Semestre : 3
Module : Economie II
Elément : Micro-Économie (exercices & solutions)
Enseignant : Mr RACHID CHAABITA

*Eléments du cours*

- Utilité cardinale et choix du consommateur
- Les choix du consommateur et la demande individuelle d'un bien en fonction du revenu
- L'élasticité revenu de la demande
- La production en courte période et la loi des rendements décroissants
- La production en langue période
- Les coûts de l'entreprise en courte période

Numérisation & Conception
**Mr Mohamed-Fadil ZIADI**

## EXERCICE 1 :

### Utilité cardinale et choix du consommateur.

Un consommateur mesure la satisfaction que lui procure la consommation séparée de deux biens X et Y. le tableau suivant indique, pour chacun des deux biens, la valeur de l'utilité totale en fonction de la quantité consommée, avec :
x et y : respectivement, nombres d'unités des biens X et Y.
$U_x$ et $U_y$ : respectivement, utilité totale de X et utilité totale de Y.

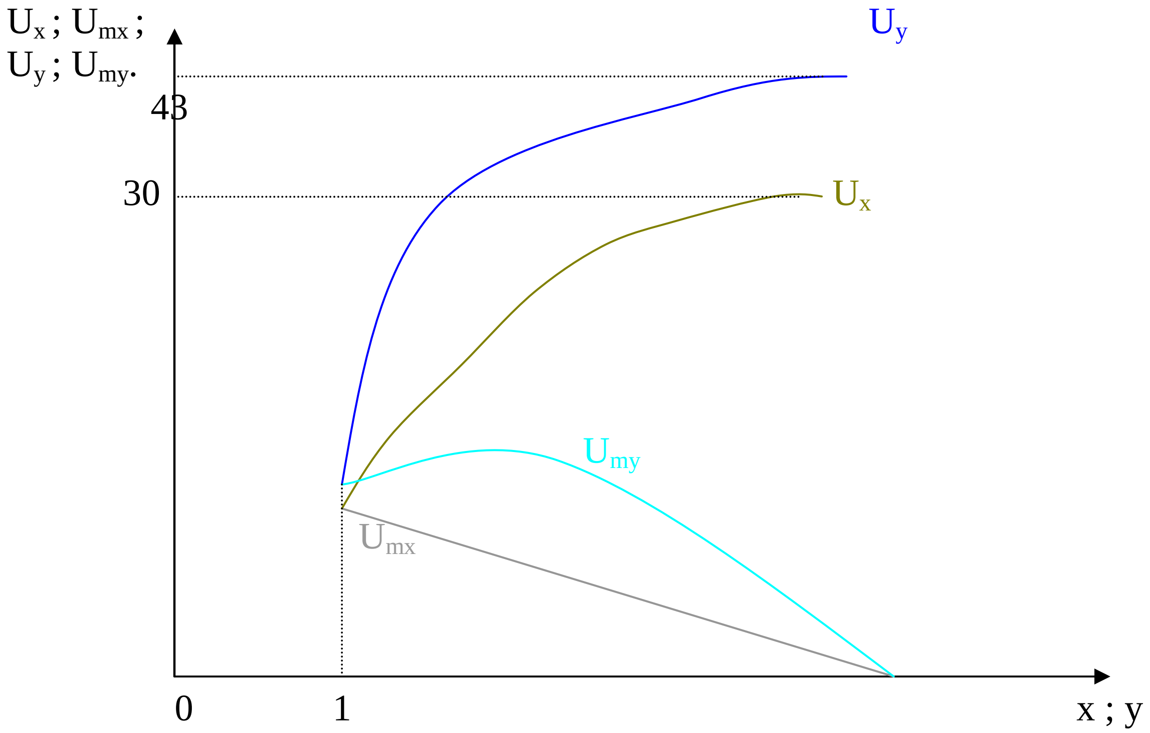
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $U_x$ | 0 | 10 | 18 | 24 | 28 | 30 | 30 |
| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $U_y$ | 0 | 12 | 23 | 32 | 39 | 43 | 43 |

a- A partir du tableau, définir, calculer et représenter sur un même graphique les utilités totales et marginales des biens X et Y.
b- L'individu, qui affecte la totalité de son revenu nominal Rl, à l'achat des biens X et Y, veut maximiser sa satisfaction, sachant que les biens X et Y ont le même prix unitaire égal à 2 dirhams (Px = Py = 2 dirhams) et que Rl = 18 dirhams, quelle combinaison de quantités des deux biens le consommateur doit-il choisir ?
c- Déterminer les choix optimaux du consommateur sachant que Px = 2 dirhams, Py = 3 dirhams et que le revenu nominal est successivement égal à 15 dirhams et 9 dirhams.

**Solution de l'exercice n° 1 :**

a- L'utilité totale mesure la satisfaction que l'individu considéré pense éprouver en consommant un bien. Les utilités totales des biens X et Y sont représentées sur la figure 1, pour des quantités variant de 1 à 6 unités.
L'utilité marginale d'un bien mesure l'accroissement de l'utilité totale qui résulte de la consommation d'une unité supplémentaire du bien.
Considérons le bien X : pour x = 1 $\Rightarrow U_y = 10$ et pour x = 2 $\Rightarrow U_x = 18$.
Quand la quantité augmente d'une unité à partir de x = 1, l'utilité totale de X augmente d'une valeur $U_{mx} = \frac{\Delta U_x}{\Delta x} = \frac{18-10}{2-1} = 8$.
Le tableau suivant regroupe les valeurs des utilités marginales des deux biens, calculées comme précédemment pour le bien X entre x = 1 et x = 2.
Les utilités marginales des deux biens sont représentées sur la figure 1.
Remarque : la « loi de l'utilité marginale décroissante » est vérifiée pour chacun des deux biens : $U_{mx}$ et $U_{my}$ diminuent quand respectivement. x et y augmentent (pour le consommateur et pour chacun des biens, le gain de satisfaction est le moins en moins important au fur et à mesure que la quantité augmente).

Figure 1 : les utilités totales et marginales.




Les utilités marginales finissent par devenir nulles : $U_{mx} = 0$ pour $x = 6$ et $U_{my} = 0$ pour $y = 6$. L'annulation de l'utilité marginale de X, pour $x = 6$, signifie que le consommateur éprouve la même satisfaction ($U_x = 30$) en considérant la cinquième et la sixième unité de X : le passage de la cinquième à la sixième unité de X n'entraînant pas de gain de satisfaction, l'utilité totale plafonne et le consommateur atteint son niveau de satiété pour $x = 6$ (figure 1 : la courbe d'utilité totale passe par un maximum $U_x = 30$ pour $5 < x < 6$, en admettant la divisibilité).
Il en va de même pour y entre les valeurs $y = 5$ et $y = 6$.

b- Remarque préliminaire : les utilités des biens X et Y étant indépendantes, la satisfaction $U_{xy}$ que le consommateur associe à la combinaison (x, y) consommée est égale à la somme des utilités totales $U_x$ et $U_y$, soit : $U_{xy} = U_x + U_y$.
Les biens X et Y ayant le même prix ($P_x = P_y = 2$ dirhams), 2 dirhams de revenu permettent aussi bien d'acquérir une unité de X qu'une unité de Y, chacune de ces unités se différenciant de l'autre par l'utilité que leur reconnaît le consommateur.
Afin de choisir la combinaison (x, y) lui assurant le maximum d'utilité totale $U_{xy}$, le consommateur raisonne « à la marge » en comparant le gain de satisfaction attaché à chaque unité supplémentaire de chacun des deux biens. En d'autres termes, le consommateur compare les utilités marginales de X et de Y, soit respectivement $U_{mx}$ et $U_{my}$.
La première unité de bien choisie est une première unité de y à laquelle est associée une utilité marginale ($U_{my} = 12$) supérieure à celle qui est associée à une première unité de x ($U_{mx} = 10$). La deuxième unité choisie est encore une unité de y ; l'utilité marginale d'une deuxième unité de y ($U_{mx} = 11$) est en effet supérieure à celle d'une première unité de x ($U_{mx} = 10$). Tant que son revenu n'est pas totalement dépensé, le consommateur poursuit sa comparaison des utilités marginales associées aux unités supplémentaires successives

des deux biens et choisit celles qui présentent l'utilité marginale la plus élevée. La satisfaction totale est maximale quand $U_{mx} = U_{my}$.

$x = 4 \Rightarrow U_{mx} = 4 = U_{my}$ ☜ $y = 5$, pour une dépense de : 2(4 + 5) = 18 dirhams.

La satisfaction totale $U_{xy}$ ne peut qu'être maximale dans la mesure où elle est égale à la somme des utilités marginales des unités successives choisies des biens. Comme l'indique le tableau suivant, la combinaison (x = 4 ; y = 5) rapporte au consommateur une utilité totale maximale.

$U_{xy}$ 71 (en effet, $U_{xy} = U_x + U_y = \Sigma U_{mx} + \Sigma U_{my} = 28 + 43 = 71$.)

Unités successives de biens choisies par le consommateur

| x | $U_{mx}$ | y | $U_{my}$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1<sup>er</sup><br>2ème<br>3ème<br>4ème | 10<br>8<br>6<br>4 | 1er<br>2ème<br>3ème<br>4ème<br>5ème | 12<br>11<br>9<br>7<br>4 | |
| $\Sigma U_{mx}$ | 28 | $\Sigma U_{my}$ | 43 | $U_{xy} = \Sigma U_{mx} + \Sigma U_{my} = 28 + 43 = 71$. |

c- Les prix des biens étant différents, le consommateur doit comparer l'utilité marginale du bien X à l'utilité marginale du bien Y, pondérées par les prix.

