Semestre : 3
Module : Méthodes Quantitatives
Elément : Statistiques II
Enseignant : Mr HILAL

Eléments du cours

- Axiomes du calcul des probabilités
- Variables aléatoires et leurs caractéristiques
- Lois usuelles
- Lois usuelles continues
- Exercices avec solutions

Numérisation & Conception
Mr Mohamed-Fadil ZIADI

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : AXIOMES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

I- Quelques définitions :

1- Ensemble fondamental :

Souvent noté « Ω », c'est l'ensemble des résultats (ou cas) possibles liés à une expérience aléatoire effectuée sur un ensemble E.

2- Événement :

C'est toute partie (ou sous ensemble) de Ω.

3- Événement impossible :

Noté « Φ », c'est un événement qui ne se réalise jamais, autrement dit ; aucun élément de Ω n'est favorable à sa réalisation.

4- Événement certain :

C'est un événement toujours réalisé, il correspond à l'ensemble fondamentalΩ.

5- Événement élémentaire :

C'est un événement réalisé par un seul élément deΩ. Les éléments élémentaires sont équiprobables ($p = \frac{1}{n}$).

II- Axiome des probabilités totales :

1- Espace probabilisé :

Ω est dit probabilisé, lorsqu'une application « P » est définie de P(Ω) (ensemble de partis de Ω.

$$P : \mathsf{P}(\Omega) \longrightarrow \Re$$
$$A \longrightarrow P(A).$$

P(A) est appelé probabilité de A est satisfait aux trois conditions fondamentales.

- L'image de toute partie A de Ω appartenant à P(Ω) est positive ou nulle ;
- L'image de l'ensemble fondamental Ω est l'unité : P(Ω) = 1 ;
- L'image de la réunion d'un nombre finis ou infinis dénombrable de parties de E (événements) disjointes (incompatibles) appartenant à P(Ω) est égale à la somme des images :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

2- Conséquences de la définition :

a- en vertu de la troisième propriété, on a :

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

Or, $A \cup \overline{A} = \Omega$

Et $P(\Omega) = 1$ d'après la deuxième propriété.

Donc : P(A) + P($\overline{A}$) = 1

$\Rightarrow$ P($\overline{A}$) = 1 – P(A).

b- Si dans l'égalité précédente, on fait « A = Ω », il vient, puisque :

$\overline{\Omega} = \phi$ et P(Ω) = 1

P(Φ) = 0.

c- Si B est incluse dans A ($A \subset B$)

A = $B \cup (A \cap \overline{B})$.

$\Rightarrow$ P(A) = P(B) + P($A \cap \overline{B}$).

$\Rightarrow$ P(A) – P(B) = P($A \cap \overline{B}$) $\geq$ 0.

$\Rightarrow$ P(A) $\geq$ P(B).

* P $(A \cup B)$ = P(A) + P(B) si : $A \cap B$ = Φ.

* P($A \cap \overline{B}$) = P(A) – P(B) si : $\overline{A} \cap B$ = Φ.

d- Tout ensemble A appartenant à P(Ω) (donc un événement) est inclus dans Ω. D'où : P(A) $\leq$ P(Ω) ; ∀A.

Donc : $0 \leq P(A) \leq 1$; (∀A).

3- Axiome des probabilités totales dans le cas de deux événements non incompatibles :

$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A \cap B})$.

Donc, d'après la troisième propriété :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A \cap B})$.

Car, en vertu de la deuxième propriété :

$P(B \cap \overline{A \cap B}) = P(B) - P(A \cap B)$

D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4- Axiome de probabilité totale dans le cas de plusieurs évènements incompatibles :

a- Cas de trois évènements :

Soient A, B et C trois évènements, on montre que :
$P(A \cup B \cup C) = p(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

b- Cas de « n » évènements :

On montre, par récurrence, que :

$$P(A_I \cup A_J \cup A_K) = \sum_{i=1}^{K} P(A_I) - \sum_{I \langle J} \sum P(A_I \cap A_J) + \sum \sum_{I \langle J \langle K} \sum P(A_I \cap A_J \cap A_K) + \ldots.. + (-1)^{n-1} P(A_I \cap \ldots \cap A_n)$$

On posant : $S_k = \sum_{I_{11} \langle I_2 \ldots\ldots\ldots} \sum_{I_k} \sum P(A_{I1} \cap A_{I2} \cap \ldots.. \cap A_{In})$.

