Statistique inférentielle

Loi normale et lois continues

www.tifawt.com

Chapitre 2 : Loi normale et lois continues

Plan du Chapitre 2

1. **Loi normale (Loi de Laplace-Gauss)**
    - La courbe d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$
    - Remarque sur la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$
    - Loi normale centrée réduite
    - Remarque importante
    - Exemples de calcul des probabilités : cas d'une Loi normale centrée réduite
    - Corrections
    - Exemples de calcul des quantiles : cas d'une Loi normale centrée réduite
    - Corrections
    - Exercices
    - Réponses

I. Loi normale (Loi de Laplace-Gauss)

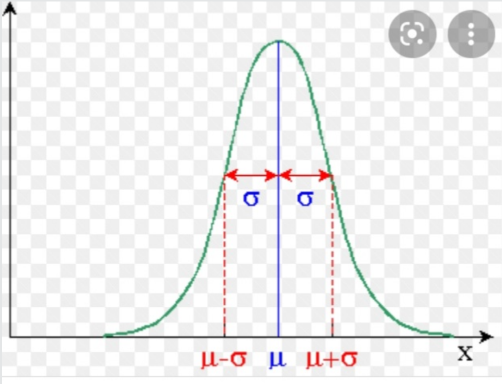
- La loi de Laplace-Gauss, communément appelée loi normale, est la loi de probabilité la plus utilisée pour modéliser des phénomènes aléatoires.
- Une loi normale est entièrement définie par son espérance μ et son écart-type σ. on note alors $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.
- Soit X une v.a. qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ ($X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$) alors :

  1) la fonction densité de X est définie par :
  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

  2) la fonction de répartion F de X est donnée par :
  $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

I.1 : La courbe d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

La représentation graphique d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ est une courbe en cloche.



I.2 : Remarque sur la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$

1) La loi normale est une loi symétrique et unimodale avec $E(X) = Me = Mo = \mu$;
2) La fonction densité de probabilité a deux points d'inflexion pour $\mu \pm \sigma$ avec $f(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$;
3) La fonction de répartition a un point d'inflexion pour $x = \mu$ avec $F(\mu) = 0.5$

I.3 : Loi normale centrée réduite)

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ alors la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans la pratique, on rencontre très souvent la loi normale. Afin d'éviter le calcul numérique de sa fonction de répartition pour chaque application, on utilise la loi normale centrée réduite dont les valeurs sont tabulées.

I.4 : Remarque importante

Si Z est une v.a.distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors on a :

1. $P(Z \geqslant z) = 1 - P(Z \leqslant z)$
2. $P(Z \leqslant -z) = P(Z \geqslant z)$
3. $P(Z \leqslant -z) = 1 - P(Z \leqslant z)$
4. De plus on a :
   $P(X \leqslant x) = P(X < x)$ et $P(X \geqslant x) = P(X > x)$ pour toute variable aléatoire continue X.

I.5 : Exemples de calcul des probabilités : cas d'une Loi normale centrée réduite

Soit Z une v.a.distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer les probabilités suivantes :

1) $P(Z \leqslant 0.52)$, $P(Z \leqslant 0)$, $P(Z \leqslant 2.52)$, $P(Z \leqslant 3.21)$
2) $P(Z \geqslant 1.22)$, $P(Z \geqslant 2.52)$, $P(Z \geqslant 0.25)$
3) $P(Z \leqslant -0.32)$, $P(Z \leqslant -1.52)$, $P(Z \leqslant -2.01)$
4) $P(Z \geqslant -2.31)$, $P(Z \geqslant -1.27)$, $P(Z \geqslant -4.5)$
5) $P(Z \leqslant 2.357)$, $P(Z \geqslant 3.123)$, $P(Z \geqslant -2.658)$

I.6 : Réponses

1. calcul de $P(Z \leqslant 0.52)$
   La lecture directe dans la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que : $P(Z \leqslant 0.52) = 0.6985$
2. calcul de $P(Z \leqslant 0)$
   La lecture directe dans la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que : $P(Z \leqslant 0) = 0.5$
3. calcul de $P(Z \leqslant 2.52)$
   La lecture directe dans la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que : $P(Z \leqslant 2.52) = 0.9941$
4. calcul de $P(Z \leqslant 3.21)$
   La lecture directe dans la table de la loi normale centrée réduite, on trouve que : $P(Z \leqslant 3.21) = 0.9986$