La satisfaction est maximale lorsque l'utilité marginale du dirham dépensé pour le bien X est équivalente à l'utilité marginale du dirham dépensé pour Y, c'est-à-dire quand on égalise les utilités marginales pondérées par les prix.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_{mx}$ | 0 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 |
| $\frac{U_{mx}}{2}$ | 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $U_{my}$ | 0 | 12 | 11 | 9 | 7 | 4 | 0 |
| $\frac{U_{my}}{3}$ | 0 | 4 | 3,67 | 3 | 2,33 | 1,33 | 0 |

L'individu doit tenir compte de sa contrainte budgétaire, il ne peut effectuer son choix que parmi l'ensemble des combinaisons qui épuisent son revenu de 15 dirhams puis de 9 dirhams. Le tableau ci-dessous décrit l'ensemble de ces combinaisons possibles.

| R = 15 dirhams | | R = 9 dirhams | |
|---|---|---|---|
| x | y | x | y |
| 0 | 5 | 0 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 1 |
| 6 | 1 | -- | -- |

- Le revenu est égal à 15 dirhams :

Le consommateur choisit la combinaison de trois unités de X et de trois unités de Y puisque, pour x = y = 3, les utilités marginales pondérées des deux biens sont égales :

$\frac{U_{mx}}{P_x} = \frac{U_{my}}{P_y} = 3.$

L'utilité totale correspondante à la combinaison (x = 3, y = 3) est égale à la somme des utilités marginales des unités successivement choisies des biens, soit : 10 + 8 + 6 + 12 + 11 + 9 = 56.

- Le revenu est égal à 9 dirhams :

A l'équilibre, lorsque les quantités des biens considérés prennent des valeurs discrètes, l'égalité des utilités marginales pondérées n'est pas toujours vérifiée. Pour un revenu égal à 9 dirhams, la combinaison précédente qui égalisait les utilités marginales n'est plus possible.
Le consommateur peut envisager l'achat des combinaisons (x = 0, y = 3) et (x = 3, y = 1).
- L'utilité totale de trois unités de y est égale à la somme des utilités marginales pondérées des trois premières unités de Y, soit : 12 + 11 + 9 = 32.
- L'utilité totale de la combinaison de trois unités de X et d'une unité de Y est égale à la somme suivante des utilités marginales : 10 + 8 + 6 + 12 = 36.

Le consommateur choisit donc la combinaison (x = 3, y = 1) qui lui procure l'utilité totale la plus grande.

## EXERCICE 2 :

Les choix du consommateur et la demande individuelle d'un bien en fonction du revenu.

Un consommateur affecte la totalité de son revenu à l'achat de deux biens X et Y, divisibles et partiellement substituables. Le bien X est vendu au prix de $P_x$ =1 dirham, et le bien Y au prix unitaire $P_y$ = 0,5 dirham.
Afin d'exprimer ses préférences, le consommateur recense les combinaisons de quantités des deux biens qui peuvent être envisagées et le répartit par niveau de satisfaction. Un indice d'utilité est attribué à chacun de ces niveaux de satisfaction.
Le tableau suivant présente partiellement les préférences du consommateur en indiquant quelques-unes des combinaisons qui correspondent à cinq niveaux de satisfaction. x et y représentent respectivement le nombre d'unités de X et de Y et $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ et $U_5$ représentent les indices d'utilité, avec $U_1 < U_2 < U_3 < U_4 < U_5$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | x | 5 | 6 | 8 | 10 | 15 |
| | y | 32 | 25 | 17 | 10 | 5 |
| $U_2$ | x | 12 | 14 | 17 | 21 | 29 |
| | y | 35 | 25 | 16 | 8 | 5 |
| $U_3$ | x | 17 | 18 | 22 | 30 | 36 |
| | y | 46 | 36 | 26 | 16 | 12 |
| $U_4$ | x | 22 | 23 | 25 | 32 | 40 |
| | y | 55 | 48 | 40 | 29 | 22 |
| $U_5$ | x | 25 | 26 | 36 | 42 | 48 |
| | y | 66 | 58 | 42 | 34 | 29 |

a- Représenter graphiquement les courbes d'indifférence du consommateur et vérifier que l'équilibre du consommateur correspond bien au choix d'une combinaison de 10 unités de X et 10 unités de Y, pour un revenu nominal égal à 15 dirhams.
b- Comment la droite de contrainte budgétaire du consommateur se déplace-t-elle quand le revenu nominal augmente, cetéris paribus, en devenant successivement égal à 25 dirhams, 35 dirhams, 45 dirhams et 55 dirhams ?
c- Mettre en évidence l'évolution de l'équilibre du consommateur induite par ces augmentations successives du revenu nominal. Définir et représenter graphiquement la courbe de consommateur revenu.
d- Définir et représenter graphiquement la demande du bien X que le consommateur exprime en fonction de son revenu.

### Solution de l'exercice n° 2 :

a- Les cinq courbes d'indifférence tracées sur la figure 1 représentent une partie de la carte d'indifférence du consommateur.
Le revenu, affecté en totalité à l'achat des deux biens, est égal à la somme des dépenses en X et Y, soit : $R = x.\, P_x + y.\, P_y$.
Ou encore, en exprimant y en fonction de x :

$$y = -\frac{P_x}{P_y}x + \frac{R}{P_y}.$$

L'équation de la droite de contrainte budgétaire du consommateur est donc :

$$y = \frac{1}{0,5}x + \frac{15}{0,5} \quad \text{ou encore : } y = -2x + 30.$$

La droite B, (figure 1) est représentée à partir de deux de ses points : si x = 0 ⇒ y = 30, et si y = 0 ⇒ x = 15.

Figure 1 : L'équilibre du consommateur.

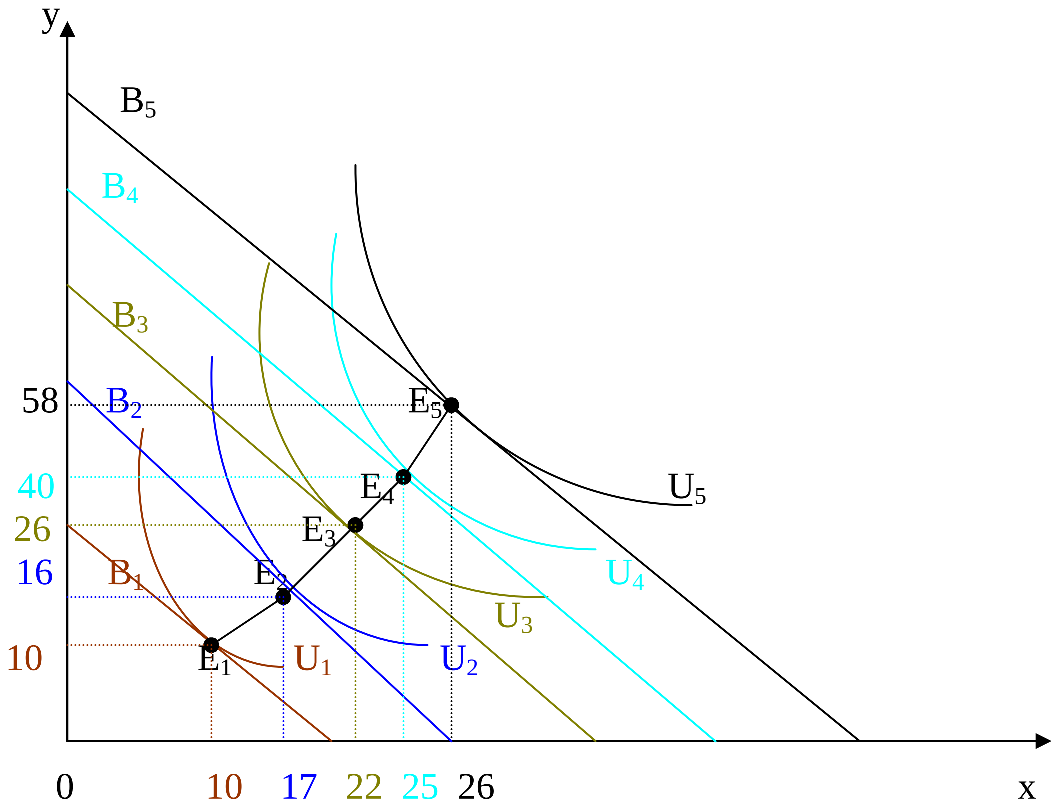
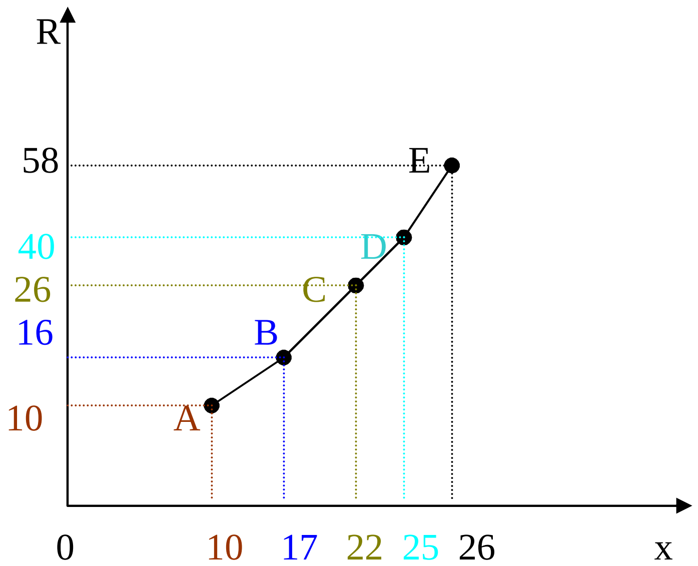



Figure 2: Demande individuelle d'un bien en fonction du revenu




x = f(R).