On a : $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots. \cup A_n) \sum_{k+1}^{n} (-1)^{k-1} . S_k$

III- Axiome de probabilités composées :

1- Probabilité conditionnelle :

La réalisation d'un évènement A sachant qu'un autre évènement B a été réalisé est :

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Avec ; $P(B) \neq 0$

☛ **Propriétés :**

* $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$.
* $P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C)$ Si : $A \cap B = \Phi$
* $P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C) - P[(A \cap B)/C]$ Si : $A \cap B \neq \Phi$

2- Axiomes de probabilités composées dans le cas de plusieurs évènements :

a- Cas de trois évènements :

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$

b- Cas de « n » évènements :

Soient A_1, A_2, …., A_n « n » évènements.
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots..P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$.

3- Indépendance de deux évènements :

L'évènement A est indépendant de l'évènement B, si :

$P(A/B) = P(A)$

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

☛ **Remarque :**

L'indépendance est une relation symétrique. On dit, tout simplement, que A et B sont indépendants.

☛ **Propriétés :**

Si A et B sont indépendants, alors :
* A et $\overline{B}$ sont indépendants.
* $\overline{A}$ et B sont indépendants.
* $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

☛ **Indépendance de « n » évènements :**

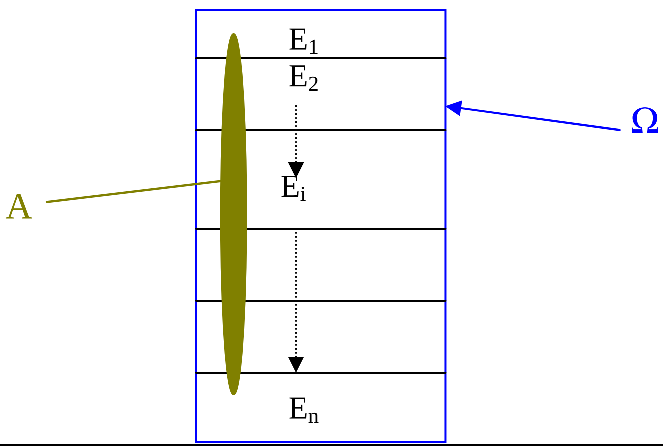
On dit que « n » évènements A_1, A_2, …, A_n sont indépendants s'ils sont :
* Indépendants deux à deux.
* Indépendants trois à trois.
* Indépendants « k » à « k ».
* Indépendants « n » à « n ».

IV- Théorème de BAYES :

Soient les évènements E_1, E_2, …, E_n. Tels que $E_i \cap E_j = \Phi$.

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$

On dit que E_1, E_2, …, E_n forment un système complet d'évènements.
On suppose connues : $P(E_1)$; $P(E_2)$; … ; $P(E_i)$; … ; $P(E_n)$. Appelées probabilités à priori.



« A » peut être causée par E_1, E_2, ….., ou E_n et on a :
$P(A/E_1)$; $P(A/E_2)$; ….. ; $P(A/E_n)$ connues.
* Le problème : c'est comment calculer $P(E_i/A)$

$$P(E_i/A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}.$$

$$= \frac{P(A \cap E_i)}{P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .... \cup (A \cap E_i) .... \cup (A \cap E_n)]}$$

$$= \frac{P(A \cap E_i)}{P(A \cap E_1) + ... + P(A \cap E_i) + ... + P(A \cap E_n)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)}.$$

$P(E_i/A)$ est appelée probabilité à posteriori de E_i

CHAPITRE 2 : VARIABLES ALÉATOIRES ET LEURS CARACTÉRISTIQUES.

I- Exemple et définition :

On jette deux dés équilibrés, et on s'intéresse à X = « somme des deux numéros obtenus ».
$\Omega = \{(1,1) ; (1,2) ; \ldots\ldots ; (6,6)\}$.
X est appelée variable aléatoire et on a : $X_{(\Omega)} = \{2, 3, \ldots., 11, 12\}$.
C'est l'ensemble de valeurs possibles de la variable aléatoire X, appelée aussi domaine de définition de X, et notée (D_x).

