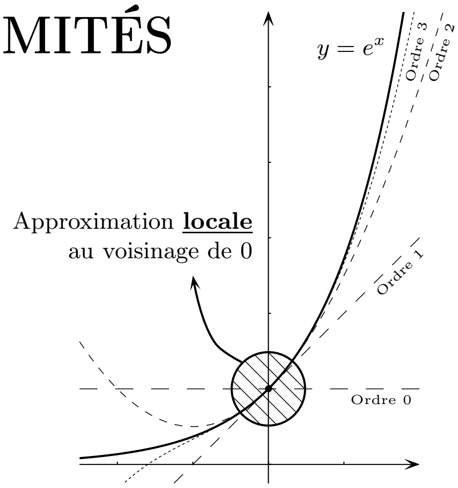
Développements limités

Nous cherchons dans ce chapitre à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Nous allons par exemple montrer dans ce chapitre que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$. Pour la même raison, puisque $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x+\dfrac{x^2}{2}$. La fonction affine la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1+x$, et la fonction constante la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \longmapsto 1$.



Dans tout ce chapitre, les lettres $I, J\dots$ désignent des **RÉUNIONS** finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ — éventuellement des intervalles de $\mathbb{R}$, mais pas forcément.

1 Définitions et premières propriétés

Définition (Développement limité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f *possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a* s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ pour lesquels :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

✌✌✌ **Explication** Plus n est grand, plus la quantité $(x-a)^n$ est petite au voisinage de a. Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise.

✎✎✎ **En pratique**

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. Précisément, si : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$, alors après composition **à droite** par la fonction $x \longmapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$. L'opération inverse est tout aussi possible.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+\dots+a_n(x-a)^n+o\big((x-a)^n\big)$. Alors on dispose aussi d'un développement de f à tout ordre $m \leqslant n$: $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+\dots+a_m(x-a)^m+o\big((x-a)^m\big)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n s'appelle une *troncature* de développement limité. L'idée est simple : qui peut le plus (en précision) peut le moins.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+\dots+a_n(x-a)^n+o\big((x-a)^n\big)$. Les premiers coefficients de ce développement sont peut-être nuls, éventuellement tous ; notons p, s'il existe, l'indice du premier coefficient non nul. Alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$. Si nous tronquons ce développement, nous obtenons donc également : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$, ce qui s'écrit aussi : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$. Conclusion : le premier monôme non nul dans un développement limité est un équivalent de la fonction considérée au point considéré. Les développements limités peuvent donc servir à calculer des équivalents, et donc aussi des limites.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$.

En effet Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

donc : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\,\frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n o(1) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ comme voulu.

Théorème (Unicité des coefficients d'un développement limité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels et si :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \\ f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \end{cases}$$

alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $a_k = b_k$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant l'assertion « $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$ » fausse et notons p le plus petit indice pour lequel $a_p \neq b_p$. Alors : $0 \underset{x \to a}{=} (b_p - a_p)(x-a)^p + (b_{p+1} - a_{p+1})(x-a)^{p+1} + \ldots + o\big((x-a)^n\big)$, donc après troncature : $0 \underset{x \to a}{=} (b_p - a_p)(x-a)^p + o\big((x-a)^p\big)$, puis : $0 \underset{x \to a}{=} (b_p - a_p) + o(1)$. Bref : $a_p = b_p$. Contradiction ! ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème (Développement limité, continuité et dérivabilité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a.

Précisément alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$. Le coefficient d'ordre 0 d'un développement limité de f en a est toujours $f(a)$.

- f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.

Précisément alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$. Le coefficient d'ordre 1 d'un développement limité de f en a est toujours $f'(a)$.

Théorème (Développements limités et parité/imparité) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \in \bar{I}$, que I est symétrique par rapport à 0 et que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

(i) Si f est paire, les coefficients de rang impair sont nuls : $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$.

(ii) Si f est impaire, les coefficients de rang pair sont nuls : $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$.

Démonstration Composant à droite par $x \longmapsto -x$ le développement limité de f, nous obtenons un développement limité de $x \longmapsto f(-x)$ à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(-x) \underset{x \to 0}{=} a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n).$$

- Supposons f paire. Nous avons en fait obtenu ci-dessus une nouvelle expression du développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit les égalités : $a_0 = a_0, \quad a_1 = -a_1, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = -a_3, \quad \ldots \quad a_n = (-1)^n a_n$ dont le résultat est une conséquence immédiate.
- Supposons f impaire. Nous avons en fait obtenu ci-dessus une nouvelle expression du développement limité de $-f$ à l'ordre n au voisinage de 0. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit les égalités : $-a_0 = a_0, \quad -a_1 = -a_1, \quad -a_2 = a_2, \quad -a_3 = -a_3, \quad \ldots \quad -a_n = (-1)^n a_n$ dont le résultat est une conséquence immédiate. ■

2 Primitivation des développements limités
Formule de Taylor-Young

2.1 Primitivation des développements limités

Lemme Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si : $f'(x) \underset{x \to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$, alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o\big((x-a)^{n+1}\big)$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n} = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x-a| < \alpha \implies \left|\frac{f'(x)}{(x-a)^n}\right| < \varepsilon$.
Fixons $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| < \alpha$. Puisque f est dérivable sur I, le théorème des accroissements finis affirme que pour un certain réel c compris strictement entre a et x, $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Alors $|c-a| \leqslant |x-a|$ et :

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{f'(c)}{(x-a)^n}\right| = \left|\frac{f'(c)}{(c-a)^n}\right| \times \left|\frac{c-a}{x-a}\right|^n < \varepsilon. \qquad \text{Bref : } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Du coup comme $x \longmapsto f(x) - f(a)$ s'annule en a : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o\big((x-a)^{n+1}\big)$. ■

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a : $f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$ où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $(n+1)$ au voisinage de a : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big)$.