Le consommateur doit choisir une combinaison (x, y) correspondante à une dépense totale d'acquisition égale à 15 dirhams (hypothèse d'affectation de la totalité du revenu à l'achat

des deux biens). Graphiquement, cela revient à choisir l'un des points de la droite de contrainte budgétaire $B_1$ (les coordonnées des points de la droite vérifient son équation).
Tout en se situant sur la droite $B_1$, le consommateur cherche à atteindre la courbe la plus éloignée possible de l'origine, de façon à rendre sa satisfaction maximale. Le point $E_1$ (x = 10 ; y = 10) de « tangence » entre la droite $B_1$ et le courbe $U_1$ correspond bien à la solution d'équilibre du consommateur. Notons qu'à proprement parler, il ne s'agit pas ici d'un point de tangence, mais plus exactement du seul point de contact entre la droite de contrainte $B_1$ et la courbe polygonale d'utilité $U_1$ en l'un de ses sommets.

b- Toute augmentation du revenu nominal, ceteris paribus, entraîne un déplacement de la droite de contrainte budgétaire vers la droite, parallèlement à elle-même. En effet, en considérant l'équation générale d'une droite de contrainte budgétaire, $y = -\frac{P_x}{P_y}x + \frac{R}{P_y}$, on observe qu'une variation de R ne modifie pas la pente de la droite ($-\frac{P_x}{P_y}$), mais modifie l'ordonnée à l'origine ($\frac{R}{P_y}$) qui augmente avec R.

Quand le revenu prend successivement les valeurs 25, 35, 45 et 55, l'ordonnée à l'origine devient respectivement égale à : $\frac{25}{0,5} = 50$ ; $\frac{35}{0,5} = 70$ ; $\frac{45}{0,5} = 90$ ; $\frac{55}{0,5} = 110$.

Le tableau suivant indique :
- Les équations des droites de contrainte budgétaire obtenues sur les différentes valeurs du revenu ;
- Les coordonnées de deux des points de chacune des droites.

| Valeur du revenu R (en dirhams) | Droite | Equation | Coordonnées de deux des points |
|---|---|---|---|
| 25 | $B_2$ | y = -2x + 50 | (x=0, y=50) et (x=25, y=0) |
| 35 | $B_3$ | y = -2x + 70 | (x=0, y=70) et (x=35, y=0) |
| 45 | $B_4$ | y = -2x + 90 | (x=0, y=90) et (x=45, y=0) |
| 55 | $B_5$ | y = -2x + 110 | (x=0, y=110) et (x=55, y=0) |

Les droites de contrainte budgétaire $B_2$, $B_3$, $B_4$ et $B_5$, toutes parallèles à la droite $B_1$, sont représentées sur la figure 1.

c- L'augmentation du revenu nominal du consommateur entraîne une modification de la solution d'équilibre. Quand son revenu passe de 15 dirhams à 25 dirhams, le consommateur, qui est censé affecter la totalité de son revenu à l'achat des deux biens, choisit des quantités plus importantes de X et de Y. le point d'équilibre ne doit plus être l'un des points de la droite de contrainte budgétaire $B_1$, mais l'un des points de la droite $B_2$, qui tient compte de la nouvelle valeur du revenu, égale à 25 dirhams.
Le point $E_2$ (x = 17 ; y = 16) est le seul point de la droite $B_2$ qui correspond à la solution optimale. C'est en effet le point de la droite $B_2$ qui se situe sur la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine, soit la courbe $U_2$.

En bénéficiant de 10 dirhams de revenu supplémentaire (25 – 15 = 10 dirhams), le consommateur choisit 7 unités supplémentaires de X, 6 unités supplémentaires de Y et augmente sa satisfaction en passant du niveau d'utilité $U_1$ au niveau d'utilité $U_2$.
En raisonnant de la même manière pour les autres valeurs du revenu, on obtient les solutions présentées dans le tableau suivant :

| Valeur du revenu R (en dirhams) | Droite de contrainte budgétaire correspondante | Courbe d'indifférence la plus éloignée possible | Point d'équilibre |
|---|---|---|---|
| 15 | $B_1$ | $U_1$ | $E_1$ (x=10, y=10) |
| 25 | $B_2$ | $U_2$ | $E_2$ (x=17, y=16) |
| 35 | $B_3$ | $U_3$ | $E_3$ (x=22, y=26) |
| 45 | $B_4$ | $U_4$ | $E_4$(x=25, y=40) |
| 55 | $B_5$ | $U_5$ | $E_5$(x=26, y=58) |

La courbe de consommation revenu est le lieu géométrique des points d'équilibre obtenus lorsque le revenu du consommateur augmente, alors que ses goûts et le prix des biens ne varient pas. Dans ce cas, pour les montants considérés du revenu, la courbe de consommation revenu peut être représentée par une ligne brisée formée des segments $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ et $E_5$.

d- Toutes choses égales par ailleurs, l'augmentation du revenu nominal entraîne une modification de l'équilibre du consommateur. En tenant compte des préférences du consommateur et du prix constant des biens, on peut associer à chaque valeur du revenu une quantité x choisie du bien X, qui, combinée à une quantité y de Y, permet au consommateur de maximiser sa satisfaction.
On peut donc associer :
- A un revenu R = 15 dirhams $\Rightarrow$ une quantité désirée de X égale à 10 unités, soit : x = 10.
- A un revenu R = 25 dirhams $\Rightarrow$ une quantité désirée de X égale à 17 unités, soit : x = 17.
- A un revenu R = 35 dirhams $\Rightarrow$ une quantité désirée de X égale à 22 unités, soit : x = 22.
- A un revenu R = 45 dirhams $\Rightarrow$ une quantité désirée de X égale à 25 unités, soit : x = 25.
- A un revenu R = 55 dirhams $\Rightarrow$ une quantité désirée de X égale à 26 unités, soit : x = 26.

Le tableau suivant illustre la relation que le consommateur établit entre le montant R de son revenu nominal et la quantité du bien X qu'il demande.

| Demande du bien X en fonction du revenu, toutes choses égales par ailleurs. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |
| R : Revenu en dirhams | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| X : Nombre d'unités de X demandées. | 10 | 17 | 22 | 25 | 26 |

La courbe de demande individuelle du bien X en fonction du revenu est représentée sur la figure 2 disposée sous la figure 1.
- L'axe des ordonnées est consacré au revenu R ;

- La quantité x est portée sur l'axe des abscisses avec la même échelle que celle qui est portée sur l'axe des abscisses sur la figure 1.
- Les unités de X entrant dans les combinaisons optimales successives sont associées aux différentes valeurs du revenu en fonction desquelles ces équilibres sont déterminés.
- On remarque que la quantité demandée du bien X est une fonction croissante du revenu.

## EXERCICE 3 :

L'élasticité revenu de la demande.

Considérons la demande du bien X exprimée en fonction du revenu du consommateur, toutes choses égales par ailleurs, telle qu'elle a été obtenue dans l'application 2 et 3. Le tableau suivant indique les coordonnées des points connus de la courbe représentative de la demande.

Demande du bien X en fonction du revenu.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| R : revenu en dirhams | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| X : nombre d'unités de X demandées | 10 | 17 | 22 | 25 | 26 |
| | (A) | (B) | (C) | (D) | (E) |

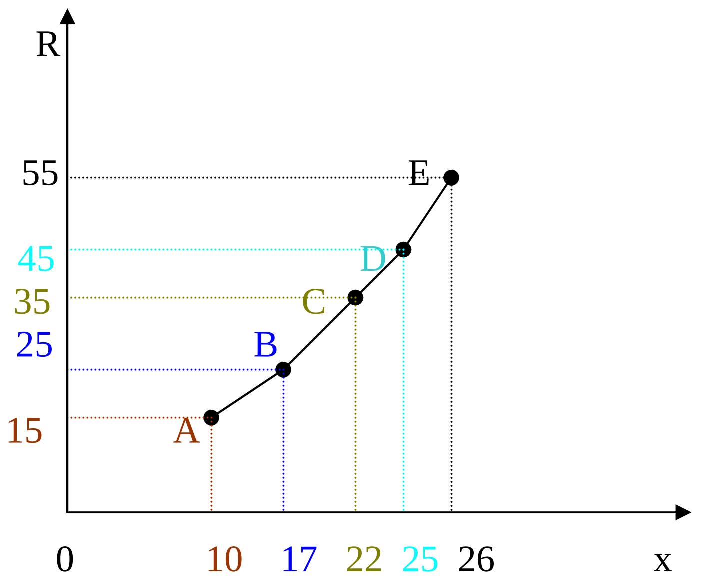
a- Représenter graphiquement la courbe de demande du bien X.
b- Mesurer l'élasticité revenu de la demande entre les points A, B, C, D et E de sa courbe représentative. Commenter.

**Solution de l'exercice n° 3 :**

a- La courbe de demande individuelle du bien x en fonction du revenu est représentée sur la figure 1.
- Le revenu R est porté sur l'axe des ordonnées.
- La quantité x est portée sur l'axe des abscisses.

La quantité demandée x est une fonction croissante du revenu.
Le calcul de l'élasticité revenu de cette demande permet d'illustrer cette remarque et de la préciser.

Figure 1 : Demande individuelle en fonction du revenu




x = f(R).

b- L'élasticité revenu de la demande mesure le degré de réaction de la demande à une variation du revenu du consommateur, entre deux points d'une courbe de demande, elle est égale au rapport suivant : $er = \dfrac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta R}{R}}$.

Avec $\dfrac{\Delta x}{x}$ : variation relative de la quantité demandée de x.

$\dfrac{\Delta R}{R}$ : Variation relative du revenu R.

Remarque : le coefficient d'élasticité variant le long d'une courbe de demande, sa mesure entre deux points de la courbe n'a de signification que si les points sont peu éloignés l'un de l'autre (petits accroissements du revenu).