II- Variables aléatoires continues (ou à densité) :

1- Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue :

a- Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité de probabilité f si pour tout réel x. $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt$.

* F(x) est la fonction de répartition de X, et f est une fonction réelle à valeurs positives ayant un nombre fini de points éventuels de discontinuité, vérifiant de plus l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt = 1.$$

b- Caractérisation d'une densité de probabilité :

Toute fonction réelle f définie sur $\Re$ est une densité de la variable aléatoire X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

* $\forall x \in \Re$; $f(x) \geq 0$.
* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).dt = 1$
* f est continue sur $\Re$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points de discontinuité.

2- Fonction de répartition de variable aléatoire continue :

a- Définition :

La fonction de répartition F(x) d'une variable aléatoire continue X est la fonction qui fait correspondre à tout réel x le nombre réel égal à :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt.$$

b- Propriété d'une fonction de répartition :

* F(x) ≥ 0 ; est continue sur $\Re$.
  Elle est dérivable et sa dérivé F'(x) est continue sur $\Re$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points de discontinuité.

* En tout point « x_0 » de continuité d'une densité f, la fonction F est dérivable avec : $F'(x_0) = f(x_0)$.

* Toute fonction positive f sur $\Re$ qui coïncide avec « F' » en tout point de continuité de F'(x) est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
  $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

☛ Exemple :

Déterminer la fonction de répartition F liée à la densité de probabilité f définir par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si : } x \geq 1. \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

* Si : x ≥ 1 ; alors f(x) = 0 d'où F(x) = $\int_{-\infty}^{x} 0.dt = 0$.

* Si : x > 1 : F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{2}{t^2}.dt.$

$$= 0 + 2\,2\int_{1}^{x} t^{-3}.dt$$

$$= \left[2 - \frac{1}{t^3}\right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1.$$

En résumé : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si ; } x \leq 1. \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si ; } x > 1. \end{cases}$

3- Propriétés générales d'une variable aléatoire continue :

a- Propriétés générales :

Pour une variable aléatoire X continue et deux réels « a » et « b » tels que a ≤ b. on a les propriétés suivantes :

* $P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t).dt.$
* $P(a < X < b) = P(a \leq X < b). = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$
* $P(X > a) = P(X \geq a) = \int_{a}^{+\infty} f(t).dt$

* $P(X < b) = P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(t).dt$
* $P(X = a) = 0$ pour tout réel a.

b- Remarques :

P(X = a) = 0 ; signifie que l'évènement (X = a) est quasiment impossible.
En effet, $P(X = a) = P(a < X \le a) = \int_{a}^{a} f(t).dt$.

c- Exercice :

Des pièces de monnaie sont fabriquées en série. Leur diamètre devrait âtre égal à « d_0 », mais le diamètre effectif « d » des pièces fabriquées varie de manière totalement aléatoire. Soit X la variable aléatoire qui donne la différence « $d - d_0$ ». C'est une variable continue qui admet une densité « f » telle que :

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) & \text{si ; } -1 \le x \le 0. \\ a(-x+1) & \text{si ; } 0 \le x \le 1. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

a- Déterminer la valeur du paramètre « a » pour que « f » soit une densité de probabilité.
b- Trouver la fonction de répartition de X.

Solution :

4- Caractéristiques d'une variable aléatoire continue :

a- Espérance mathématique :

* **Définition :**

E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x).dx$.

F(x) existe si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x).dx$ est convergente (c'est-à-dire à un nombre réel fini).

* **Propriétés :**

E(X + Y) = E(X) + E(Y).
$E(\alpha X) = \alpha \times E(X)$.
E(a) = a (avec; $a \in \Re$).

b- Variance:

- **Définition:**

$V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 f(x).dx.$

V(X) existe si cette intégrale est convergente, sinon V(X) n'existe pas.

Ou bien ; $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Avec ; $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(x).d(x)$

- **Propriétés :**

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$. Si X et Y sont indépendants.

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \operatorname{cov}(X, Y)$. Si X et Y sont dépendants.

$V(\alpha X) = \alpha^2 \times V(X)$.