✌✌✌ **Explication** Bref, on peut **toujours** primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée.

✖✖✖ **Attention !** N'oubliez pas le terme $f(a)$ dans le membre de droite — la fameuse « constante de primitivation ».

Démonstration Notons g l'application $x \longmapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ définie sur I. Alors g est dérivable sur I et sa dérivée g' est l'application $x \longmapsto f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$. Par hypothèse, on a donc : $g'(x) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$.
Le lemme précédent affirme aussitôt que : $g(x) = g(x) - g(a) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^{n+1}\big)$. C'est le résultat cherché. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

En effet Nous l'avons vu : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$.

Du coup par composition à droite avec la fonction $x \longmapsto -x$: $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$.

Enfin par primitivation : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
On remarque que les coefficients de rang pair sont tous nuls ; c'était prévisible, car la fonction arctangente est impaire.

En effet Nous l'avons vu : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Du coup par composition à droite avec la fonction $x \longmapsto -x^2$: $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$.

Enfin par primitivation : $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \operatorname{Arctan} 0 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

2.2 Formule de Taylor-Young

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Précisément : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$.

Explication Ce résultat est avant tout un théorème d'**existence** de développements limités. Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences :

« Continuité $\Longleftrightarrow$ Existence d'un développement limité à l'ordre 0 »

« Dérivabilité $\Longleftrightarrow$ Existence d'un développement limité à l'ordre 1 »

et d'une IMPLICATION : « Classe $\mathcal{C}^n$ $\Longrightarrow$ Existence d'un développement limité à l'ordre n ».

Démonstration On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition à démontrer au rang n est la suivante : $\forall f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}),\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$.

- **Initialisation :** Nous savons déjà que pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition à démontrer vraie au rang n. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, donc par hypothèse :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!(k+1)}\,(x-a)^{k+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\,(x-a)^{k+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big)$$

$$\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^{n+1}\big). \qquad \blacksquare$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

En effet L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young, et de plus : $\quad e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

Exemple Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\,x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + o(x^n).$$

En effet La fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1,\infty[$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. La formule de Taylor donne aussitôt le résultat annoncé.

En pratique (Dérivation des développements limités) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. D'après la formule de Taylor-Young, f possède un développement limité à l'ordre n et f' un développement limité à l'ordre $(n-1)$ au voisinage de a. Précisément :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^{n-1}\big).$$

Il se trouve alors — essayez, ça marche — que le développement limité de f' s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f.

✖✖✖ **Attention !** Il ne s'agit pas d'affirmer qu'on peut toujours dériver un développement limité ! On peut dériver un développement limité à l'ordre n si la fonction sous-jacente est **de classe** $\mathcal{C}^n$ au voisinage du point considéré.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

En effet La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty,1[$ et nous connaissons son développement limité à l'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0 : $\quad \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} + o(x^{n+1})$. Il suffit de dériver terme à terme ce développement pour obtenir le résultat annoncé.

2.3 Un contre-exemple très instructif

Exemple On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Alors f admet un développement limite à tout ordre au voisinage de 0 ; en l'occurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

Par ailleurs f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais f' n'est pas continue en 0.

En effet

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geqslant 1$: $\left|t^n f\left(\frac{1}{t}\right)\right| = |t|^n e^{-t^2} \left|\sin\left(e^{t^2}\right)\right| \leqslant |t|^n e^{-t^2} \overset{|t|\geqslant 1}{\leqslant} |t|^n e^{-|t|}$, donc $\lim_{t\to\pm\infty} t^n f\left(\frac{1}{t}\right) = 0$. Par composition $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)}{x^n} = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Comme voulu : $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
- En particulier f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, donc est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Comme cette fonction est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Montrons enfin que f' n'est pas continue en 0.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, petit calcul : $f'(x) = \frac{2f(x)}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$. Or $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$, donc pour montrer que f' n'est pas continue en 0, il nous suffit de montrer que $\lim_{x\to 0}\left[-\frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)\right] \neq f'(0) = 0$. Dans ce but, posons $u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(2n\pi)}}$ pour tout $n \geqslant 2$. Alors : $-\frac{2}{u_n^3} \cos\left(e^{\frac{1}{u_n^2}}\right) = -\frac{2}{u_n^3} = -2\big(\ln(2n\pi)\big)^{\frac{3}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc en effet $\lim_{x\to 0}\left[-\frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)\right] \neq f'(0)$.

✖✖✖ **Attention !** On peut tirer de l'exemple ci-dessus tout un tas de mises en garde importantes. A méditer avec soin !

- Nous avons vu qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 0 (resp. 1) au voisinage d'un point est continue (resp. dérivable) en ce point. Peut-on généraliser et dire par exemple qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point est deux fois dérivable en ce point ?
  Réponse : **NON**. Dans l'exemple ci-dessus, f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 mais n'est même pas deux fois dérivable en 0 — car f' n'est pas continue en 0.