Calculant l'élasticité revenu entre les points connus de la courbe de demande du consommateur.

Entre les points A(R = 15 ; x = 10) et B(R = 25 ; x = 17) (figure 1).

$er = \dfrac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta R}{R}}$ Avec $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{17-10}{10} = \dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{25-15}{15} = \dfrac{2}{3}$.

On obtient : $er = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{21}{20} = 1{,}05$.

En procédant de la même manière entre les points B et C, C et D, D et E, on obtient les résultats suivants :

- Entre B et C, er = 0,74 ;
- Entre C et D, er = 0,48 ;
- Entre D et E, er = 0,18.

La valeur de l'élasticité revenu permet de définir la catégorie de biens à laquelle appartient le bien considéré, pour un niveau donné du revenu.

- L'élasticité revenu est toujours positive : la demande du bien augmente avec le revenu du consommateur.
- Entre les points A et B, le revenu augmente de 15 dirhams à 25 dirhams, er = 1,05, la quantité demandée croit proportionnellement plus que le revenu du consommateur, le bien X peut être classé dans la catégorie des « biens de luxe ».
- Entre les points B, C, D et E de la courbe de demande, 0 < er <1. la quantité demandée croit proportionnellement moins que le revenu, le bien X devient un « bien normal ».

## EXERCICE 4 :

La production en courte période et la loi des rendements décroissants.

En courte période, la production totale d'une entreprise varie en fonction du nombre d'unités employées du facteur travail (L), selon la relation : $PT = -L^3 + 10L^2 + 32L$.

L'équipement utilisé et la technique de production ne peuvent être pendant la période considérés.

a- Calculer et représenter sur un graphique le PT, le PM et Pm du travail, pour L variant de 1 à 9.

b- Analyser la forme de la courbe de PT.

c- Analyser la forme des courbes de PM et de PmL et expliquer leurs positions respectives.

d- Cette entreprise est-elle soumise à la loi des rendements décroissants ?

e- Déterminer la phase de production rationnelle de l'entreprise.

**Solution de l'exercice n° 4 :**

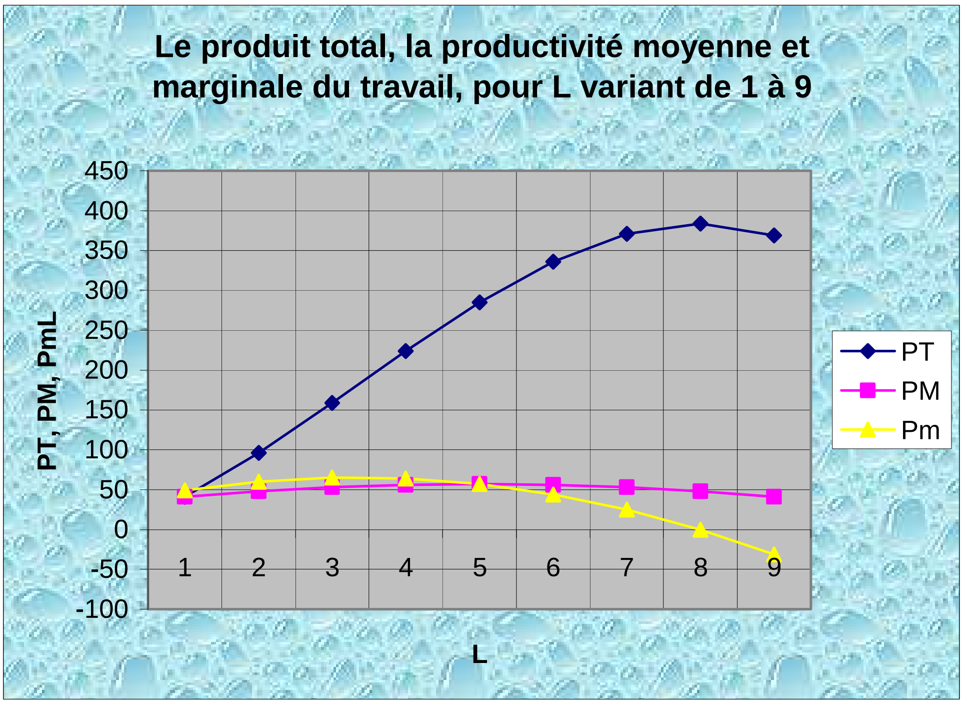
a- le calcul et la représentation de PT, PM, et Pm :

- Calcul du produit total : le tableau suivant présente les valeurs prises par le produit total pour L variant de 1 à 9. Ces valeurs sont en remplaçant l par ses valeurs successivement dans la fonction : $PT = -L^3 + 10L^2 + 32L$, alors pour L = 1 : PT = 1 + 10 + 32 = 41 ; pour L = 2 : PT = -8 + 40 + 64 = 96 etc.

- Calcul du produit moyen : $PM = \frac{PT}{L} = -L^2 + 10L + 32$. Pour L = 1 : PM = -1 + 10 + 32 = 41 ; pour L = 2 : PM = -4 + 20 + 32 = 48 etc.

- Calcul du produit marginal : $PmL = PT' = \frac{dPT}{dL} = -3L^2 + 20L + 32$. pour L = 1 : PmL = -3 + 20 + 32 = 49 ; pour L = 2 : PmL = -12 + 40 + 32 = 60 etc.

| L | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PT | 41 | 96 | 159 | 224 | 285 | 336 | 371 | 384 | 369 |
| PM | 41 | 48 | 53 | 56 | 57 | 56 | 53 | 48 | 41 |
| Pm | 49 | 60 | 65 | 64 | 57 | 44 | 25 | 0 | -31 |




b- Forme de la courbe de PT :

L'analyse de la courbe de produit total impose l'étude des dérivées premières et secondes de la fonction de PT.

* Etude de la dérivée première PT' (L) = $\frac{dPT}{dL}$.

PmL = $-3L^2 + 20L + 32$.

PmL est une fonction du 2$^{ème}$ degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$. le signe de ce trinôme dépend du signe de son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. Or b = 2b' = 10×2, donc $\Delta'^2 = b'^2 - ac = 10^2 - (-3)\times 32 = 196$ et donc $\sqrt{\Delta'} = 14$.

$\Delta' > 0$ donc PmL s'annule pour les valeurs $L_1$ et $L_2$ :

$$L_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-10+14}{-3} = \frac{4}{-3} = -1{,}33\langle 0.$$

$$L_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-24}{-3} = 8\rangle 0.$$

On a donc : PmL > 0, pour -1,33 < L < 8.

Et PmL < 0, pour L < -1,33 et L > 8.

* Etude de la dérivée seconde de PT :

- PT'' = PmL' = $(-3L^2 + 20L + 32)' = -6L + 20$.

- PmL' = $\Rightarrow$ L = $^{20}\!/_{6}$ = 3,33.

- PmL' > 0 $\Rightarrow$ -6L + 20 > 0 $\Rightarrow$ L < 3,33.

- PmL' < 0 $\Rightarrow$ -6L + 20 < 0 $\Rightarrow$ L > 3,33.

| L | $-\infty$ … $-3{,}33$ | $-3{,}33$ … $0$ | $0$ … $3{,}33$ | $3{,}33$ … $8$ | $8$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| PT'' = PmL' = $\frac{d^2PT}{dL^2}$ = -6L +20 | + | + | + | - | - |
| PT' = PmL = $\frac{dPT}{dL}$ = $-3L^2 + 20L + 32$ | - | + | + | + | - |
| PT = $-L^3 + 10L^2 + 32L$. | - | + | + | - | - |

- PmL est croissante pour 0 < L < 3,33 (PmL' > 0).
- Elle est croissante pour L > 3,33 (PmL' < 0).
- Elle est maximum pour L = 3,33 (PmL' = 0) et non pour L = 3 comme le suggère le tableau qui prend en compte que les valeurs entières de L.
- Pour les valeurs de L entre L = 0 et L = 3,33 le PT est croissant à taux croissant puisque PmL est positif et croissant.
- Pour L = 3,33 ; PT = 180,52. Il s'agit des coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe PT, c'est-à-dire un point à partir duquel la courbure de la courbe PT change de sens. N effet, pour L = 3,33, PT'' = PmL' = 0 et PT' = PmL ne change pas de signe (PmL > 0).
- Pour les valeurs de L entre L = 3,33 et L = 8, le PT croissant à tux décroissant puisque PmL est positif et décroissant (PmL' < 0). Pour L = 8, le PT est maximal : les deux conditions d'existence d'un maximum sont en effet réunies PmL = 0 et PmL' < 0.
- Pour L > 8, le PT est décroissant puisque la PmL est négative.

c- Forme de la courbe de PM et PmL :

On observe qu'à partir de la figure 1 que :
- Les deux courbes PM et PmL présentent chacune un maximum : max {PM} = 57 pour L = 5 et max {PmL} = 65 pour L = 3.
- La courbe de PmL coupe la courbe de PM en son maximum pour L = 5.
- Tant que la courbe PmL est située au dessus de la courbe PM, cette dernière est croissante ; dés que la courbe PmL est située au dessus de la courbe PM, après L = 5, la courbe PM est décroissante.

On peut expliquer la forme de la courbe de PM et déterminer qu'elle est coupée en son maximum par la courbe de PmL.

PM = $\frac{PT}{L}$ = $-L^2 + 10L + 32$.

- L'analyse de cette fonction passe par l'étude du signe de sa dérivée PM' (L) = $\frac{dPM}{dL}$ = -2L + 10.
- On a PM' = 0 $\Rightarrow$ -2L + 10 = 0 $\Rightarrow$ L = 5.
- PM' > 0 $\Rightarrow$ L < 5.