$V(\alpha X \times \beta) = \alpha^2 \times V(X)$.

c- Ecart-type:

C'est le nombre:

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Donc, $\sigma(X)$ (ou tout simplement σ) est positif.

CHAPITRE 3 : LOIS USUELLES

I- Loi de Bernoulli :

Dans une urne contenant des boules blanches en proportion « p » et des boules rouges en proportion « q = 1 – p ». On tire une boule.
Soit la variable aléatoire X = nombre de boules blanches obtenues.
X prend deux valeurs soit 0 soit 1.

$$X = \begin{cases} 1 : \text{si la boule tirée est blanche.} \\ 2 : \text{si la boule tirée est rouge.} \end{cases}$$

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.
$P(X = 1) = p$.
$P(X = 0) = q = 1 - p$.
On dit que X soit une loi de Bernoulli de paramètre p.
On note : $X \to B(p)$.
Ou bien : $X \to B(1, p)$.

* $E(X) = \sum x.p_x. = 0\times(1 - p) + 1p$.
$\Rightarrow E(X) = p$.

* $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$E(X^2) = 0^2\times(1 - p) + 1^2\times p = p$.
$V(X) = p - p^2 = p\times(1 - p) = pq$.

* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{pq}$.
On rappelle que la variable de Bernoulli est considérée comme une fonction indicatrice des individus présentant un certain caractère.

II- Loi binomiale :

1- Exemple et définition :

Dans une urne concernant 6 boules blanches et 4 boules noires, on tire, on remise, 3 boules.
Soit la variable aléatoire X = nombre des boules blanches obtenues.
X prend les valeurs : 0, 1, 2, 3.
On montre que : $P(X = x) = C_3^2 (0,6)^x (0,4)^{3-x}$.   avec x = 0, 1, 2, 3.

En général, on tire, sans remise, « n » boules dans une urne contenant des boules blanches en proportion « p » et si on considère la variable aléatoire X = nombre de boules blanches obtenues.
X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, …, n.
La probabilité que X prenne une valeur « x » est : $P(X = x) = C_n^x (p)^x (q)^{n-x}$. avec ; q = 1 – p.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres « n » et « p ».
On note : X $\rightarrow$ B(x, p).

III- Loi de poisson :

1- Définition :

Une valeur aléatoire X (discrète) soit une loi de poisson de paramètre λ lors qu'elle prend les valeurs entières 0, 1, 2 … avec les probabilités.

$$P_x = P(X = x) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^x}{x!}.$$

λ est un paramètre positif, e = 2,71828…

2- Caractéristiques :

E(X) = λ.
V(X) = λ.
σ(X) = $\sqrt{\lambda}$.

3- Conditions d'application :

La loi de poisson peut être introduite ;
- Soit comme un cas particulier de la loi binomiale, c'est la loi vers laquelle tend celui-ci lorsque le nombre « n » devient grand et « p » faible.
- Soit comme la résultante d'un processus aléatoire particulier, le processus de poisson.

CHAPITRE 4 : Lois usuelles continues

I- Loi normale :

1- Définition :

Une variable aléatoire X continue pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle soit une loi normale de paramètres « m » et « σ » si sa densité de probabilité est : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$. avec x∈ $\Re$.

T = 3,14157…

e = 5,71828 …

m = E(X) (m, c'est la moyenne).

σ = σ(X) = $\sqrt{V(X)}$ (σ, c'est l'écart type).

Or, x de X → N(m, σ).

2- Loi normale centrée réelle :

Si on considère : $T = \frac{X-m}{\sigma}$

T → N(0, 1).

* $E(T) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-m)$

$$= \frac{1}{\sigma}(E(X) - E(m)) = \frac{1}{\sigma}(m-m) = 0.$$

* $V(T) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-m).$

$$= \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1.$$

Donc, σ = 1.

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ Avec ; t∈ $\Re$.

f(t) est la densité de probabilité d'une loi normale centrée réduite.

3- Fonction de répartition d'une variable normale continue réduite :

C'est la fonction ∏(t) telle que : $\Pi(t) = P(T \langle t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x).dx.$

La fonction ∏(t) est tabulée.