- Nous avons vu qu'on peut toujours primitiver sans problème les développements limités d'une dérivée. Inversement, peut-on toujours dériver les développements limités d'une fonction dérivable ?
  Réponse : **NON**. Dans l'exemple ci-dessus, f admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 mais f', parce qu'elle n'est pas continue en 0, n'y possède même pas un développement limité à l'ordre 0.

- Les coefficients d'un développement limité sont uniques, nous l'avons vu. Réciproquement, quand deux fonctions ont le même développement limité à tout ordre au voisinage d'un point, sont-elles égales au voisinage de ce point ?
  Réponse : **NON**. Dans l'exemple ci-dessus, la fonction f a un développement limité nul à tout ordre au voisinage de 0, mais n'est pas du tout la fonction nulle au voisinage de 0.

3 Développements limités usuels

Théorème (Développements limités usuels)

1) Logarithme, exponentielle, puissances :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$

2) Sinus, cosinus et arctangente :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

3) Sinus et cosinus hyperboliques :

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Démonstration Il nous reste à démontrer les formules pour sin, cos, sh et ch.

- Pour sin et cos, il suffit de remarquer que $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussitôt pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0. \end{cases}$
Associées à la formule de Taylor-Young, ces formules nous donnent notre résultat.

- Pour sh et ch, il faut revenir à la définition de ces fonctions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Explication : les termes de rang pair des deux sommes se simplifient deux à deux, et les termes de rang impair sont comptés deux fois, mais aussitôt divisés par 2. Démonstration analogue pour la fonction ch. ■

4 Opérations sur les développements limités

Par commodité, les résultats de ce paragraphe, très importants en pratique, sont énoncés au voisinage de 0. On suppose donc ici que $0 \in \bar{I}$.

Théorème (Somme, multiplication par un scalaire et produit) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g possèdent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} B(x) + o(x^n), \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}_n[X].$$

(i) **Somme :** $(f+g)$ possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$(f+g)(x) \underset{x\to 0}{=} (A+B)(x) + o(x^n).$$

(ii) **Multiplication par un scalaire :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\lambda f(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda A(x) + o(x^n).$$

(iii) **Produit :** fg possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$fg(x) \underset{x\to 0}{=} C(x) + o(x^n),$$

où C est le polynôme AB tronqué à l'ordre n, i.e. auquel on a soustrait tous les monômes de degré strictement supérieur à n.

Explication Dans l'assertion (iii), comment détermine-t-on le polynôme C à partir des polynômes A et B, n étant fixé ? Voyons cela sur un exemple. Pour $A = X^2+1$, $B = 2X+3$ et $n = 1$, on a $AB = 2X^3 + 3X^2 + \underbrace{2X+3}_{C}$.

Attention ! Le produit de deux développements limités à l'ordre n n'est pas un développement limité à l'ordre $2n$, mais un développement limité à l'ordre n. D'autre part, pour obtenir un développement limité de fg à l'ordre n, on doit absolument développer f **et** g à l'ordre n.

Démonstration

(i) et (ii) Nous connaissons déjà ces deux propriétés.

(iii) Par définition de C, X^{n+1} divise $AB - C$; il existe donc un polynôme D tel que $AB = C + X^{n+1}D$.

$$fg(x) \underset{x\to 0}{=} \big(A(x)+o(x^n)\big)\big(B(x)+o(x^n)\big) = A(x)B(x)+A(x)o(x^n)+B(x)o(x^n)+o(x^n)o(x^n) \underset{x\to 0}{=} AB(x)+o(x^n).$$

On a pu simplifier ici car $A(x) \underset{x\to 0}{=} O(1)$ et $B(x) \underset{x\to 0}{=} O(1)$. Poursuivons :

$$fg(x) \underset{x\to 0}{=} C(x) + x^{n+1}D(x) + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} C(x) + x^n o(1) + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} C(x) + o(x^n).$$ Et voilà. ■

Exemple $e^x \cos x + 2\sin x \underset{x\to 0}{=} 1 + 3x - \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

En effet On ne vous demande pas de justifier vos troncatures avec une armée de détails ; vous devez savoir calculer vite les développements limités.

$$\begin{aligned} e^x \cos x + 2\sin x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + 3x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

En pratique (Puissances entières) L'assertion (iii) du précédent théorème, généralisée à plus de deux termes, permet le calcul du développement limité des puissances entières d'une fonction. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^n)$, et si, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, B est le polynôme A^p dont on ne conserve que les monômes de degré inférieur ou égal à n, alors : $f(x)^p \underset{x\to 0}{=} B(x) + o(x^n)$.

Exemple $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^3 \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{7x^2}{4} + o(x^2)$.

En effet On a : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + \frac{11x^2}{12} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + o(x^2). \end{aligned}$$

Théorème (Composition) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g possèdent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} B(x) + o(x^n), \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R}_n[X].$$

On suppose en outre que $A(0) = 0$, i.e. que le coefficient constant de A est nul. Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} C(x) + o(x^n),$$

où C est le polynôme $B \circ A$ auquel on a soustrait tous les monômes de degré strictement supérieur à n.

Explication Comment détermine-t-on le polynôme C à partir des polynômes A et B, n étant fixé ? Voyons cela sur un exemple. Pour $A = X^2$, $B = 4X^2 + X + 1$ et $n = 2$, on a $B \circ A = 4X^4 + \underbrace{X^2+1}_{C}$.

Attention !