- PM’ < 0 $\Rightarrow$ L > 5.

De ses résultats on peut déduire que :

- Pour 0 < L < 5, le PM est croissant (PM’ est positif).
- Pour L > 5, le PM est décroissant (PM’ est négative).
- Pour L = 5, le PmL ne croit plus et ne décroît pas non plus, il passe par un maximum (PM’ = 0 et PM’’ = -2 est toujours négatives).

* Explication des positions respectives des courbes PM et PmL.

- Une telle explication peut être menée en reprenant l’étude de la forme de la courbe PM à partir de l’analyse de la fonction dérivée de la fonction du produit moyen : PM’ (L).

- PM = $\frac{PT}{L}$ .

- PM’ = $\frac{d\left(\frac{PT}{L}\right)}{dL}$.

- Il s’agit de la dérivée d’une fonction composée de la forme : y = $\frac{u}{v}$.

Soit : y’ = $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

On peut donc écrire : PM’ = $\frac{\frac{dPT}{dt}\times L - PT\times\frac{dL}{dL}}{L^2}$.

Soit : PM’ = $\frac{LPmL-PT}{L^2}$ = $\frac{PmL}{L}-\frac{PT}{L^2}$ = $\frac{1}{L}(PmL-\frac{PT}{L})$= $\frac{1}{L}(PmL-PM)$.

- Etudier le signe de PM’ revient à étudier le signe de (PmL – PM).

- PmL – PM > 0 $\Rightarrow$ PM’ > 0 : vérifier si PmL > PM tant que le PmL > PM, ce dernier croit (PM’ > 0).
- PmL – PM < 0 $\Rightarrow$ PM’ < 0 : vérifier si PmL < PM. Dès que PmL < PM, ce dernier décroît (PM’ < 0).
- PmL – PM = 0 $\Rightarrow$ PM’ = 0 : vérifier si PmL = PM tant que PmL = PM, ce dernier atteint son maximum (PM’ = 0) (pour L = 5, PmL = PM = 57).

d- Cette entreprise est soumise à la loi des rendements décroissants :

- D’une part, les conditions d’existence de la loi réunies. La production de l’entreprise considérée, en courte période, est caractérisée par un état constant de la technique, un facteur de production fixe (équipements constants) et facteur de production variable (travail).
- D’autre part, on démontré et l’on peut observer sur la figure 1 qu’à partir de l’emploi de 3 unités du travail (plus exactement à partir de L = 3,33) la productivité marginale physique du travail décroît jusqu’à devenir négative pour L > 8.

e- La phase de production rationnelle de l’entreprise :

L’entrepreneur rationnel n’envisage que les combinaisons techniquement efficientes de facteurs de production.

- Soit l'élasticité de la production par rapport au facteur variable employé, le travail : e $= \frac{\frac{\Delta PT}{PT}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \times \frac{L}{PT}$.

- On considère $\Delta L \longrightarrow 0$, on peut écrire :

$$e = \frac{dPT}{dL} \times \frac{L}{PT} = \frac{\frac{dPT}{dL}}{\frac{PT}{L}} = \frac{PmL}{PM}.$$

On sait que $\frac{dPT}{dL} = PmL$ et $\frac{PT}{L} = PM$.

-Pour L > 8 $\Rightarrow$ e < 0 (e = -0,76) : la productivité marginale du travail est négative et le produit total est décroissant. Pour tout L > 8, l'entrepreneur peut augmenter la quantité qu'il produit en réduisant l'emploi du travail ; la production est donc techniquement inefficiente à l'intérieur de cette phase.

- Pour 0 < L < 5 $\Rightarrow$ e > 1, car PmL > PM : la production croissante proportionnellement plus que le travail employé, il serait irrationnel pour le producteur de se situer à l'intérieur de cette phase de production.

- Le producteur ne peut donc se situer qu'à l'intérieur d'une phase de production définie pour un travail compris entre 5 et 8 unités. Cette phase est caractérisée par une élasticité de la production par rapport au travail positive (PmL > 0 et PM> 0) et inférieur à 1 (PmL < PM).

Elle comprend à la courbe de productivité marginale du travail dans sa partie décroissante, positive et inférieure au maximum du produit moyen.

## EXERCICE 5 :

### La production en langue période

La production totale d'une entreprise, exprimée en nombre d'unités produites, est obtenu en combinant deux facteurs de production divisibles, adaptables et partiellement substituables : le travail (L) et le capital (K).

En langue période, l'entreprise peut obtenir un volume de production constant en associant différentes quantités des deux facteurs, la tableau suivant présente quelques-unes des combinaisons d'unités du travail et d'unités du capital relatives à trois volumes de production : PT = (40, 60, 80).

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PT = 40 | L | 8 | 16 | 20 | 25 | 40 | 64 | 100 | 200 | |
| | K | 200 | 100 | 80 | 64 | 40 | 25 | 16 | 8 | |
| PT = 60 | L | 20 | 25 | 40 | 50 | 60 | 75 | 96 | 120 | 150 |
| | K | 180 | 144 | 90 | 72 | 60 | 48 | 37,5 | 30 | 24 |
| PT = 80 | L | 40 | 50 | 64 | 80 | 100 | 128 | 160 | 200 | |
| | K | 160 | 128 | 100 | 80 | 64 | 50 | 40 | 32 | |

a- Représente sur un graphique les trois isoquants correspondants au tableau précédent. Commenter (L porté sur l'axe des abscisses et K porté sur l'axe des coordonnées).

b- Définir la notion de taux marginal de substitution technique du travail au capital ($TMST_{LK}$). Comment évolue-t-il le long d'un isoquant ?

c- Le capital et le travail ayant le même prix unitaire : PK = PL = 20, quelle est la solution d'équilibre du producteur qui désir optimiser sa production pour un coût de production égale au budget dont il dispose, soit $C_2$ = 2400.

d- Le prix des facteurs de production n'étant pas modifié, déterminer, à partir des données disponibles, la solution optimale du producteur qui désir produire 60 unités de produit en supportant un coût minimal.

e- Sachant que la fonction de production de l'entreprise est : $PT = L^{0,5} K^{0,5}$, avec L>= 0 et K>= 0, calculer la valeur de TMST au point d'équilibre précédemment déterminé.

f- On considère deux autres valeurs nominales possibles du budget du producteur : $C_1$ = 1600 et $C_3$ = 3200.

* Déterminer graphiquement les solutions d'équilibre qui correspond aux $C_1$ et $C_3$ du budget.

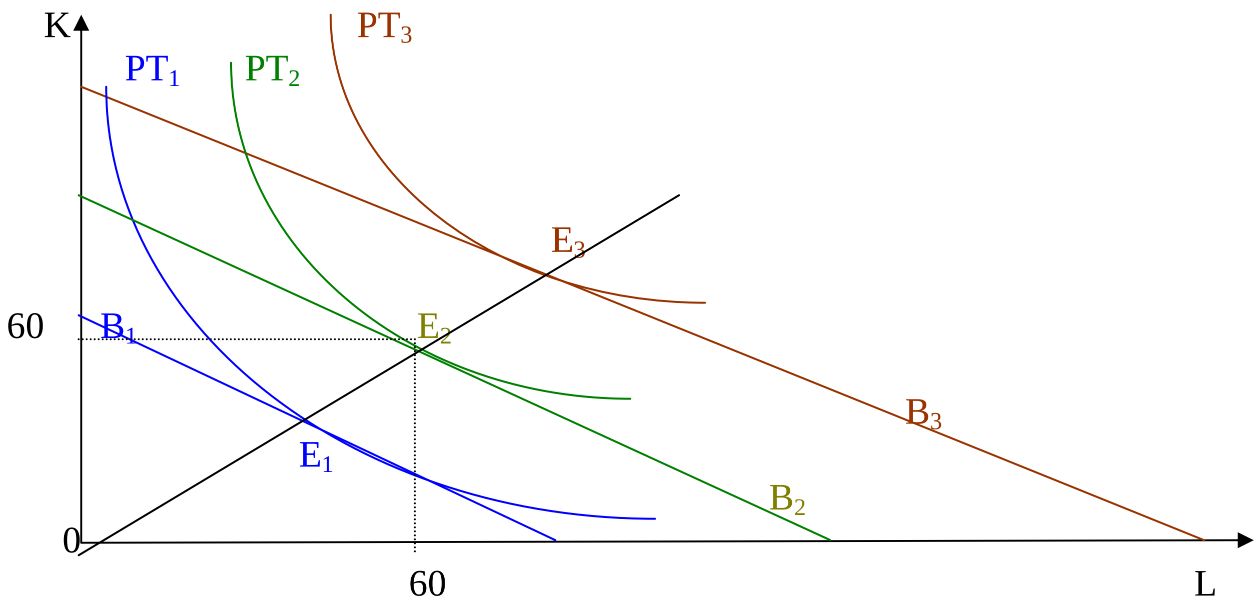
* Déterminer mathématiquement la solution d'équilibre déterminée pour $C_1$ du budget.

g- Définir la notion de sentier d'expansion de l'entreprise et déterminer son équation.

h- Les rendements d'échelle de cette entreprise sont-ils constants ?