4- Quelques relations à retenir :

* $P\left(T\langle t\right)=P\left(T\leq t\right)=\Pi(t).$
* $P\left(a\langle T\langle b\right)=\Pi(b)-\Pi(a).$
* $\Pi(-t)=1-\Pi(t).$
* $\Pi(t)=1-\Pi(-t).$
* $P\left(-t\langle T\langle t\right)=2\Pi(t)-1.$

II- Loi du khi deux (Khi carré) :

1- Définition :

Soit T_1, T_2, …, T_n, n variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. La somme de leurs carrées est variable aléatoire qui suit une loi de khi deux de paramètre γ appelé nombre de degrés de liberté.

EXERCICES

Exercice 1 :

Soient A, B et C trois événements, exprimez les événements suivants :

1- A seul se produit.
2- A et B se produisent et pas C.
3- A, B et C se produisent simultanément.
4- Au moins l'un des événements A, B ou C se produit.
5- Au moins deux événements se produisent.
6- Au plus deux événements se produisent.
7- Un est un seul se produit.
8- Deux seulement se produisent.
9- Aucun ne se produit.

Solution n° 1 :

1- $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
2- $A \cap B \cap \overline{C}$.
3- $A \cap B \cap C$.
4- $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$
$\cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.
5- $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.
6- $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$
$\cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \overline{A \cap B \cap C}$.
7- $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
8- $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.
9- $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Exercice 2 :

Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si :

a- Les répétitions sont autorisées ?
b- Les répétitions sont interdites ?
c- Les répétitions sont autorisées et le dernier chiffre doit être zéro ?

Solution n° 2 :

a- $C_9^1.C_{10}^1.C_{10}^1.C_{10}^1 = 9 \times 10^3 = 9000$.
$\Rightarrow C_9^1.A_9^3 = 9 \times 10^3 = 9000$.
b- $C_9^1.C_9^1.C_8^1.C_7^1 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.

$\Rightarrow C_9^1 . A_9^{\,3} = 9 \times \dfrac{9!}{(9-3)!} = 4536.$

c- $C_9^1 . C_{10}^1 . C_{10}^1 . C_1^1 = 900.$

$\Rightarrow C_9^1 . A_{10}^{\,2} .\ C_1^1 = 9 \times 1 \times 10^2 = 900.$

Exercice 3 :

On doit ranger sur une étagère 4 ouvrages de mathématiques différents, 6 ouvrages différents d'économie et 2 livres d'informatique différents. Combien y a-t-il de rangements différents si :

a- Les ouvrages doivent être rangés par spécialité ?
b- Seuls les ouvrages de maths doivent être rangés ensemble ?

Solution n° 3 :

a- $3! \times (4!\ 6!\ 2!) = 207360.$
b- $4!\ 9! = 8709120.$

Exercice 4 :

On doit former un groupe comprenant 2 hommes et 3 femmes sur la base d'un groupe plus large, formé de 5 hommes et 7 femmes. Quel est le nombre de possibilités si :

a- Le comité peut comprendre n'importe lequel des hommes et des femmes ?
b- Une femme particulière doit être membre du comité ?
c- Deux hommes particuliers doivent être exclu du comité ?

Solution n° 4 :

a- $C_5^2 . C_7^3 = 350$

b- $C_1^1 . C_6^2 . C_5^2 = 150$

c- $C_3^2 . C_7^3 = 105$

Exercice 5 :

Deux postes sont offerts dans une entreprise, postes qui peuvent indifféremment être occupés par un homme ou par une femme.
4 femmes et 2 hommes posent leur candidature et les chances de chacun des 6 postulants sont à priori équivalent :

a- Probabilité pour que les deux postes soient occupés par deux femmes ?
b- Probabilité pour que les deux postes soient occupés par deux hommes ?
c- Probabilité pour que les deux postes soient occupés par deux personnes de même sexe ?
d- Probabilité pour que les deux postes soient occupés par deux personnes de sexes différents ?

Solution n° 5 :

Exercice 6 :

Au cours d'un jeu radiophonique un speaker pose 5 questions à un candidat qui doit répondre par « oui » ou « non ». Le candidat est déclaré vainqueur s'il répond correctement à au moins 4 questions.
Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?

Solution n° 6 :

Exercice 7 :

On jette n fois deux dés :

a- Calculer la probabilité pour que le double six sorte au moins une fois ?
b- Combien de fois faut-il jeter les deux dès pour parier avec avantage d'obtenir au moins un double six ?

