielle. La variance de la distribution de Poisson vaut donc:

$$E\left[X^2\right] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

1.6 Variables aléatoires continues

Il existe des variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini non dénombrable. On peut citer par exemple, le temps de fonctionnnement d'un transistor, la vitesse d'un véhicule après cinq minutes de fonctionnement etc. Pour traiter de telles variables aléatoires, il faut remarquer que la notion de probabilité, comme vue dans le cas discret, ne convient pas. En effet le « nombre » d'issues possibles étant réel et non entier, il n'est pas possible d'affecter une probabilité différente de 0 à chaque issue possible tout en exigeant que la somme des probabilités soit égale à 1. De fait la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur particulière est nécessairement nulle sauf en un nombre de points finis ou dénombrables, c'est-à-dire presque partout. La notion de fonction de répartition elle, demeure utilisable. Et c'est à partir de la fonction de répartition qu'il faut construire la théorie des probabilités des varaibles aléatoires continues.

Soit X une variable aléatoire continue et F sa fonction de répartition:

$$F(b) = p(X \leq b)$$

Comme nous l'avons vu dans le cas discret, les propriétés suivantes doivent être satisfaites:

$$\lim_{b \to -\infty} F(b) = 0$$

$$\lim_{b \to \infty} F(b) = 1$$

La fonction de répartiton est monotone croissante.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne sa valeur dans l'intervalle $[x, x + dx]$ s'exprime à partir de la fonction de répartition comme suit:

$$p(x \leq X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

Si la fonction F est dérivable (au moins une fois), la différence $F(x + dx) - F(x)$ peut être approchée par la différentielle: $F(x + dx) - F(x) = f(x)dx$ où $f = F'$.

Définition 82 *Soit la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est F alors la fonction f telle que*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall a, b \in R$$

est la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

En vertu des propriétés de la fonction de répartition il suit que la densité de probabilité est positive ou nulle $f(x) \geq 0$ et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

Si la densité de probabilité ne prend que des valeurs finies, alors $p(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.

1.6.1 Variable aléatoire uniforme

Définition 83 *La densité de probabilité suivante*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in [a; b] \\ f(x) &= 0 \qquad \textit{ailleurs} \end{aligned}$$

est dite densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a; b]$

Exercice 84 *Représentez la fonction de répartition qui correspond à la densité de probabilité uniforme.*

1.6.2 Variable aléatoire exponentielle

Définition 85 *La densité de probabilité d'une variable aléatoire exponentielle est définie par:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad si \quad x < 0 \\ f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad si \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 86 *Montrez que la densité de probabilité de la variable aléatoire exponentielle vérifie bien les propriétés des densités de probabilité.*

1.6.3 Variable aléatoire gaussienne ou normale

Définition 87 *La densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne ou normale de paramètres (μ, σ) est définie par:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Il est évident que cette fonction est continue et positive. Elle tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. La fonction de répartition qui lui correspond est:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

Exercice 88 *Démontrez que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (difficile)*

1.6.4 Variable aléatoire gaussienne ou normale centré et réduite

Afin de simplifier les calculs il est utile d'effectuer un changement de variable et de définir la distribution de probabilité normale centrée et réduite. Le changement de variable consiste à poser $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$. La normalisation de la densité de probabilité conduit à la définition suivante:

Définition 89 *La distribution de probabilité normale centrée et réduite est:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La fonction de répartition qui lui correspond est:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

(voir figure 4).

1.6.5 Espérance ou moyenne d'une variable aléatoire continue

Définition 90 *Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est $f(x)$ alors l'espérance de X est définie par :*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

1.6.6 Variance et écart-type d'une variable aléatoire continue

Définition 91 *Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est $f(x)$ et dont l'espérance $E[X] = \mu$ alors la variance de X définie par:*

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

vaut:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2\, dx$$

Espérance variance et écart-type de la distribution uniforme. La moyenne se calcule simplement:

$$E[X] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{1}{2}(a+b)$$

La variance vaut:

$$\begin{aligned} Var[X] &= E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \end{aligned}$$

Espérance, variance et écart-type de la distribution exponentielle. La moyenne se calcule simplement:

$$E\left[X\right] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \lambda\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