- Sans l'hypothèse « $A(0) = 0$ », qui signifie que $\lim_0 f = 0$, on ne peut pas composer les développements limités !
- Pour obtenir un développement limité de $g \circ f$ à l'ordre n, on doit absolument développer f **et** g à l'ordre n.

Démonstration Si $n=0$, le résultat est sans difficulté. Supposons donc $n \geqslant 1$ et notons $b_0, b_1, \ldots, b_n$ les coefficients de B, de sorte que $B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Par définition de C, X^{n+1} divise $B \circ A - C$; il existe donc un polynôme D tel que $B \circ A = C + X^{n+1} D$.
Remarquons par ailleurs que, puisque $A(0) = 0$ et $n \geqslant 1$, alors $f(x) \underset{x \to \infty}{=} \lambda x + o(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier $f(x) \underset{x \to 0}{=} O(x)$, et donc $f(x)^n \underset{x \to 0}{=} O(x^n)$ par produit. Finalement :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &\underset{x \to 0}{=} B\big(f(x)\big) + o\big(f(x)^n\big) \underset{x \to 0}{=} B\big(f(x)\big) + o(x^n) \qquad \text{car } f(x)^n \underset{x \to 0}{=} O(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x)^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k \big(A(x)^k + o(x^n)\big) + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k A(x)^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} B \circ A(x) + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} C(x) + x^{n+1} D(x) + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} C(x) + x^n o(1) + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} C(x) + o(x^n). \end{aligned}$$ ■

Exemple $\ln \cos x \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

En effet On a : $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ d'une part, et : $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ d'autre part. Du coup : $\ln \cos x \underset{x \to 0}{=} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \underset{x \to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

✎✎✎ **En pratique** **(Inverse)** La composition des développements limités permet d'inverser les développements limités grâce à la formule : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les exemples valent ici mieux qu'un long discours.

Exemple $\dfrac{1}{\cos x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$ et $\tan x \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$.

En effet On a : $\cos x \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} \underset{x \to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + o(x^4) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

Nous pouvons du coup en déduire un développement limité de la fonction tangente au voisinage de 0 :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x \to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Exemple $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$.

En effet

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &\underset{x \to 0}{=} \frac{x}{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right)} \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right) + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

Vous noterez bien que nous avons dû développer l'exponentielle à l'ordre 3 pour obtenir un développement limité de $x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. Comprenez-vous pourquoi ?

✎✎✎ **En pratique** Les deux remarques qui suivent doivent être bien travaillées et digérées.

- Soit à calculer un développement limité de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0. Pour obtenir un tel résultat, à quel ordre convient-il de développer sinus au voisinage de 0 ? Deux risques se présentent : si notre développement du sinus est trop précis, nous allons effectuer de longs calculs inutilement ; si au contraire notre développement du sinus n'est pas assez précis, nous n'obtiendrons jamais le résultat escompté. Pour ces deux raisons, il est important de pouvoir prévoir **à l'avance** quelles précisions doivent être utilisées dans les calculs.

  Calculer un développement limité de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0 revient à calculer un développement limité de $x \longmapsto \sin(x^2)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0. Pour effectuer un tel calcul, on partira d'un développement limité du sinus à l'ordre 3 au voisinage de 0. Dans l'ordre, on aura donc :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\text{puis} \quad \sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \quad \text{par composition à droite avec la fonction } x \longmapsto x^2,$$

$$\text{et enfin} \quad \frac{\sin(x^2)}{x} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

- Soit à calculer un développement limité de $x \longmapsto \sin^5 x$ à l'ordre 7 au voisinage de 0. Première idée : on développe sin à l'ordre 7 au voisinage de 0, puis on calcule la puissance $5^{\text{ème}}$ de ce développement. Malheureusement cette idée conduit à des calculs tout à fait inhumains. Nous allons donc tâcher de raffiner notre méthode.

  Remarquons qu'on a : $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, et donc : $\sin^5 x \underset{x\to 0}{\sim} x^5$. Le premier terme non nul du développement limité de $x \longmapsto \sin^5 x$ au voisinage de 0 est donc x^5. Calculer un développement limité de $x \longmapsto \sin^5 x$ à l'ordre 7 au voisinage de 0 revient donc à calculer un développement limité de $x \longmapsto \dfrac{\sin^5 x}{x^5} = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^5$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. Dans l'ordre, on rédigera ainsi sa réponse :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \text{donc} \quad \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

$$\text{puis} \quad \frac{\sin^5 x}{x^5} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{5x^2}{6} + o(x^2),$$

$$\text{et enfin} \quad \sin^5 x \underset{x\to 0}{=} x^5 - \frac{5x^7}{6} + o(x^7). \qquad \text{Méthode rapide !}$$

5 Exemples et applications

5.1 Développements limités au voisinage d'un point autre que 0

Exemple $\ln x \underset{x\to 2}{=} \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} + o\big((x-2)^3\big).$

En effet On ramène le problème en 0. Chercher un développement limité de $x \longmapsto \ln x$ à l'ordre 3 au voisinage de 2 revient à chercher un développement limité de $h \longmapsto \ln(2+h)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Or :

$$\ln(2+h) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).$$

On revient à la fonction $x \longmapsto \ln x$ en effectuant le changement de variable $x = 2 + h$.