**Solution de l'exercice n° 5 :**

a- Le graphique est le suivant :




- Chaque isoquant est le lieu géométrique des points représentant les différentes combinaisons de quantités des deux facteurs L et K (coordonnées des points) qui permettent d'obtenir un même niveau de production.
Les isoquants présentent les caractéristiques suivantes :
- Plus un isoquant est éloigné de l'origine, plus le volume de production auquel il correspond est important.
- Les isoquants ne peuvent pas se couper : deux isoquants représentent deux ensembles de couples (L, K) de deux volumes de production. S'ils se coupaient, deux volumes de production différents correspondaient à une même combinaison de facteurs, ce qui est impossible.
- Les isoquants sont décroissants ou, plus exactement, seule la partie décroissante des isoquants est considérée par le producteur rationnel. En effet, le respect de l'efficience technique impose que les productivités marginales soient strictement positives ($PmL > 0$ et $PmK > 0$) ; le producteur doit pouvoir obtenir une augmentation du volume de production en employant des quantités croissantes de l'un ou de l'ensemble des facteurs. Le long d'un isoquant, qui correspond à un volume de production constant, l'augmentation de la quantité employée de l'un des facteurs doit nécessairement être compensée par la diminution de l'emploi de l'autre facteur. La partie croissante d'un isoquant doit être écartée puisqu'elle indique qu'un volume constant de production est obtenu pour des quantités croissantes des deux facteurs (utilisation inefficiente de K et L).
Un isoquant, défini de façon continue, admet donc en chacun de ses points une tangente dont la pente est négative ($\frac{dK}{dL} < 0$).
- Les isoquants sont convexes, les facteurs K et L étant partiellement substituables. Le déplacement de haut en bas le long d'un isoquant (substitution du travail au capital) traduit le nécessaire abandon d'une quantité de plus en plus petite de capital par unité supplémentaire de travail.

b- Voir le cours.

c- Le producteur doit réaliser la production totale maximale pour un coût $C_2$ donné. Il doit, pour cela tenir compte des prix des facteurs établis sue les marchés des facteurs, sont égaux : PK = PL = 20, avec $C_2 = PK\times K+PL\times L = 2400$.

- Cette égalité peut être présentée sous le forme : K = $-\dfrac{PL}{PK}L+\dfrac{C_2}{PK}$.

- K = $\dfrac{-20L}{20}+\dfrac{1200}{20}=-L+120$.

- On peut retenir deux points de cette droite : pour L = 0 $\longrightarrow$ K = 120 ; et pour K = 0 L = 120.$\longrightarrow$

- La droite $B_2$ voir figure 2) passe pat les points de coordonnées (L = 0, K = 120), et (L = 120, K = 0).

- Le producteur doit : choisir l'une des combinaisons (L, K) imposant une dépense égale à $C_2$ : il doit donc se situer sur le droite $B_2$. Et obtenir le volume de production le plus grand possible, donc se situer sur l'isoquant le plus éloigné possible de l'origine.

La seule décision compatible avec ces deux impératifs correspond au point de « tangence » qui existe entre la droite $B_2$ et la deuxième isoquant (PT = 60) : le point $E_2$ n'est pas proprement parler un points de tangente. Il est le point de contact entre $B_2$ et l'isoquant PT = 60 : $E_2$ a pour coordonnées L = K = 60.

d- Si le producteur s'attache à produire 60 unités du produit, il doit obligatoirement choisir l'une des combinaisons (L, K) correspondant à l'un des points du 2ème isoquant. La combinaison de facteurs la moins coûteuse correspond au budget C le plus possible.

On peut déterminer analytiquement le point d'équilibre du producteur. En effet, on ne connaît pas l'équation du facteur de production, mais seulement quelques points. On doit donc déterminer par une méthode graphique le point où l'isoquant est tangent à la droite d'isocoût.

On observe sue la figure 2 que :

- Toutes droites situées à gauche de la droite $B_2$ ne correspondant pas aux combinaisons (L, K) qui permettent d'atteindre la production, PT = 60.

- Toutes les droites situées à droite de $B_2$ présentent des points communs avec l'isoquant PT = 60 mais ne peuvent déterminer la solution optimale. Les dépenses auxquelles ces droites correspondent sont, effet, toutes supérieures au budget $C_2$.

-La droite $B_2$ est la seule qui corresponde à la solution optimale en son point de « tangence » $E_2$ avec la deuxième isoquant PT = 60.

e- La valeur du $TMST_{LK}$ au point d'équilibre peut être calculé de différentes façons.

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir de la dérivée de la fonction de l'isoquant, en point d'équilibre $E_2$. On a PT = $L^{1.5}$ $K^{0.5}$ $=\sqrt{L}\sqrt{K}$ .

$$\Rightarrow PT^2 = L.K \Rightarrow K = \frac{PT^2}{L} = \frac{60^2}{L} = \frac{3600}{L.}.$$

$$\text{Or, } TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = -\left(\frac{3600}{L}\right)' = -\left(-\frac{3600}{L^2}\right) = -\left(-\frac{3600}{60^2}\right) = 1.$$

Car on sait que : $\left(\dfrac{a}{x'}\right)=\dfrac{-a}{x^2}$.

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir du rapport des prix des facteurs :

La valeur de la pente de $B_2 = \frac{-PL}{PK} = \frac{-20}{20} = -1.$

Or ; $TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = -\left(\frac{-PL}{PK}\right) = -(-1) = 1.$

- Calcul de $TMST_{LK}$ à partir des productivités marginales de facteurs :

$TMST_{LK} = \frac{-dK}{dL} = \frac{PmL}{PmK}.$

On rappelle que $(ax^{0,5})^1 = 0,5\ ax^{0,5-1}$.

Donc : $PmL = \frac{dPT}{dL} = 0,5.L^{-0,5}K^{0,5}.(1)$

$PmK = \frac{dPT}{dL} = 0,5.L^{-0,5}K^{0,5}.(2)$

D'où au point $E_2$ : K = 60 et K = 60, on a : $TMST_{LK} = \frac{(1)}{(2)} = \frac{K^{0,5}.K^{0,5}}{L^{0,5}.L^{0,5}} = \frac{K}{L} = \frac{60}{60} = 1.$

f- L'effet de la modification du budget de production sur la solution d'équilibre.

* L'équation générale de ces droites étant : $K = -L + \frac{C}{20}$, on obtient :

- Pour $C_1$ = 1600 : $K = -L + \frac{1600}{20} = -L + 8$. Équation de $B_1$ dont deux points ont pour coordonnées (L = 0, K = 80) et (L = 80, K = 0).
- Pour $C_3$ = 3200, $K = -L + \frac{3200}{20} = -L + 160$. Équation de $B_1$ dont deux points ont pour coordonnées (L = 0, K = 160) et (L = 160, K = 0).

g- Le sentier d'expansion de l'entreprise :

En reliant les points d'équilibre $E_1$, $E_2$ et $E_3$, on obtient le sentier d'expansion OS de l'entreprise (voire la figure).

- Le sentier d'expansion est une droite passant par l'origine dont l'équation est de la forme K = a.L. la valeur de la pente (a = $\frac{K}{L}$ ) peut être calculée à partir des coordonnées de l'un des points de la droite OS. Au point $E_1$ (40, 40), on obtient :

$a = \frac{K}{L} = \frac{40}{40} = 1 \Rightarrow$ l'équation du sentier d'expansion est donc K = L.

- En chaque point de cette droite, l'égalité suivante est vérifiée :

$a = \frac{K}{L} = 1 = TMST_{LK} = \frac{PL}{PK} = \frac{PmL}{PmK}.$

- Le sentier indique que le rapport de quantités utilisées de facteurs ($\frac{K}{L}$) n'est pas modifiée quand l'entreprise accroît sa production en même temps que sa taille.

h- Le rendement d'échelle :

- Le rendement d'échelle exprime le rapport entre l'accroissement proportionnel des facteurs de production et l'accroissement induit da la production.
- On a : $PT = \sqrt{K.L}$ = a.PT = $a\sqrt{K.L}$ .

Le produit total lui-même multiplié par le constant « a », la fonction de production est homogène linéaire et les rendements d'échelle sont constants.

La dernière figure met en évidence ce résultat :

* Considérons le passage du produit total d'équilibre $E_1$ au $E_2$, le long du sentier OS. La quantité employée de chacun des deux facteurs a été multipliée par 1,5 et le volume de production également.
Pour $E_1$ : L = K = 40 et PT = 40 et ;
Pour $E_2$ : $L = K = 40 \times 1{,}5 = 60$ et $PT = 40 \times 1{,}5 = 60$.
La production augmente donc dans la même production que les facteurs.
* De même, pour le passage du point $E_1$ au point $E_3$ :
Pour $E_1$ : L = K = 40 et PT = 40 et ;
Pour $E_3$ : $L = K = 40 \times 2 = 8$ et $PT = 40 \times 2 = 80$.

## EXERCICE 6 :

### LES COUTS DE L'ENTREPRISE EN COURTE PERIODE

En courte période, le coût variable total d'une entreprise varie (CVT) en fonction de la quantité produite (Q), selon la relation $CVT = Q^3 - 10Q^2 + 50Q$. L'entreprise considérée supporte aussi un coût fixe CF = 72.

a- Calculer et représenter sur un graphique le coût total, le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen dans l'entreprise. Pour les valeurs de la quantité comprise entre 0 et 9 unités.

b- Commenter la forme de la courbe du coût total dans l'entreprise et vérifier l'existence d'un point d'infection.

c- Expliquer les positions respectives de la courbe du coût marginal et du coût moyen de l'entreprise.

d- Après avoir analyser les positions respectives des courbes du coût variable marginal et du coût moyen de l'entreprise, analyser une position respective des courbes du coût marginal et du coût variable marginal.

**Solution de l'exercice n° 6 :**

a- Le coût total est égal à la somme du coût fixe total et du coût variable total : $CT = CF + CVT = Q^3 - 10Q^2 + 50Q + 72$.

Les valeurs du cou^t total, pour Q variante de 1 à 9 unités (voir tableau), sont calculées comme suit ; par exemple :

Pour $Q = 1 \Rightarrow CT = 1 - 10 + 50 + 72 = 113$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow CT = 8 - 40 + 100 + 72 = 140$ ; etc.