I.6 : Réponses

1. 2) Calcul de $P(Z \geqslant 1.22)$ on utilise l'événement contraire alors :

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant 1.22) &= 1 - P(Z \leqslant 1.22) \\ &= 1 - 0.8888 = 0.1112 \end{aligned}$$

2. 2) Calcul de $P(Z \geqslant 2.52)$ on utilise l'événement contraire alors :

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant 2.52) &= 1 - P(Z \leqslant 2.52) \\ &= 1 - 0.9941 = 0.0059 \end{aligned}$$

I.6 : Réponses

1. 3) Calcul de $P(Z \leqslant -0.32)$ on utilise la relation suivante :

$$P(Z \leqslant -z) = 1 - P(Z \leqslant z)$$

alors :

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant -0.32) &= 1 - P(Z \leqslant 0.32) \\ &= 1 - 0.6255 = 0.3745 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant -1.52) &= 1 - P(Z \leqslant 1.52) \\ &= 1 - 0.9357 = 0.0643 \end{aligned}$$

I.6 : Réponses

1. 4) Calcul de $P(Z \geqslant -2.31)$ on utilise la relation suivante (la symétrie) :

$$P(Z \geqslant -z) = P(Z \leqslant z)$$

alors :

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant -2.31) &= P(Z \leqslant 2.31), \textit{ (lecture directe sur la table)} \\ &= 0.9896 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant -1.27) &= P(Z \leqslant 1.27) \\ &= 0.8980 \end{aligned}$$

I.6 : Réponses

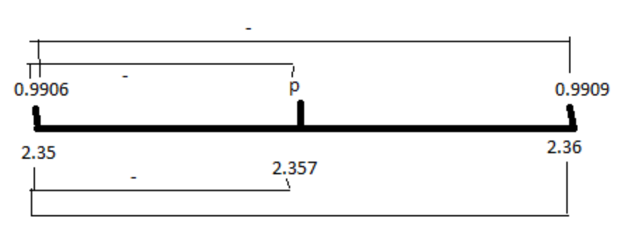
1. 5) Calcul de $P(Z \leqslant 2.357)$ il y a deux méthodes pour calculer cette probabilité :

   • Méthode 1 : on fait l'arrondissement de la valeur 2.357 à deux après la virgule, donc $2.357 \simeq 2.36$.

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant 2.357) &= P(Z \leqslant 2.36), \textit{ (la table donne)} \\ &= 0.9909 \end{aligned}$$

I.6 : Réponses

- Méthode 2 :on fait l'interpolation linéaire :



$$\begin{aligned}
\frac{p-0.9906}{0.9909-0.9906} &= \frac{2.357-2.35}{2.36-2.35} \\
\frac{p-0.9906}{0.0003} &= \frac{0.007}{0.01} = 0.7 \\
p &= 0.9906 + 0.0003 \times 0.7 \\
p &= 0.99081
\end{aligned}$$

I.7 : Exemples de calcul des quantiles cas d'une Loi normale centrée réduite)

Soit Z une v.a.distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer le quantile z dans les cas suivants :

1) $P(Z \leqslant z) = 0.7910$, $P(Z \leqslant z) = 0.6555$, $P(Z \leqslant z) = 0.3456$
2) $P(Z \geqslant z) = 0.7$, $P(Z \geqslant z) = 0.3245$, $P(Z \geqslant z) = 0.9066$

I.8 : Réponses

Pour calculer les quantiles en utilisant la table de $\mathcal{N}(0,1)$, il faut toujours rendre la probabilité en question sous la forme $P(Z \leqslant z) = p$ avec $p \geqslant 0.5$

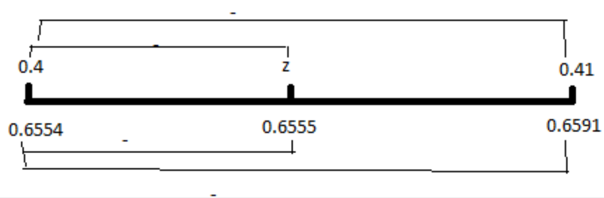
- 1) Trouver la valeur de z telle que : $P(Z \leqslant z) = 0.7910$
- On remarque que $P(Z \leqslant z)$ et que $0.7910 \geqslant 0.5$
- La procédure à suivre est la suivante :
  Si la probabilité (0.7910) existe dans la table de $\mathcal{N}(0,1)$, alors on déduit directement la valeur de z dans notre cas on a $z = 0.81$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066