Exemple $\cos x \underset{x\to \frac{\pi}{4}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + o\left[\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right].$

En effet On ramène le problème en 0. Chercher un développement limité de $x \longmapsto \cos x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ revient à chercher un développement limité de $h \longmapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Or :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos h - \sin h) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\right] \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + \frac{h^3}{6\sqrt{2}} + o(h^3).$$

On revient à la fonction $x \longmapsto \cos x$ en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{4} + h$.

5.2 Calculs de limites et recherche d'équivalents

Exemple $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3} = \frac{1}{8}$.

En effet Nous allons utiliser des développements limités, mais à quel ordre faut-il pousser ces développements ? Puisqu'on cherche une $\boxed{\text{limite}}$, c'est la précision $\boxed{o(1)}$ qui est requise, au pire : nous devons donc chercher un développement limité de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3}$ à l'ordre 0 au voisinage de 0, à partir d'un développement limité de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 (à cause de la division par x^3).

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)\right)-\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)\right)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{8}+o(1).$$

Exemple $\displaystyle \ln(1+x^2)-\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{6}$.

En effet Il s'agit ici de chercher le premier terme non nul du développement limité de $x \longmapsto \ln(1+x^2)-\sin^2 x$ au voisinage de 0. Nous savons en effet que ce premier terme non nul sera l'équivalent cherché. Mais à quel ordre devons-nous pousser nos calculs ? Nous n'avons hélas aucun moyen de le savoir à l'avance. Le tatônnement s'impose. Il faut juste espérer que le premier terme non nul cherché n'est pas d'ordre 50.

$$\ln(1+x^2)-\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{6}+o(x^4).$$

5.3 Développements asymptotiques

Exemple La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x+1}\, e^{\sin\frac{1}{x}} - 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ possède une asymptote au voisinage de ∞, d'équation $y=x-2$, et le graphe de f est situé au-dessus de cette asymptote au voisinage de ∞.

En effet

- On se ramène ici au voisinage de 0 à l'aide du changement de variable $h=\dfrac{1}{x}$ — qui semble adapté à f. Il s'agit donc de travailler avec la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0.
- Se demander si f possède une asymptote au voisinage de ∞, c'est se demander s'il existe des réels a et b pour lesquels $f(x) \underset{x\to\infty}{=} ax+b+o(1)$. Avec la variable h, cette relation s'écrit $f\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \dfrac{a}{h}+b+o(1)$, ou encore $hf\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} a+bh+o(h)$ — on multiplie par h pour avoir sous les yeux un vrai développement limité sans coefficient d'ordre « -1 ».
- Plus précisément, pour connaître la position du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de ∞, il suffit de connaître un équivalent de $x \longmapsto f(x)-(ax+b)$ au voisinage de ∞, i.e. de trouver un terme plus fin que $o(1)$. Avec la variable h, cela revient à chercher un équivalent de $h \longmapsto hf\left(\dfrac{1}{h}\right)-(a+bh)$ au voisinage de 0, i.e. un terme plus fin que $o(h)$.
- Concrètement ici, il nous suffit de trouver un développement limité à l'ordre 2 de $h \longmapsto hf\left(\dfrac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0, en espérant un coefficient d'ordre 2 non nul.

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = h\left(\frac{\left(\dfrac{1}{h}\right)^2}{\dfrac{1}{h}+1}\, e^{\sin h}-\frac{2}{h}\ln(1+h)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{1+h}\, e^{\sin h}-2\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} \left(1-h+h^2+o(h^2)\right)e^{h+o(h^2)}-2\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \left(1-h+h^2+o(h^2)\right)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-2h+h^2+o(h^2) \underset{h\to 0}{=} 1-2h+\frac{3h^2}{2}+o(h^2).$$

On réécrit ce résultat avec la variable x : $\quad f(x) \underset{x\to\infty}{=} x-2+\dfrac{3}{2x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

En particulier $f(x) \underset{x\to\infty}{=} x-2+o(1)$, donc f admet la droite d'équation $y=x-2$ pour asymptote au voisinage de ∞. Et comme $f(x)-(x-2) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$ est une quantité positive au voisinage de ∞, le graphe de f est situé au-dessus de son asymptote au voisinage de ∞.

✎✎✎ **En pratique** Les développements limités servent souvent pour l'étude des suites. Nous savons par exemple que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$. Du coup pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **de limite nulle** : $e^{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1+u_n+\frac{u_n^2}{2}+\frac{u_n^3}{6}+o(u_n^3)$.

Exemple Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $x^4+x^3=n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$ possède une unique solution notée x_n.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet le développement asymptotique suivant : $x_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}-\frac{1}{4}+\frac{3}{32\sqrt[4]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$.

En effet

- La fonction $x\longmapsto x^4+x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes. Elle par ailleurs continue sur $\mathbb{R}_+$. En vertu du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image qui se trouve être aussi $\mathbb{R}_+$. Or $\mathbb{R}_+$ contient $\mathbb{N}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}_+$ tel que $x_n^4+x_n^3=n$. Nous noterons dans ce qui suit ♣ cette relation.

- Soit $n\in\mathbb{N}$. Peut-on avoir $x_n<1$? Si c'est le cas, alors $n=x_n^4+x_n^3<1+1=2$, donc $n=1$.
Dans ces conditions, $x_n\geqslant 1$ pour tout $n\geqslant 2$, donc $x_n^4\geqslant x_n^3$. Avec ♣ on en déduit que $x_n^4\geqslant\frac{n}{2}$, puis que $x_n\geqslant\sqrt[4]{\frac{n}{2}}$. En particulier, d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

- Du coup $x_n^3 \underset{n\to\infty}{=} o(x_n^4)$, de sorte que : $x_n^4 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ d'après ♣, et donc : $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}$.