La variance vaut:

$$Var\left[X\right] = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2\right] - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Espérance, variance et écart-type de la distribution gaussienne. La moyenne et la variance s'obtiennent simplement en effectuant effectuant le changement de variable qui ramène la distribution gaussienne à la distribution gaussienne centré et réduite. Le résultat est :

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \mu$$

et pour la variance:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2$$

Efectuons d'abord le calcul de la moyenne:

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Le changement de variable qui permet de passer à la densité de probabilité normale centrée et réduite est :

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad du = \frac{dx}{\sigma} \Leftrightarrow dx = \sigma du$$

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du + \int_{-\infty}^{\infty} \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

La première intégrale est l'intégrale d'une fonction impaire sur R, elle est donc nulle. Il suit:

$$E\left[X\right] = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \mu$$

Mais l'intégrale à évaluer est celle de la densité de probabilité, elle vaut 1.

Le calcul de la variance s'effectue de la même manière:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Il faut passer à la variable centrée et réduite:

$$Var(X) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ue^{-\frac{u^2}{2}}du$$

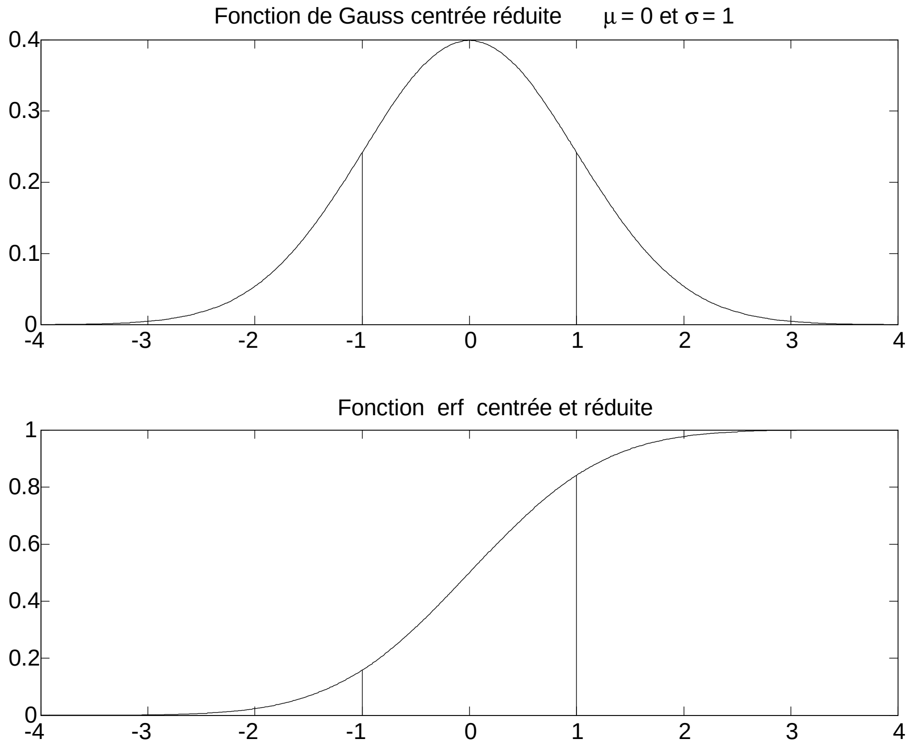


Figure 4: Distribution normale centrée et réduite

Représentation graphique de la variable aléatoire gaussienne et de sa fonction de répartition. Voici d'abord la représentation graphique de la distribution normale centrée et réduite (voir figure 4). Les traits verticaux se trouvent respectivement en $x = \mp 1$. L'aire sous la courbe de Gauss qui se trouve entre les deux traits verticaux représente la probabilité que la variable aléatoire gaussienne se réalise entre les valeurs -1 et $+1$. Cette valeur est égale à la différence $\text{erf}\,(1) - \text{erf}\,(-1) \approx 0,6826$. Autrement dit, le 68% environ des événements gaussiens se réalisent dans l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$. Si l'intervalle est porté à $\pm 2\sigma$ alors la probabilité que l'événement gaussien se réalise dans cet intervalle vaut environ: $95,44\%$.

Si maintenant, la moyenne vaut 2 et l'écart-type vaut 3, le graphique de la fonction de Gauss est décalé vers la droite de 2 unités et il est plus « étalé ». Mais l'aire sous la courbe comprise entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ reste inchangée et vaut toujours $0,6826$ (voir figure 5). Cette remarque justifie le passage de la gaussienne non-centrée et non-réduite à la gaussienne centrée et réduite pour effectuer les calculs.

