UNIVERSITE IBN ZOHR
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

S5

Recherche Opérationnelle
Série3: La méthode du simplexe

PR. O.CHADLI

Rappel sur le principe de la résolution par la méthode du simpléxe

Marche à suivre de la résolution par la méthode des tableaux.

1- Déterminer la colonne (sauf la dernière) dont l'élément de la dernière ligne a la plus grande valeur positive. C'est la colonne du pivot.

2- Déterminer la ligne du pivot en faisant le rapport des éléments de la dernière colonne sur les éléments correspondants de la colonne du pivot. La ligne du pivot étant celle donnant le plus petit rapport non négatif.

3- Rendre le pivot unitaire.

4- Annuler tous les termes de la colonne du pivot.

5- Répéter les quatre premières étapes jusqu'à ce que tous les éléments de la dernière ligne soient non positifs.

6- Les colonnes ne contenant qu'un seul élément non nul sont celles correspondant aux variables dans le programme; la valeur de ces variables est donnée dans la dernière colonne, les variables hors programme étant nulles.

7- La valeur maximale de la fonction économique (plus exactement son opposé) est donnée dans la dernière ligne, dernière colonne.

Exercice 1 :
L'entreprise AZT fabrique trois produits qui sont en grande demande. Le responsable de la production veut déterminer un programme de fabrication qui permettrait d'obtenir l'utilisation optimale de ces ressources. Il a l'information suivante :

Ressources	Quantités disponibles
Matières premières:	
Matériel AX-200	2000 unités
Matériel AX-225	1800 unités
Temps-machine:	
Département montage	60 heures
Département contrôle	60 heures
Département emballage	72 heures
Main-d'oeuvre:	80 heures

Quantité nécessaire pour la fabrication:

Ressources	Produit A	Produit B	Produit C
Matériel AX-200	4	5	2
Matériel AX-225	2	5	4
Temps-machine (mn/unité):			
Dép. montage	10	8	10
Dép. contrôle	12	10	6
Dép. emballage	8	6	6
Main d'oeuvre (mn/unité):	15	20	15

Information coût-revenu:

	Produit A	Produit B	Produit C
Prix de vente	15 DH	19.40 DH	15 DH
Coûts/unité			
Matériel AX-200	2 DH	3 DH	2 DH
Matériel AX-225	3 DH	5 DH	4 DH
Main-d'oeuvre	4 DH/heure	4.20 DH/heure	4 DH/heure

L'entreprise veut maximiser les bénéfices.

1- Déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en oeuvre.

2- Déterminer d'après le programme obtenu en 1), l'utilisation réelle de chaque ressource de l'entreprise.

Exercice 2 :
Résoudre par la méthode du simplexe (méthode des tableaux) le programme linéaire suivant

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [3\ x_1 + 6\ x_2 - \ x_3 + x_4] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + (1/2)x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 3 :
Résoudre par la méthode du simplexe (méthode des tableaux) le programme linéaire suivant

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } [z = 2\ x_1 + 3\ x_2 + \ x_3] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 4 :
Résoudre par la méthode du simplexe (méthode des tableaux) le programme linéaire suivant

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

UNIVERSITE IBN ZOHR
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales
Agadir

Année Universitaire 2014-2015

S5

Recherche Opérationnelle
Corrigé de la série 3: Résolution par la méthode des tableaux

Pr. O.Chadli

Exercice 1

1- Notons par x_1, x_2 et x_3 respectivement les quantités des produits A, B et C fabriqués par la société.

- *Contraintes de signes*: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.
- *Contraintes économiques*:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{4}{30}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \leq 60 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{10}x_3 \leq 60 \\ \frac{4}{30}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 \leq 72 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 80 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1800 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 2160 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 960 \end{cases}$$

- *Fonction économique*: On détermine le bénéfice unitaire réalisé par la vente de chaque produit. On le fera pour le produit A et de façon similaire on le déduira pour les autres produits. Notons ce bénéfice par b_A, b_B et b_C. Alors, on a

$$\begin{aligned} b_A &= 15 - (2 + 3 + \alpha) \\ b_A &= 19.40 - (3 + 5 + \beta) \\ b_A &= 15 - (2 + 3 + \gamma), \end{aligned}$$

où α, β et γ représentent respectivement le coût de la main-d'oeuvre pour produire une unité des produits A, B et C. On sait que pour produire A la main-d'oeuvre coute 4 Dh l'heure et la fabrication d'une unité de A nécessite 15 minutes de main-d'oeuvre. Par conséquent le coût en main-d'oeuvre pour produite une unité de A est $\alpha = 1$ Dh. De la même manière on calcule β et γ et on trouve $\beta = 1.4$ Dh, $\gamma = 1$ Dh. Par suite la fonction économique est donnée par :

$$z = 9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3.$$

Le programme canonique (I) pour l'entreprise est donc

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \text{Max } [9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3] \\ \text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1800 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 2160 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 960 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme canonique}$$