- Reprenons ensuite ♣, mais mettons x_n^4 en facteur et composons avec la fonction $\sqrt[4]{\cdot}$. Cela nous donne, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x_n=\sqrt[4]{n}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}}$ — relation notée ♠. Du coup :
$x_n-\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{n}\left[\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt[4]{n}\times\frac{-1}{4x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{4}$. Conclusion : $x_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}-\frac{1}{4}+o(1)$.

- Nous souhaitons pousser un cran plus loin ce développement asymptotique. Les équivalents usuels suffisaient jusqu'ici, mais nous ne pouvons aller plus loin avec eux. Les développements limités vont donc prendre le relais. Nous allons bien sûr partir de la formule ♠ et du développement limité usuel :
$$(1+x)^{-\frac{1}{4}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{4}+\frac{5x^2}{32}-\frac{15x^3}{128}+o(x^3)\ldots \qquad \text{mais à quel ordre s'arrêter ?}$$
Puisque nous aurons à poser « $x=\frac{1}{x_n}$ », commençons par chercher un développement asymptotique de $\frac{1}{x_n}$.
$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}-\frac{1}{4}+o(1)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4\sqrt[4]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left[1+\frac{1}{4\sqrt[4]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right] \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$
Aurions-nous pu utiliser le développement plus précis : $\frac{1}{1-t} \underset{t\to 0}{=} 1+t+t^2+o(t^2)$, voire un développement plus précis encore ? Cela n'aurait hélas pas donné mieux. En effet, avec « $t=\frac{1}{4\sqrt[4]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ », nous voyons apparaître un $o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ dans le terme $1+t$ qui mange inévitablement les termes en t^2.

- Finissons-en.
$$\begin{aligned}
x_n=\sqrt[4]{n}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}} &\underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}\left[1-\frac{1}{4x_n}+\frac{5}{32x_n^2}+o\left(\frac{1}{x_n^2}\right)\right]\\
&\underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\frac{5}{32}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\\
&\underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+\frac{5}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\\
&\underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}\left[1-\frac{1}{4\sqrt[4]{n}}+\frac{3}{32\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \underset{n\to\infty}{=} \sqrt[4]{n}-\frac{1}{4}+\frac{3}{32\sqrt[4]{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right).
\end{aligned}$$
Aurions-nous fait mieux si nous avions poussé le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3, voire plus ? Non, car nous voyons ci-dessus qu'avec « $x=\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ », le terme $1-\frac{x}{4}+\frac{5x^2}{32}$ introduit un $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ qui ne ferait qu'une bouchée des termes en x^3.

5.4 Allure locale des courbes paramétrées

D'abord un rappel.

Définition (Demi-tangente et tangente en un point d'une courbe paramétrée) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in I$.

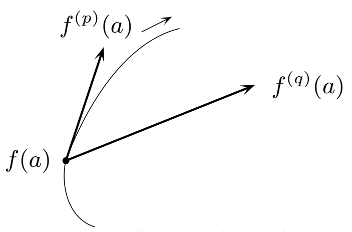
- On suppose que pour t proche de a tel que $t < a$, on a $f(t) \neq f(a)$, et que $\lim_{t \to a^-} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} = \vec{u}$ existe. La demi-droite passant par $f(a)$ dirigée par $\vec{u}$ est alors appelée la *demi-tangente à gauche de f en a*.
- On suppose que pour t proche de a tel que $t > a$, on a $f(t) \neq f(a)$, et que $\lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} = \vec{v}$ existe. La demi-droite passant par $f(a)$ dirigée par $\vec{v}$ est alors appelée la *demi-tangente à droite de f en a*.
- Si f possède une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite, et si, avec les notations précédentes, $\vec{u} = \pm\vec{v}$, alors la droite passant par $f(a)$ dirigée par $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) est appelée la *tangente de f en a*.

Nous allons dans ce qui suit répondre au problème de l'existence d'une tangente en un point quelconque d'une courbe paramétrée. Jusqu'ici, nous avions seulement réussi à aborder ce problème dans le cas des points réguliers.

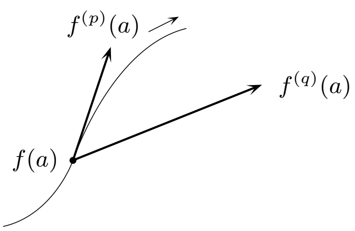
Théorème (Allure d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point) Soient $k \geqslant 2$, $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ et $a \in I$.

- **<u>S'il existe</u>**, on pose $p = \min\left\{i \in [\![1, k]\!] / \quad f^{(i)}(a) \neq \vec{0}\right\}$. Cet entier p est appelé le *premier entier caractéristique de f en a*. Alors f possède une tangente en a, dirigée par le vecteur $f^{(p)}(a)$.
- **<u>S'il existe</u>** lui aussi, on pose alors $q = \min\left\{i \in [\![p, k]\!] / \quad f^{(p)}(a) \text{ et } f^{(i)}(a) \text{ sont non colinéaires}\right\}$. Cet entier q est appelé le *second entier caractéristique de f en a*. L'allure du support de f au voisinage de dépend alors des parités/imparités de p et q. Ci-dessous, la petite flèche indique le sens de parcours de la courbe (croissance de la variable t).