Exercice 92 *La distribution de la caractéristique β d'un transistor est gaussienne, sa moyenne est $\mu = 150$ et son écart-type $\sigma = 30$. Quelle est la probabilité pour qu'un transistor pris au hasard ait une caractéristique β a) inférieure à 100, b) supérieure à 200, c) comprise entre 150 et 180?*

Exercice 93 *Dans une distribution normale, la probabilité d'un écart supérieur à 0,5 de part et d'autre de la moyenne est de 0,2. Quel est l'écart type?*

Exercice 94 *Pour être admis dans une école, les candidats passent d'abord un examen écrit, ils y obtiennent une note x, $x \in N$. La moyenne de la distribution supposée gaussienne est $\overline{x} = 62,0$. et son écart type est $s = 8,4$. On admettra à l'épreuve orale 60% des candidats, à savoir ceux ayant obtenu à l'épreuve écrite une note x telle que $x \geq x_0$. Déterminez x_0. Les candidats admis à l'oral sont appelés au hasard. Quelle est la probabilité pour que le premier candidat appelé ait obtenu à l'écrit, une note x telle que $80 \leq x \leq 85$?*

Exercice 95 *Le quotient intellectuel (Q.I.) est mesuré dans une population. La distribution des valeurs du Q.I: est normale de moyenne 100 et d'écart type 15. Combien y-a-t-il de génies (Q.I: supérieur à 154) dans une ville de 6 millions d'habitants?*

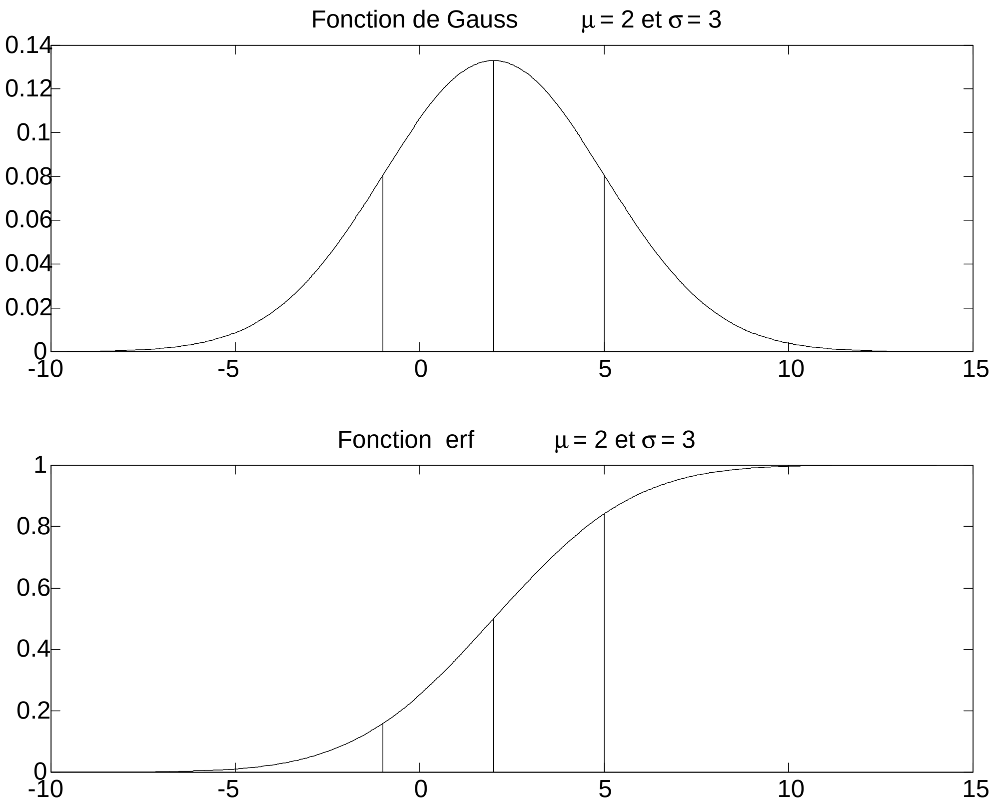


Figure 5: Distribution gaussienne non centrée, non réduite

Liste des figures

Table des matières