I.8 : Réponses

- 2) Trouver la valeur de z telle que : $P(Z \leqslant z) = 0.6555$
- On remarque que $P(Z \leqslant z)$ et que $0.6555 \geqslant 0.5$
- La probabilité (0.6555) n'existe pas dans la table de $\mathcal{N}(0,1)$,
- Méthode 1 : On cherche dans la table $\mathcal{N}(0,1)$ la valeur la plus proche de 0.6555, dans notre cas $0.6555 \simeq 0.6554$ de quantile 0.40 alors $z = 0.40$.
- Méthode 2 : on fait l'interpolation linéaire
  Dans ce cas on fait un encadrement de la probabilité 0.6555 à partir de la table de $\mathcal{N}(0,1)$ alors :

I.8 : Réponses

- 

-

$$
\begin{aligned}
\frac{z-0.4}{0.41-0.4} &= \frac{0.6555-0.6554}{0.6591-0.6554} \\
\frac{z-0.4}{0.01} &= \frac{0.0001}{0.0037} \\
&= 0.0270 \\
z &= 0.4+0.027\times 0.01 \\
z &= 0.40027
\end{aligned}
$$

I.8 : Réponses

- Trouvons z t.q $P(Z \leqslant z) = 0.3456$
- On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant z) &= 1 - P(Z \leqslant z) \\ &= 1 - 0.3456 \\ P(Z \geqslant z) &= 0.6544 \end{aligned}$$

- De plus on a l'égalité suivante : $P(Z \geqslant z) = P(Z \leqslant -z)$, alors
- $P(Z \leqslant -z) = 0.6544$ qui est proche de 0.6554 de quantile 0.4 (table), alors $-z = 0.4$ ce qui donne $z = -0.4$

I.8 : Réponses

- Trouvons z t.q $P(Z \geqslant z) = 0.7$
- On a la relation suivante :$P(Z \geqslant z) = P(Z \leqslant -z)$, alors
- $P(Z \leqslant -z) = 0.7$ qui est proche de 0.6985 de quantile 0.52 (table), alors $-z = 0.52$ ce qui donne $z = -0.52$

I.9 : Exercices

Exercice 1 :

A l'issue des épreuves de vocabulaire que subissent, à la rentré, tous les élèves de 6ème. On a obtenu une moyenne de 42.5 points sur 60, assortie d'un écart- type de 14, les scores se repartissent normalement (i.e selon une loi Normale).

1) Quelle est la proportion d'élèves qu'ont des notes inférieures à 51.5 ?
2) Quelle est la proportion d'élèves qu'ont des notes supérieures à 31 ?
3) Au dessus de quelle note se situent 80% des élèves ? et 30% ?
4) Déterminer le premier quartile Q_1, déduire le troisième quartile Q_3

I.10 : Réponse

On note par X le score des élèves obtenu dans cette épreuve de vocabulaire. on a supposé que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(42.5, 14)$

1) Calculons la proportion des élèves qu'ont des notes inférieure à 51.5.

- Il faut calculer $P(X \leqslant 51.5)$ (pour le calcul il faut toujours utiliser la loi centrée réduite)
-

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 51.5) &= P(\frac{X-42.5}{14} \leqslant \frac{51.5-42.5}{14}) \\
&= P(Z \leqslant 0.64) \\
&= 0.7389
\end{aligned}
$$

73.89% des élèves ont des notes inférieures à 51.5

I.10 : Réponse

2) Calculons la proportion des élèves qu'ont des notes supérieures à 31.

- On cherche à calculer $P(X \geqslant 31)$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 31) &= P(\frac{X-42.5}{14} \geqslant \frac{31-42.5}{14}) \\ &= P(Z \geqslant -0.82) \\ &= P(Z \leqslant 0.82) = 0.7939 \end{aligned}$$

79.39% des notes sont supérieures à 31.

I.10 : Réponse

3) On cherche t t.q au dessus de t on a 80% des élèves.