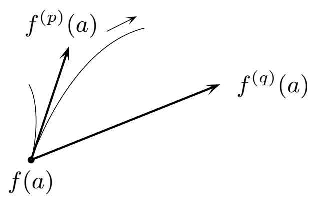
1) **Cas où p est impair et q pair :**
On dit alors que $f(a)$ est un *point ordinaire*.



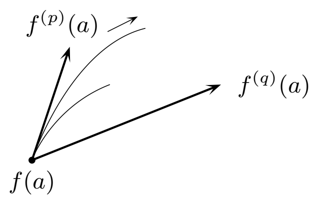
2) **Cas où p et q sont impairs :**
On dit alors que $f(a)$ est un *point d'inflexion*.



3) **Cas où p est pair et q impair :**
On dit alors que $f(a)$ est un *point de rebroussement de première espèce*.



4) **Cas où p et q sont pairs :**
On dit alors que $f(a)$ est un *point de rebroussement de deuxième espèce*.



✌✌✌ **Explication**

- L'entier p, s'il existe, est caractérisé de la façon suivante : $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = \vec{0}$ **<u>mais</u>** $f^{(p)}(a) \neq \vec{0}$. Le cas $p = 1$ exprime précisément le fait que le point $f(a)$ est régulier, i.e. que $f'(a) \neq \vec{0}$. Ce cas nous était déjà connu.
- Bien sûr, $f^{(p)}(a)$ et $f^{(p)}(a)$ sont colinéaires, donc $q > p$. L'entier q, s'il existe, est caractérisé de la façon suivante :

$$f^{(p)}(a) \text{ et } f^{(p)}(a) \text{ sont colinéaires,} \quad f^{(p)}(a) \text{ et } f^{(p+1)}(a) \text{ sont colinéaires,} \quad f^{(p)}(a) \text{ et } f^{(p+2)}(a) \text{ sont colinéaires} \ldots$$

$$\underline{\textbf{mais}}\ f^{(p)}(a) \text{ et } f^{(q)}(a) \text{ ne le sont pas.}$$

✎✎✎ **En pratique** Et comment fait-on pour tester la colinéarité de deux vecteurs ? On calcule leur déterminant.

Démonstration Notons (x,y) les coordonnées de f dans le repère orthonormal direct usuel $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Alors par définition de p : $\left\{\begin{array}{l} x'(a)=x''(a)=\ldots=x^{(p-1)}(a)=0 \\ y'(a)=y''(a)=\ldots=y^{(p-1)}(a)=0 \end{array}\right.$ et $f^{(p)}(a)=\big(x^{(p)}(a),y^{(p)}(a)\big)\neq(0,0)$.

- La formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions x et y nous donne alors ceci :

  $$x(t)\underset{t\to a}{=}x(a)+\frac{x^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p+o\big((t-a)^p\big)\quad\text{et}\quad y(t)\underset{t\to a}{=}y(a)+\frac{y^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p+o\big((t-a)^p\big),\quad\text{puis :}$$

  $$\big(x(t)-x(a)\big)^2\underset{t\to a}{=}\left(\frac{x^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p\right)^2+o\big((t-a)^{2p}\big)\quad\text{et}\quad\big(y(t)-y(a)\big)^2\underset{t\to a}{=}\left(\frac{y^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p\right)^2+o\big((t-a)^{2p}\big).$$

  Aussitôt : $\big\|f(t)-f(a)\big\|^2=\big(x(t)-x(a)\big)^2+\big(y(t)-y(a)\big)^2\underset{t\to a}{=}\dfrac{\big\|f^{(p)}(a)\big\|^2}{p!^2}\,(t-a)^{2p}+o\big((t-a)^{2p}\big)$.

  Or par hypothèse $f^{(p)}(a)\neq\vec{0}$, donc finalement : $\big\|f(t)-f(a)\big\|\underset{t\to a}{\sim}\dfrac{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}{p!}\,|t-a|^p$.
  En particulier, $f(t)\neq f(a)$ pour tout $t\neq a$ proche de a.

- Nous pouvons maintenant montrer que f possède une tangente en a dirigée par $f^{(p)}(a)$.
  On a tout d'abord : $\dfrac{f(t)-f(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}=\dfrac{x(t)-x(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}\,\vec{\imath}+\dfrac{y(t)-y(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}\,\vec{\jmath}$. Or nos calculs précédents montrent que :

  $$\frac{x(t)-x(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}=\frac{\dfrac{x(t)-x(a)}{(t-a)^p}}{\dfrac{\big\|f(t)-f(a)\big\|}{(t-a)^p}}\underset{t\to a^+}{\longrightarrow}\frac{\dfrac{x^{(p)}(a)}{p!}}{\dfrac{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}{p!}}=\frac{x^{(p)}(a)}{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}$$

  et que :

  $$\frac{x(t)-x(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}=\frac{\dfrac{x(t)-x(a)}{(t-a)^p}}{\dfrac{\big\|f(t)-f(a)\big\|}{(t-a)^p}}\underset{t\to a^-}{\longrightarrow}\frac{\dfrac{x^{(p)}(a)}{p!}}{\dfrac{(-1)^p\big\|f^{(p)}(a)\big\|}{p!}}=(-1)^p\,\frac{x^{(p)}(a)}{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}.$$

  Même chose avec y. Finalement $\displaystyle\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)-f(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}=\frac{f^{(p)}(a)}{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}$ et $\displaystyle\lim_{t\to a^-}\frac{f(t)-f(a)}{\big\|f(t)-f(a)\big\|}=(-1)^p\,\frac{f^{(p)}(a)}{\big\|f^{(p)}(a)\big\|}$.
  Conclusion : f possède une tangente en a dirigée par $f^{(p)}(a)$.