Solution n° 7 :

Exercice 8 :

Soient A et B deux évènements tel que $A \subset B$. Montrer que P(A) ≤ P(B).

Solution n° 8 :

On a: B = $A \cup (\overline{A} \cap B)$.
P(B) = P[$A \cup (\overline{A} \cap B)$].
= P(A) + P $(\overline{A} \cap B)$.
P(B) – P(A) = P $(\overline{A} \cap B) \geq 0$.
Donc P(B) – P(A) ≥ 0.
Et P(A) ≤ P(B).

Exercice 9 :

On considère deux évènements A et B tel que :
P(A) = 40% ; P(B) = 60% et P $(A \cup B)$ = 70%.

a- Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$.
b- Serait-il possible que $P(A\cap B)$ = 45% (les probabilités de A et B restent inchangées) ?

Solution n° 9 :

a- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Donc : $P(A/B)=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)} = \dfrac{0,4+0,6-0,7}{0,6}=\dfrac{0,3}{0,6}=0,5.$

$P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,3}{0,4}=0,75.$

b- non, on ne peut pas avoir $P(A\cap B)=45\%$.

En effet, si $P(A\cap B)=45\%$, on aurait :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ = 0,4 + 0,6 – 0,45 = 0,55 = 55%.

Ce qui n'est pas possible, d'où $P(A\cap B)\neq 45\%$

Exercice 10 :

On considère trois évènements A, B, C tels que :

P(A) = 0,1 ; P(B) = 0,3 ; P(C) = 0,4 ; $P(B/C)=\dfrac{1}{3}$.

Calculer les probabilités suivantes : $P(B\cap C)$; $P(B/\overline{C})$; $P(C/\overline{B})$; $P(\overline{C}/B)$; $P(\overline{B}/C)$; $P(\overline{B}\cap\overline{C})$; $P(C/B)$; $P(\overline{C}/\overline{B})$.

Solution n° 10 :

On sait que : $P(x\cap y)$ = P(x) ×$P(y/x)$ ou P(y) × $P(x/y)$.

* $P(B\cap C)$ = P(C) × $P(B/C)$ = $0,4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{0,4}{3}$.

* $P(B/\overline{C})=\dfrac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{P(B)-P(B\cap C)}{P(\overline{C})}$

$=\dfrac{P(B)-P(B\cap C)}{1-P(C)}=$

* $P(C/\overline{B})=\dfrac{P(C\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(B)-P(B\cap C)}{1-P(B)}=$

* $P(\overline{C}/B)=\dfrac{P(B\cap\overline{C})}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(B\cap C)}{P(B)}=$

* $P(\overline{B}/C)=\dfrac{P(\overline{B}\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P(B)-P(B\cap C)}{P(C)}$

Ou bien on peut le démontrer comme suit :

$P(\overline{B}/C) = 1 - P(B/C)$.

* $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{B}) \times P(\overline{C}/\overline{B}) = (1 - P(B) \times (1 - P(C/\overline{B})))$.

* $P(C/B) = \dfrac{P(C) \times P(B/C)}{P(B)}$

On sait que : $P(X/Y) = \dfrac{P(X) \times P(Y/X)}{P(Y)}$ ou bien $P(C/B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)}$.

* $P(\overline{C}/\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{C})}{P(B)}$

Ou bien : $P(\overline{C}/\overline{B}) = 1 - P(C/\overline{B})$.

Exercice 11 :

On considère un espace probabilité $(\Omega, P(\Omega), P)$ et trois évènements probabilités respectives P(A), P(B), P(C).

a- Montrer que $P(A \cap B) \geq P(A) - P(\overline{B})$.

b- Déduire que : $P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) - P(\overline{C})$.

c- Généraliser le résultat précédent au cas de n évènement A_1, A_2….A_n.

Solution n° 11 :

Exercice 12 :

Une boite I contient 3 billes rouges et 2 billes bleus, et une boite II contient 2 billes rouges et 8 billes bleus. On tire une bille de l'une des deux boites sachant que la bille est rouge, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée de la boite I ?

Solution n° 12 :

- La probabilité qu'on doit calculer est : $P(I/R)$.