Le coût moyen (CM) est le coût supporté par unité de produit. Il est égal au coût total divisé par la quantité produite.

Les valeurs du coût moyen, pour L variant de 1 à 9 unités (voir tableau), sont calculées comme suit, par exemple :

Pour $Q = 1 \Rightarrow CM = 1 - 10 + 50 + 72 = 113$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow CM = 4 - 20 + 50 + 36 = 70$, etc.

Le coût marginal (Cm) est égal à la dérivée de la fonction de coût total par rapport à la quantité produite et correspond à l'expression de la pente de la tangente à la courbe de coût total en chacun de ses points.

Rappelons qu'une de la forme « $y = ax^3 + bx^2 + cx$ » admet pour fonction dérivée : $y' = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$.

On a donc : $Cm = \frac{dCT}{dQ} = 3Q^2 - 20Q + 50$.

Alors : Pour $Q = 1 \Rightarrow Cm = 3 - 20 - 50 = 33$.

Pour $Q = 2 \Rightarrow Cm = 12 - 40 + 50 = 22$. Etc.

Le coût variable moyen (CVM) est le coût variable supporté par unité produite. Il est égal au coût variable total divisé par la quantité produite :

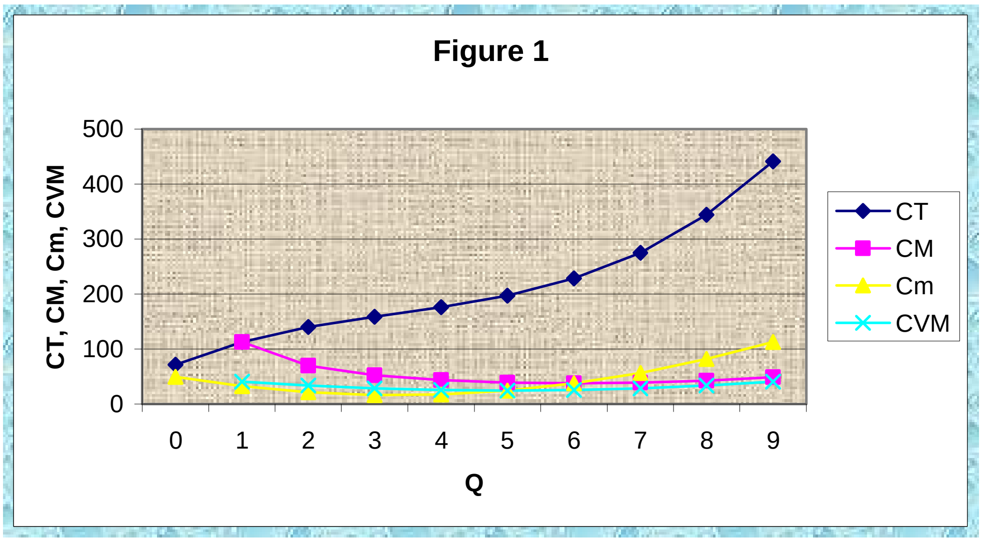
Les différentes valeurs du coût variable moyen (voir tableau) sont calculées comme suit :

Pour Q = 1 ⇒ CVM = 1 – 10 + 50 = 41.
Pour Q = 2 ⇒ CVM = 4 – 20 + 50 = 34.

Les valeurs CT, CM, Cm ET CVM, pour L variant de 1 à 9 sont représentées dans le tableau suivant :

| Q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CT | 72 | 113 | 140 | 159 | 176 | 197 | 228 | 275 | 344 | 441 |
| CM | -- | 113 | 70 | 53 | 44 | 39,4 | 38 | 39,29 | 43 | 49 |
| Cm | 50 | 33 | 22 | 17 | 18 | 25 | 38 | 57 | 82 | 113 |
| CVM | -- | 41 | 34 | 29 | 26 | 25 | 26 | 29 | 34 | 41 |

Les courbes CT, CM, Cm et CVM sont représentés sur la figure 1 :




b- Analyse de la courbe de coût total représentée sur la figure 1 :
Le coût total est une fonction croissante de la quantité produite. Une analyse plus précise de la fonction de coût total doit s'appuyer sur l'étude de sa dérivée, qui est aussi égale à la fonction de coût marginal de l'entreprise.
A partir de la figure 1, on peut faire les observations suivantes :
- Pour 0 < Q < 3 : le coût marginal est positif et décroissant : le coût total croit (Cm > 0) à taux décroissant (Cm décroît).
- Pour Q > 3 : le coût marginal est positif et croissant : le coût total croit (Cm>0) à taux croissant (Cm croît).
- Au point I (Q = 3 ; CT = 159), la concavité de la courbe de coût total change de sens, le point I est donc point d'inflexion.

Vérification de l'existence du point d'inflexion I :
Au point d'inflexion, la dérivée seconde de la fonction de coût total doit être nulle et sa dérivée première ne doit pas changer de signe.
La dérivée première de la fonction de coût total est égale au coût marginal (Cm).
La dérivée seconde de la fonction de coût total (CT'') est donc égale à la dérivée de la fonction de coût (Cm').

$Cm = 3Q^2 – 20Q + 50$, donc $Cm' = 6Q – 20$.

On peut écrire : $CT'' = Cm' = 0 \Rightarrow 6Q – 20 = 0$, soit $6Q = 20$ d'où $Q = \frac{20}{6} = 3{,}33$.

La dérivée première $CT' = Cm = 3Q^2 – 20Q + 50$ est toujours positive.
Rappel : un trinôme de deuxième degré « $y = ax^2 + bx + c$ » est toujours du signe de « a » si son discriminant est négatif.
On peut calculer le discriminant réduit Δ' du trinôme considéré, puisque : b = -20 = 2b' ; donc : b' = 10.
Soit : $\Delta' = b'^2 – ac = 100 – (3\times50) = -50$, donc $\Delta' < 0 \Rightarrow Cm > 0$, car a = 3 est positif.
Pour $Q = \frac{10}{3}$ , CT'' = 0 et CT' ne change pas de signe ; le point I, de coordonnées $Q = \frac{10}{3}$ et CT = 164,59, est un point d'inflexion de la courbe CT.

c- Explication des positions respectives des courbes CM et Cm :
Calculons la dérivée première de la fonction de coût moyen et étudions son signe, soit $CM' = \frac{dCM}{dQ}$ avec $CM = \frac{CT}{Q}$ et CT = CT(Q).

Il s'agit d'une fonction composée de la forme « $y = \frac{u}{v'}$ » qui admet une dérivée de la forme : « $y = \frac{u}{v'}$ » qui admet une dérivée de la forme :

$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ où « u = CT » et « v = Q ».

$$CM' = \frac{\frac{dCT}{dQ}Q - CT\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = \frac{Cm\times Q - CT}{Q^2} = \frac{Cm}{Q} - \frac{CT}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left(Cm - \frac{CT}{Q}\right) = \frac{1}{Q}(Cm - CM).$$

CM' a donc le même signe que (Cm – CM).
- Pour Cm – CM < 0 ⇒ CM' < 0 et Cm < CM : le coût moyen décroît (CM' < 0) tant que le coût marginal lui, est inférieur.
- Pour Cm – CM = 0 ⇒ CM' = 0 et Cm = CM : le coût moyen ne décroît plus et ne croît pas non plus (CM' = 0). Quand le coût moyen atteint un minimum, il est égal au coût marginal. On peut observer sur la figure 1 que pour Q = 6 ; CM = Cm = 38.
- Pour Cm – CM > 0 ⇒ CM' > 0 et Cm > CM : le coût moyen (CM' > 0) et dans ce cas le coût marginal lui est supérieur.

d- En procédant comme dans la question précédente, on démontre que le coût variable moyen est coupé en son minimum par le coût marginal, qu'il est décroissant tant que le coût marginal lui est inférieur et croissant dès qu'il est supérieur. Sachant que CVM' $= \frac{Cm\times Q - CVT}{Q^2} = \frac{1}{Q(Cm - CVM)}$.

## EXERCICE 7 :

Une entreprise est en situation de concurrence pure et parfaite sur le marché d'un produit donné. En courte période, le coût total de production varie en fonction de la quantité produite selon la relation : CT = $Q^3 – 8Q^2 + 64Q + 144$.

a- Calculer et représenter sur un graphique le CM, Cm, CVM de l'entreprise considérée.

b- Analyser le comportement de l'entrepreneur rationnel qui, en courte période, cherche à réaliser le maximum de profit. Calculer le montant du profit réalisé.

c- Vérifier graphiquement et par calcul que le profit total réalisé est maximal.

d- Lettre en évidence la courbe de courte période de l'entreprise.

## Solution de l'exercice n° 7 :

a- Les coûts de l'entreprise :

- Calcul du coût moyen :

Le coût moyen de l'entreprise représente le coût supporté par la production d'une unité du produit, soit : CM = $\frac{CT}{Q} = \frac{Q^3 - 8Q^2 + 64Q + 144}{Q} = Q^2 - 8Q + 64 + \frac{144}{Q}$.

Exemple de calcul : Q = 1 $\Rightarrow$ CM = 1 – 8 + 64 + 144 = 201.

Q = 2 $\Rightarrow$ CM = 4 – (8×2) + 64 + $\frac{144}{2}$ = 124. Etc.

- Calcul du coût marginal :

Le coût de l'entreprise est égal à la dérivée de la fonction de coût total par rapport à la quantité produite, Cm = $3Q^2 – 16Q + 64$.

Exemple de calcul : Q = 1 $\Rightarrow$ Cm = 3 – 16 + 64 = 51.

Q = 2 $\Rightarrow$ Cm = (3×4) – (16×+ 64 = 44. Etc.