Le programme standard (I') est donné par :

$$
(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_5 = 1800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_6 = 1800 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_7 = 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_8 = 2160 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_9 = 960 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0,\ x_8 \geq 0,\ x_9 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}
$$

Tableau (0):

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160
9	3	4	3	0	0	0	0	0	1	960
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	

La solution de base de départ est :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2000,\ x_5 = 1800,$$

$$x_6 = 1800,\ x_7 = 1800,\ x_8 = 2160,\ x_9 = 960$$

Première itération:

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C	R
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000	(2000/5)=400
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800	(1800/5)=360
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800	(1800/4)=450
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800	(1800/5)=360
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160	(2160/3)=720
9	3	4	3	0	0	0	0	0	1	960	(960/4)=240
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	z	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_9
Pivot: 4.

On divise la ligne correspondant au pivot par le pivot 4, ce qui donne

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160
9	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	

On procède par la suite à l'élimination de x_2 dans les lignes 1,2,3,4, 5 et Δ. Pour cela,

- pour éliminer x_2 de la ligne 1, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 1;
- pour éliminer x_2 de la ligne 2, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 2;
- pour éliminer x_2 de la ligne 3, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 4 et on la retranche à la ligne 3;
- pour éliminer x_2 de la ligne 4, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 4;
- pour éliminer x_2 de la ligne 5, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 3 et on la retranche à la ligne 5;
- pour éliminer x_2 de la ligne Δ, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 10 et on la retranche à la ligne Δ.

Tableau (1):

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840
7	9/4	0	(-3)/4	0	0	0	1	0	(-5)/4	600
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 0,\ x_2 = 240,\ x_3 = 0,\ x_4 = 875,\ x_5 = 600,$$

$$x_6 = 840,\ x_7 = 600,\ x_8 = 1440,\ x_9 = 0$$

qui constituera la solution de base de départ pour atteindre la prochaine solution de base extrême (ou prochain sommet).

Deuxième itération:

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C	R
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875	3500
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600	(-2400)/7
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840	420
7	$\boxed{9/4}$	0	(-3)/4	0	0	0	1	0	(-5)/4	600	$\boxed{800/3}$
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440	5760/7
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240	320
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_7
Pivot: 9/4.

On divise la ligne correspondant au pivot par le pivot 9/4, ce qui donne

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840
7	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400

Tableau (2):

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800

La deuxième itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 800/3,\ x_2 = 40,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2425/3,\ x_5 = 3200/3,$$

$$x_6 = 920/3,\ x_7 = 0,\ x_8 = 2920/3,\ x_9 = 0$$

Troisième itération:

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C	R
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3	-485
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3	-3200
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3	115
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3	-800
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3	5840/57
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40	$\boxed{40}$
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800	

Variable entrante: x_3
Variable sortante: x_2
Pivot: 1.

Le pivot est égal à 1, donc nous n'avons pas à faire de division.

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800

On élimine x_3 des lignes 2,3,4,5,6 et 8.

B \ HB	·	2	·	·	·	·	7	·	9	C
4	0	5/3	0	1	0	0	(-2)/3	0	0	875
5	0	1/3	0	0	1	0	2/3	0	-2	1080
6	0	(-8)/3	0	0	0	1	(-16)/9	0	(-5)/3	200
1	1/3	0	0	0	0	0	1/3	0	(-7)/9	280
8	0	(-19)/2	0	0	0	0	43/18	1	(-55)/9	1780/3
3	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	-1	0	0	0	0	(-1)/3	0	(-7)/3	z-2840

On constate que tous les coefficients sur la ligne Δ sont négatifs, on arrète les itérations et donc on a atteint la solution optimale du programme standard. Elle correspond à

$$x_4 = 875,\ x_5 = 1080,\ x_6 = 200,\ x_1 = 280,\ x_8 = 1780/3,\ x_3 = 40;$$

$$x_2 = 0,\ x_7 = 0,\ x_9 = 0.$$

La solution optimale du programme cononique est donc

$$x_1^* = 280,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 40.$$

La valeur maximale de la fonction économique est : $z^* = 2840$. Le programme pour l'entreprise est donc

$$(280; 0; 40)$$

2- Puisque à l'optimum on a $x_7 = 0,\ x_9 = 0$, alors l'entreprise exploite entièrement ses ressources en main-d'oeuvre ainsi que le départment de contrôle. Les autres ressources ne sont pas entièrement exploitées.