- i.e on cherche t t.q $P(X \geqslant t) = 0.8$
-

$$\begin{aligned} P(X \geqslant t) &= P(\frac{X-42.5}{14} \geqslant \frac{t-42.5}{14}) \\ &= P(Z \geqslant z) = 0.8, avec\, z = \frac{t-42.5}{14} \\ &= P(Z \leqslant -z) = 0.8 \end{aligned}$$

I.10 : Réponse

- 0.8 est proche 0.7995 (voir la table) de quantile 0.84, alors
-

$$\begin{aligned} -z &= 0.84 \Rightarrow z = -0.84, avec\, z = \frac{t-42.5}{14} \\ \frac{t-42.5}{14} &= -0.84 \Rightarrow t-42.5 = 14 \times (-0.84) \\ t &= 30.74 \end{aligned}$$

80% des élèves se situent au dessus de la note 30.74

I.10 : Réponse

4) Calculons le premier quartile Q_1.

- i.e on cherche Q_1 t.q $P(X \leqslant Q_1) = 0.25$ ou $P(X \geqslant Q_1) = 0.75$
-

$$\begin{aligned} P(X \geqslant Q_1) &= P(\frac{X-42.5}{14} \geqslant \frac{Q_1-42.5}{14}) \\ &= P(Z \geqslant z) = 0.75, avec\, z = \frac{Q_1-42.5}{14} \\ &= P(Z \leqslant -z) = 0.75 \end{aligned}$$

I.10 : Réponse

- 0.75 est proche 0.7486 (voir la table)de quantile 0.67, alors
-

$$\begin{aligned} -z &= 0.67 \Rightarrow z = -0.67, avec\, z = \frac{Q_1 - 42.5}{14} \\ \frac{Q_1 - 42.5}{14} &= -0.67 \Rightarrow Q_1 - 42.5 = 14 \times (-0.67) \\ Q_1 &= 33.12 \end{aligned}$$

Au moins 25% des élèves ont des notes inférieures à 33.12

I.9 : Exercices

Exercice 2 :

On suppose que la note (X) est distribuée normalement dans une population d'élèves, avec une moyenne de 11 (sur 20) et un écart-type de 4.

1) Quelle est la proportion d'élèves qu'ont des notes supérieures à 14 ?

2) Quelle proportion d'élèves ayant une note inférieure à 10 ?

3) Quelle est la proportion d'élèves qu'ont des notes comprises entre 7 et 15 ?

4) Donner un intervalle centré autour de la moyenne qui contient 65% des élèves.

5) Déterminer le premier quartile.

6) Déterminer le troisième décile. Interpréter

7) Parmi les élèves ayant une note plus de 12, quel est le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure à 15 ?

Réponse 2

On note par X la note des élèves. on a supposé que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(11,4)$

1) Calculons la proportion des élèves qu'ont des notes supérieures à 14.

- Il faut calculer $P(X \geqslant 14)$ (pour le calcul il faut toujours utiliser la loi centrée réduite))
- $$\begin{aligned} P(X \geqslant 14) &= P(\frac{X-11}{4} \geqslant \frac{14-11}{4}) \\ &= P(Z \geqslant 0.75) \\ &= 1 - P(Z \leqslant 0.75) = 1 - 0.7734 \\ &= 0.2266 \end{aligned}$$

22.66% des élèves ont des notes supérieures à 14.

Réponse 2

2) Calculons la proportion des élèves qu'ont des notes inférieures à 10.

- On cherche à calculer $P(X \leqslant 10)$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 10) &= P(\frac{X-11}{4} \leqslant \frac{10-11}{4}) \\ &= P(Z \leqslant -0.25) = P(Z \geqslant 0.25) \\ &= 1 - P(Z \leqslant 0.25) = 1 - 0.5987 \\ &= 0.4013 \end{aligned}$$

40.13% des notes sont inférieures à 10.

Réponse 2

3) Calculons la proportion d'élèves qu'ont des notes comprise entre 7 et 15.

- i.e on cherche à calculer $P(7 \leqslant X \leqslant 15)$
-

$$
\begin{aligned}
P(7 \leqslant X \leqslant 15) &= P\left(\frac{7-11}{4} \leqslant \frac{X-11}{4} \leqslant \frac{15-11}{4}\right) \\
&= P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) \\
&= P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant -1) \\
&= 2P(Z \leqslant 1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 \\
&= 0.6826
\end{aligned}
$$

68.26% des élèves ont des notes comprise entre 7 et 15.