- Calcul du coût variable :

Le coût variable total est égal à la différence entre le coût total et le coût fixe total, soit :

CVT = CT – CF = $(Q^3 – 2Q^2 + 64Q + 144) – 144 = Q^3 – 8Q^2 + 64Q$.

CVM = $\frac{CVT}{Q}$ = $Q^2 – 8Q + 64$.

Exemple de calcul : Q = 1 $\Rightarrow$ CVM = 1 – 8 + 64 = 57.

Q = 2 $\Rightarrow$ CVM = 4 – (8×2) + 64 = 52.

Le tableau ci-dessous regroupe les différentes valeurs de Q ainsi obtenues :

| Q | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CM | 201 | 124 | 97 | 84 | 77,8 | 76 | 77,57 | 82 | 89 | 98,4 | 110,09 | 124 |
| Cm | 51 | 44 | 43 | 48 | 59 | 76 | 99 | 128 | 163 | 204 | 251 | 304 |
| CVM | 57 | 52 | 49 | 48 | 49 | 52 | 57 | 64 | 73 | 84 | 97 | 112 |

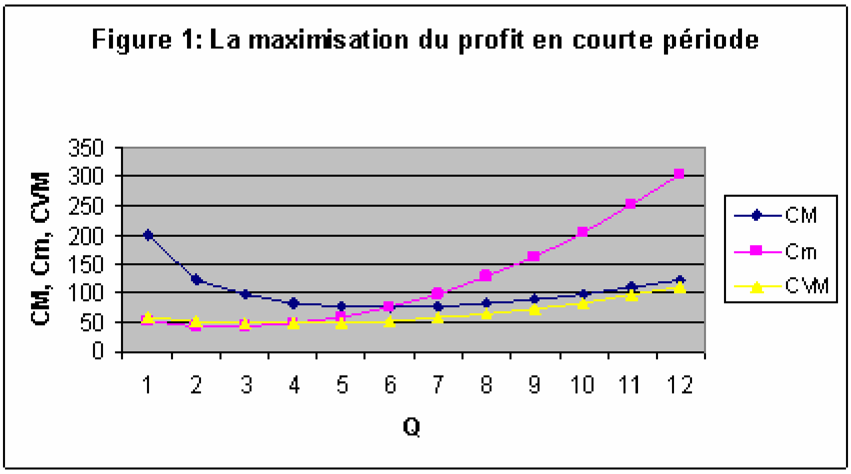
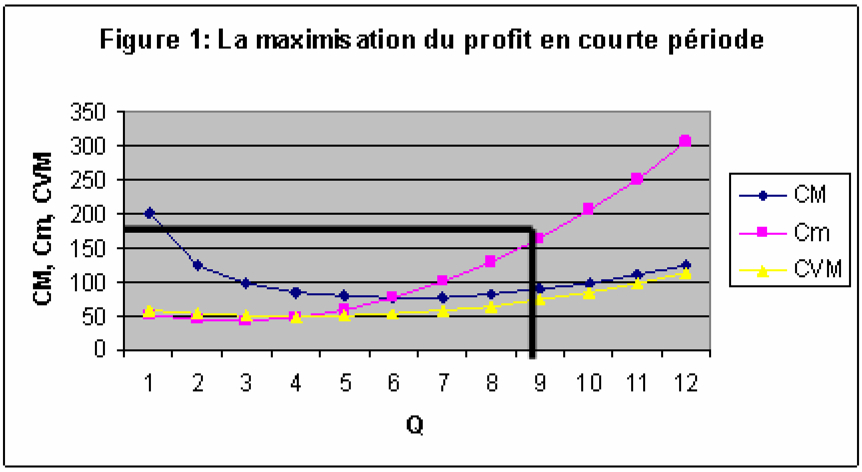


Figure 1: La maximisation du profit en courte période

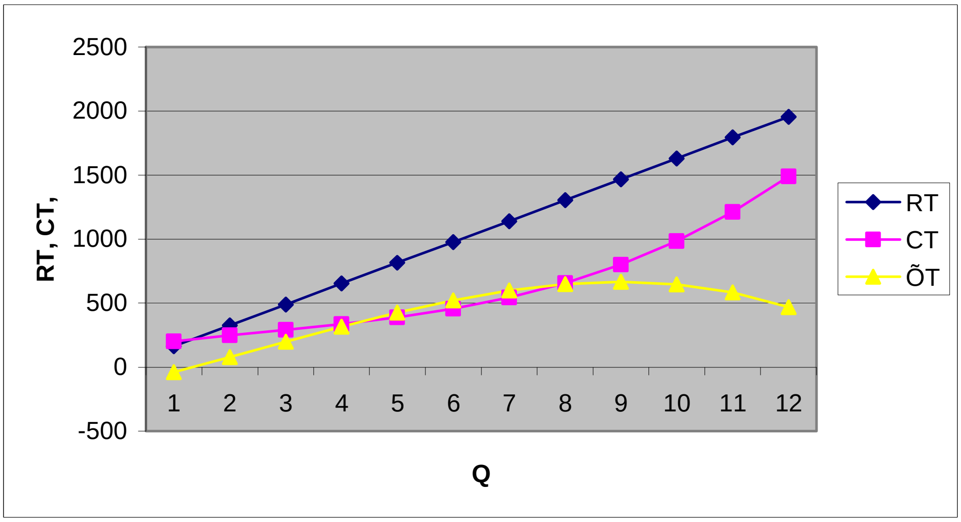
b- L'entrepreneur cherche à réaliser le maximum de profit total (∏T). Il cherche donc à maximiser la différence qui existe entre la recette totale et le coût total (∏T = RT – CT).
L'entreprise n'assure qu'une partie infime de l'offre et ne peut pas modifier le prix de marché en faisant varier sa seule production. Elle est assurée d'écouler toute sa production au prix d'équilibre P = 163.
A un prix P > 163, elle ne vendrait rien, les acheteurs n'ayant aucune raison de ne pas acheter le produit homogène aux autres entreprises, aux prix P = 163 (par hypothèse, information est parfaite). L'entreprise n'a pas non plus intérêt à vendre son produit à un prix P < 163 dans la mesure où elle peut vendre tout ce qu'elle produit au prix P = 163. On peut représenter, sur la figure 1, une ligne parallèle à l'axe des quantités, au niveau P = 163. Cette droite illustre la relation « prix – quantités demandées à l'entreprise ».
Cette ligne de prix représente aussi la recette moyenne et la recette marginale P = RM = Rm = 163.
Pour maximiser le profit, l'entreprise doit produire et vendre la quantité qui lui permet d'égaliser le coût marginal et la recette marginale. Elle obtient l'égalité. P = Rm = Cm = 163, pour la quantité Q = 9.
Le profit moyen ∏M = RM – CM.
Le profit total ∏T = ∏M × Q.
Pour Q = 9 ⇒ CM = 89 ; ∏M = 163 – 89 = 74 (segment BC, voir figure suivante) et ∏T = 74 × 9 = 666.
Le profit total est représenté par la surface du rectangle (ABCD).

P = RM = Rm




b- Afin de vérifier si la solution trouvée dans la question précédente correspond bien au maximum de profit, on peut représenter sur un graphique la recette totale et le coût total de façon à mettre en évidence le profit total ($\prod T = RT - CT$).
Le tableau suivant présente les valeurs de la recette totale et du coût total pour les valeurs de Q allant de 1 à 12. Ces valeurs sont obtenues en remplaçant Q par sa valeur dans les fonctions :
$RT = 163 \times Q$ et $CT = Q^3 - 8Q^2 + 64Q + 144$.
On calcule, par exemple, pour Q = 1 : RT = 163 et CT = 1 – 8 + 64 + 144 = 201.
Pour Q = 2 : RT = 163 × 2 = 326 et CT = 8 – 32 + 128 = 248.

| Q | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RT | 163 | 326 | 489 | 652 | 815 | 978 | 1141 | 1304 | 1467 | 1630 | 1793 | 1956 |
| CT | 201 | 248 | 291 | 336 | 389 | 456 | 543 | 656 | 801 | 984 | 1211 | 1488 |
| ∏T | -38 | 78 | 198 | 316 | 426 | 522 | 598 | 648 | 666 | 646 | 582 | 468 |




- On peut observer que pour la quantité Q = 9, la différence entre la recette totale et le coût total est maximal (1467-801). Pour cette quantité, la courbe du ∏T passe par un maximum égal à 666.

- Pour que la courbe représentative de la fonction de profit total passe par un maximum, il faut que la dérivée première du ∏T (Q) soit nulle et que sa dérivée seconde soit négative.
- Sachant que : ∏T = RT – CT = 163Q – ($Q^3$ – $2Q^2$ + 64Q + 144) = $-Q^3$ + $8Q^2$ + 99Q – 144.

Première condition : $\frac{d\Pi T}{dQ} = -3Q^2 + 16Q + 99 = 0$

Les deux racines de l'équation du second degré sont :

$$Q_1 = \frac{-8+\sqrt{64}+297}{-3} = -3{,}67.$$

$$Q_2 = \frac{-8-\sqrt{64}+297}{-3} = 9.$$

Deuxième condition : ∏T'' = -6Q + 16 < 0.
Pour Q = -3,67 $\Rightarrow$ ∏T'' = (-6x – 3,67) + 16 = 38,02.
Pour Q = 9 $\Rightarrow$ ∏T'' = -38.
Ainsi pour Q = 9 : ∏T'est nulle et ∏T'' est négative. L a courbe de profit total passe par un maximum.

d- En courte période, la courbe d'offre d'une entreprise correspond à sa courbe de coût marginal, dans sa partie croissante, supérieure à la courbe de coût variable moyen.
L'interprétation des points K, J, I et B est la même pour les points D, C, B et A de la courbe 4.5 section 2 chapitre3.