Exercice 2

Le programme cononique (I) est donné par

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \text{Max } [3\ x_1 + 6\ x_2 -\ x_3 + x_4] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + (1/2)x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

Le programme standard (I') est donné par

$$(\mathrm{I'})\quad \begin{cases} \text{Max } [3\ x_1 + 6\ x_2 -\ x_3 + x_4 + 0\ x_5 + 0\ x_6 + 0\ x_7] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + (1/2)x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_7 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \\ \ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

Tableau (0):

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2
6	1	3	1	-1	0	1	0	3
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4
Δ	3	6	-1	1	0	0	0	z

Première itération:

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C	R
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2	4
6	1	$\boxed{3}$	1	-1	0	1	0	3	$\boxed{1}$
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4	-4
Δ	3	$\boxed{6}$	-1	1	0	0	0	z	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_6
Pivot: 3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 3. On obtient

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2
6	1/3	$\boxed{1}$	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4
Δ	3	6	-1	1	0	0	0	z

Tableau (1):

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	7/3	0	(-2)/3	8/3	0	1/3	1	5
Δ	1	0	-3	3	0	-2	0	z-6

La première itération nous amène donc à la solution de base

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3/2,\ x_6 = 0,\ x_7 = 5.$$

La valeur de la fonction économique pour cette solution de base: $z = 6$.

Deuxième itération:

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C	R
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2	9
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1	-3
7	7/3	0	(-2)/3	$\boxed{8/3}$	0	1/3	1	5	$\boxed{15/8}$
Δ	1	0	-3	$\boxed{3}$	0	-2	0	z-6	

Variable entrante: x_4
Variable sortante: x_7
Pivot: 8/3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 8/3. On obtient

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	7/8	0	(-1)/4	$\boxed{1}$	0	1/8	3/8	15/8
Δ	1	0	-3	$\boxed{3}$	0	-2	0	z-6

Tableau (2):

B \ HB	1	·	3	·	·	6	7	C
5	11/6	0	7/8	0	1	(-3)/16	(-1)/16	19/16
2	5/8	1	1/4	0	0	3/8	1/8	13/8
4	7/8	0	(-1)/4	1	0	1/8	3/8	15/8
Δ	(-13)/8	0	(-9)/4	0	0	(-19/8)	(-9/8)	z-(93/8)

On observe que tous les coefficients sur la ligne Δ sont négatifs, donc on arrète les itérations et par suite nous avons atteint la solution optimale du programme standard:

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_5 = 19/16,\ x_2 = 13/8,\ x_4 = 15/8.$$

La solution optimale du programme canonique est donc

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 13/8,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 15/8.$$

La valeur maximale de z est donc $z^* = 93/8$.

Exercice 3

Le programme linéaire considéré dans cet exercice est le suivant:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2] \\ \text{s.c.} \begin{cases} 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme canonique}$$

En introduisant les variables d'écarts, le programme standard (I') est comme suite

$$(\mathrm{I'}) \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2] \\ \text{s.c.} \begin{cases} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

Pour le programme standard (I'), comme on le voit bien, on ne peut pas déterminer facilement une solution de base de départ. En effet, si on prend $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, alors les contraintes ne sont pas vérifées; plus précisement la deuxième équation n'est pas verifée et la troisième équation nous donne une valeur de $x_4 = -6$ qui est négative. Donc on doit faire intervenir des variables artificielles x_5 et x_6 au niveau des équations où il y a un problème de vérification des contraintes, ç.a.d. les équations 2 et 3. Les variables artificielles doivent intervenir dans la fonction économique avec un coefficient M très élevé (dans le but que une fois une variable artificielle passe hors- base elle ne reviendra plus jamais dans la base, et donc à l'optimum elle sera nulle et comme ça on n'aurra pas modifié le programme linéaire étudié). Le programme linéaire devient

$$(\mathrm{II'}) \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6] \\ \text{s.c.} \begin{cases} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0, \ x_6 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Considérons le système

$$(S_0) \quad \begin{cases} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 + x_6 = 6. \end{cases}$$

Tableau initial (0) et Calcul des taux marginaux de substitution (TMS):

Variables hors-base: x_1, x_2, x_4

Variables dans la base: x_3, x_5, x_6.