Il faut connaître : $P(R/I) = \dfrac{3}{5}$.

$P(R/II) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

$P(I) = P(II) = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $P(I/R) = \dfrac{P(R \cap I)}{P(R)} = \dfrac{P(R \cap I)}{P[(R \cap I) \cup (R \cap II)]} = \dfrac{P(R \cap I)}{P(R \cap I) + P(R \cap II)}$

$= \dfrac{P(I) \times P(R/I)}{[P(I) \times P(R/I)] + [P(II) \times P(R/II)]} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 13 :

Sur 20 jetons, 8 sont noirs, 6 sont blancs et 6 possèdent une face blanche et une face noire.

a- On choisis au hasard un jeton que l'on jette. La face apparente étant blanche, quelle est la probabilité pour que la face cachée soit blanche ?

b- On effectue l'épreuve précédente n fois avec remise. Soit A l'évènement : sur les n épreuves, on obtient au moins une fois une face apparente blanche. Quelle valeur minimum de n, a-t-on P(A) = 0,99 ?

Solution n° 13 :

Soient les événements :
B : jetons à deux faces blanches ;
N : jetons à deux faces noires ;
M : jetons à une face noire et une face blanche ;
A : face apparente est blanche.

a- la probabilité qu'on doit calculer est la suivante : $P(B/A)$

B
N
M

$$P(A/B)=1 \qquad P(A/N)=0 \qquad P(A/M)=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{6}{20} \qquad P(N)=\frac{8}{20} \qquad P(M)=\frac{6}{20}.$$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P[(A\cap B)\cup(A\cap N)\cup(A\cap M)]}$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A\cap N)+P(A\cap M)}$$

$$= \frac{P(B)\times P(A/B)}{[P(B)\times P(A/B)]+[P(N)\times P(A/N)]+[P(M)\times P(A/M)]}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

b- soient les événements :

A_i = obtenir une face apparente blanche au inième jet ; avec i = 1, 2, …, n.

A' = obtenir au moins une fois une face apparente blanche.

P (A') ≥ 0,99

$$P(A') = P(A_1\cup A_2\cup .....\cup A_n).$$

$$= 1- P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup .....\cup A_n}\right).$$

$$= 1 - P\left(\overline{A_1}\cap \overline{A_2}\cap .....\cap \overline{A_n}\right).$$

$$= 1 - \left[P\left(\overline{A_1}\right)\times P\left(\overline{A_2}\right)\times ......\times P\left(\overline{A_n}\right)\right].$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n.$$

$$P(A') \geq 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n \geq 0{,}99.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{20}\right)^n \geq 0{,}01.$$

$$\Rightarrow \text{n. log}\left(\frac{11}{20}\right) \leq \text{Log }(0{,}01).$$

$$\Rightarrow \text{n} \geq \frac{\log 0{,}01}{\log\left(\frac{11}{20}\right)} = \frac{\log 0{,}01}{\log 11 - \log 20} = 7{,}7 \approx 8$$

Donc : n ≈ 8.

Ou bien, en utilisant la loi binomiale :
Soit la variable aléatoire :
x = nombre de faces apparentes blanches obtenues sur « n » jets.

$x \longrightarrow B(n, \frac{9}{20})$

(x suit une loi binominale de paramètres « n » et $\frac{9}{20}$).

Car : « n » est fixée et connue ; deux résultats contraires pour chaque épreuve ; indépendance des événements.

La probabilité demandée est P(A') = P(x≥ 1)

$$P(A') = 1 - P(x<1)$$
$$= 1 - P(x = 0)$$
$$= 1 - C_n^0\left(\frac{9}{20}\right)^0\left(\frac{11}{20}\right)^n = 1 - \left(\frac{11}{20}\right)^n$$

Exercice 14 :

Un appareil peut comporter des organes de haute qualité ou des organes de qualité courante. On admettra que 4096 des appareils ne comportent que des organes de haute qualité.

La probabilité pour qu'un appareil fonctionne sans défaillance pendant t heures est, on l'admettra ainsi, 0,95 s'il est composé d'organes de haute qualité et 0,7 s'il comporte des organes de qualité courante.

Un appareil a fonctionné T heures sans défaillance.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit constitué d'organe de haute qualité ? De qualité courante ?