Réponse 2

4) Donnons un intervalle centré autour de la moyenne qui contient 65% des élèves.i.e cherchons un intervalle de la forme $[11-t;11+t]$ qui contient 65% des notes.

- i.e on cherche t t.q $P(11-t \leqslant X \leqslant 11+t) = 0.65$
- $P(11-t \leqslant X \leqslant 11+t) = P(\frac{11-t-11}{4} \leqslant \frac{X-11}{4} \leqslant \frac{11+t-11}{4})$

$$\begin{aligned} &= P(-\frac{t}{4} \leqslant Z \leqslant \frac{t}{4}) \\ &= 2P(Z \leqslant \frac{t}{4}) - 1 = 0.65 \\ &= P(Z \leqslant \frac{t}{4}) = 0.825 \end{aligned}$$

0.825 est proche de 0.8238 de quantile 0.93, alors $\frac{t}{4} = 0.93$,donc $t = 3.72$. L'intervalle $[7.28;14.72]$ contient 65% des notes.

Réponse 2

5) Calculons le premier quartile Q_1.

- i.e on cherche Q_1 t.q $P(X \leqslant Q_1) = 0.25$ ou $P(X \geqslant Q_1) = 0.75$
- $$\begin{aligned} P(X \geqslant Q_1) &= P(\frac{X-11}{4} \geqslant \frac{Q_1-11}{4}) \\ &= P(Z \geqslant z) = 0.75, avec\, z = \frac{Q_1-11}{4} \\ &= P(Z \leqslant -z) = 0.75 \end{aligned}$$

Réponse 2

- 0.75 est proche 0.7486 (voir la table)de quantile 0.67, alors
-

$$\begin{aligned} -z &= 0.67 \Rightarrow z = -0.67, avec\, z = \frac{Q_1 - 11}{4} \\ \frac{Q_1 - 11}{4} &= -0.67 \Rightarrow Q_1 - 11 = 4 \times (-0.67) \\ Q_1 &= 8.32 \end{aligned}$$

Au moins 25% des élèves ont des notes inférieures à 8.32

Réponse 2

6) Calculons le troisième décile D_3.

- i.e on cherche D_3 t.q $P(X \leqslant D_3) = 0.3$ ou $P(X \geqslant D_3) = 0.7$
-

$$
\begin{aligned}
P(X \geqslant D_3) &= P(\frac{X-11}{4} \geqslant \frac{D_3-11}{4}) \\
&= P(Z \geqslant z) = 0.7, avec\, z = \frac{D_3-11}{4} \\
&= P(Z \leqslant -z) = 0.7
\end{aligned}
$$

Réponse 2

- 0.7 est proche 0.6985 (voir la table)de quantile 0.52, alors
-

$$\begin{aligned} -z &= 0.52 \Rightarrow z = -0.52, avec\, z = \frac{D_3 - 11}{4} \\ \frac{D_3 - 11}{4} &= -0.52 \Rightarrow D_3 - 11 = 4 \times (-0.52) \\ D_3 &= 8.92 \end{aligned}$$

Au moins 30% des élèves ont des notes inférieures à 8.92

Réponse 2

7) Parmi les élèves ayant une note plus de 12, quel est le pourcentage d'élèves ayant une note inférieure à 15 ?

- i.e on cherche à calculer $P(X \leqslant 15/X \geqslant 12)$
-

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 15/X \geqslant 12) &= \frac{P(X \leqslant 15 et X \geqslant 12)}{P(X \geqslant 12)} \\
\frac{P(12 \leqslant X \leqslant 15)}{P(X \geqslant 12)} &= \frac{P(\frac{12-11}{4} \leqslant \frac{X-11}{4} \leqslant \frac{15-11}{4})}{P(\frac{X-11}{4} \geqslant \frac{12-11}{4})} \\
\frac{P(0.25 \leqslant Z \leqslant 1)}{P(Z \geqslant 0.25)} &= \frac{P(Z \leqslant 1) - P(Z \leqslant 0.25)}{1 - P(Z \leqslant 0.25)} \\
&= \frac{0.8413 - 0.5987}{1 - 0.5987} = 0.6045
\end{aligned}$$