- Et l'entier caractéristique q alors ? La formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions x et y donne ceci :

  $$x(t)\underset{t\to a}{=}x(a)+\frac{x^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p+\ldots+\frac{x^{(q)}(a)}{q!}\,(t-a)^q+o\big((t-a)^q\big)\quad\text{et}\quad y(t)\underset{t\to a}{=}y(a)+\frac{y^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p+\ldots+\frac{y^{(q)}(a)}{q!}\,(t-a)^q+o\big((t-a)^q\big),$$

  développements limités que l'on peut fondre en un unique développement limité **vectoriel** :

  $$f(t)\underset{t\to a}{=}f(a)+\frac{f^{(p)}(a)}{p!}\,(t-a)^p+\ldots+\frac{f^{(q)}(a)}{q!}\,(t-a)^q+\vec{o}\big((t-a)^q\big)$$

  dans lequel le $\vec{o}\big((t-a)^q\big)$ est par définition un vecteur dont la norme est un $o\big((t-a)^q\big)$ au sens usuel, au voisinage de a.

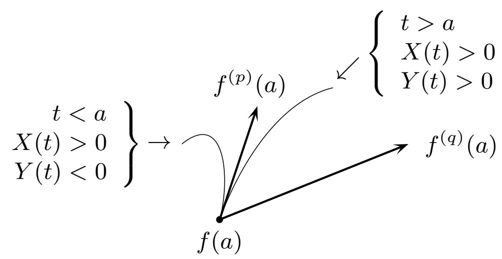
- Par hypothèse, $\big(f(a),f^{(p)}(a),f^{(q)}(a)\big)$ est un repère du plan, pas nécessairement orthonormal direct. Notons alors, pour tout $t\in I$, (X,Y) les coordonnées de f dans ce repère. Puisque $f^{(p)}(a)$, $f^{(p+1)}(a)\ldots$ et $f^{(q-1)}(a)$ sont colinéaires, le développement limité vectoriel écrit ci-dessus nous donne :

  $$\left\{\begin{array}{l} X(t)\underset{t\to a}{=}\dfrac{(t-a)^p}{p!}+o\big((t-a)^p\big) \\ Y(t)\underset{t\to a}{=}\dfrac{(t-a)^q}{q!}+o\big((t-a)^q\big) \end{array}\right.,\qquad\text{i.e.}\qquad\left\{\begin{array}{l} X(t)\underset{t\to a}{\sim}\dfrac{(t-a)^p}{p!} \\ Y(t)\underset{t\to a}{\sim}\dfrac{(t-a)^q}{q!} \end{array}\right..$$

- Pour finir, plaçons-nous dans le cas où p est pair et où q est impair — on raisonnerait de la même façon dans les autres cas.

  1) Puisque p est pair, l'équivalent de X trouvé ci-dessus au voisinage de a montre que X est strictement positive au voisinage de a, à gauche comme à droite.

  2) Puisque q est impair, l'équivalent de Y trouvé ci-dessus au voisinage de a montre que Y est strictement négative au voisinage de a à gauche, et strictement positive au voisinage de a à droite. ■



Définition (Point birégulier) Soient $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ et $a \in I$. On dit que le point $f(a)$ est *birégulier* si $f'(a) \neq \vec{0}$ et si la famille $\big(f'(a), f''(a)\big)$ est libre — cela revient à dire que les entiers caractéristiques de f en a sont, dans l'ordre, 1 et 2.

Si le point $f(a)$ est birégulier, il est ordinaire.

Exemple Soit $f = (x, y)$ la courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = t + \dfrac{t^3}{3} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - t - 1}{2} \end{cases}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $x'(t) = t^2 + 1 \neq 0$ et $y'(t) = t - \dfrac{1}{2}$. Les variations de x et y sont alors aisées à déterminer. En outre f est régulière, et donc les points du support de f sont soit ordinaires, soit des points d'inflexion.
- Déterminons les éventuels points d'inflexion de f.

  1) Fixons $t \in \mathbb{R}$. On a : $\det\big(f'(t), f''(t)\big) = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2+1 & 2t \\ t - \dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + t + 1$. Ce calcul montre donc que la famille $\big(f'(t), f''(t)\big)$ est libre si et seulement si $t^2 \neq t + 1$, i.e. $t \notin \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. On peut d'ores et déjà affirmer que $f(t)$ est birégulier, donc ordinaire, si $t \notin \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

  2) Que se passe-t-il enfin si $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$? $\det\big(f'(t), f^{(3)}(t)\big) = \begin{vmatrix} x'(t) & x^{(3)}(t) \\ y'(t) & y^{(3)}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2+1 & 2 \\ t - \dfrac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2t + 1 \neq 0$.

  Ainsi les deux points $f\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$ sont des points d'inflexion.
- Les détails de cette étude de courbe paramétrée vous sont laissés en exercice — branches infinies, etc. C'est enfin l'heure de dessiner. Les tangentes aux points d'inflexion ont été tracées en pointillés : on visualise ainsi mieux le fait que la courbe traverse la tangente en un point d'inflexion.