Le calcul du TMS pour chaque variable hors-base se base sur le principe suivant: On calcul la diffrérence entre ce que coûte une unité d'une variable hors-base et ce que coûte son équivalent en unités de variables dans la base.

- TMS pour x_1: On prend dans (S_0) les variables $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$, on obtient

$$(S_0) \quad \begin{cases} 0.3x_1 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + x_6 = 6 \end{cases}$$

Par conséquent, faire augmenter x_1 de une unité est équivalent à faire diminuer x_3 de 0.3 unité, x_5 de 0.5 unité et x_6 de 0.6 unité.
D'après la fonction économique, 1 unité de x_1 coûte 0.4; 0.3 unité de x_3 coûte $0 \times 0.3 = 0$; 0.5 unité de x_5 coûte $0.5 \times M$ et 0.6 unité de x_6 coûte $0.6 \times M$. Par suite,

$$\text{Le TMS pour } x_1 \text{ est égal à } (0.4 - 1.1M).$$

- TMS pour x_2: On prend dans (S_0) les variables $x_2 = 1$ et $x_4 = 0$, on obtient

$$(S_0) \quad \begin{cases} 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.4x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

Par conséquent, faire augmenter x_2 de une unité est équivalent à faire diminuer x_3 de 0.1 unité, x_5 de 0.5 unité et x_6 de 0.4 unité.
D'après la fonction économique, 1 unité de x_2 coûte 0.5; 0.3 unité de x_3 coûte $0 \times 0.1 = 0$; 0.5 unité de x_5 coûte $0.5 \times M$ et 0.4 unité de x_6 coûte $0.4 \times M$. Par suite,

$$\text{Le TMS pour } x_2 \text{ est égal à } (0.5 - 0.9M).$$

- TMS pour x_4: En prenant $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ dans (S_0), on obtient qu'une augmentation de x_4 de une unité lui correspond une augmentation de x_6 de une unité. Par suite

$$\text{Le TMS pour } x_3 \text{ est égal à } (0 - (-M)) = M.$$

$(-M)$ provient du faite qu'une augmentation de 1 unité dans x_4 lui correspond une augmentation dans x_6, à la différence des autres variables où une aumentation dans la valeur de la variable est suivie par une dimunition dans celle des autres variables équivalentes.

Tableau (0):

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B
3	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6
C	0.4	0.5	0	0	M	M	
Δ (TMS)	(0.4-1.1 M)	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M

La solution de base de depart est

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.7,\ x_4 = 0,\ x_5 = 6,\ x_6 = 6.$$

Première itération:

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B	R
3	$\boxed{0.3}$	0.1	1	0	0	0	2.7	(2.7)/(0.3)= $\boxed{9}$
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6	6/(0.5)=12
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6	6/(0.6)=10
C	0.4	0.5	0	0	M	M		
Δ (TMS)	$\boxed{\text{(0.4-1.1 M)}}$	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_3
Pivot: 0.3
On divise la ligne du pivot par le pivot 0.3, on obtient (on élimine la ligne correspondant à C)

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B
3	$\boxed{1}$	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6
Δ (TMS)	$\boxed{\text{(0.4-1.1 M)}}$	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M

On élimine x_1 des lignes 2,3 et 4. On obtient le tableau 1 suivant:
Tableau 1

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5
6	0	0.2	-2	-1	0	1	0.6
Δ (TMS)	0	(11/30)-(16/30) M	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 9,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.5,\ x_6 = 0.6$$

qui constituera la solution de base de départ pour atteindre la prochaine solution de base extrême (ou prochain sommet).
Deuxième itération:

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B	R
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9	27
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5	4.5
6	0	$\boxed{0.2}$	-2	-1	0	1	0.6	$\boxed{3}$
Δ (TMS)	0	$\boxed{\text{(11/30)-(16/30) M}}$	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_6
Pivot: 0.2

On divise la ligne du pivot par le pivot 1/3. On obtient

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5
6	0	$\boxed{1}$	-10	-5	0	5	3
Δ (TMS)	0	$\boxed{\text{(11/30)-(16/30) M}}$	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6

On élimine x_2 des lignes 1, 2 et 4. On obtient

B \ HB	·	·	3	4	·	6	B
1	1	0	20/3	5/3	0	(-5)/3	8
5	0	0	5/3	5/3	1	(-5)/3	0.5
2	0	1	-10	-5	0	5	3
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	-(5/3)M+(11/6)	0	(8/3)M-(11/6)	-0.5M-4.7

La variable artificielle x_6 est maintenant hors-base et comme on a choisi M très grand alors elle ne passera plus jamais dans la base. Par suite on peut supprimer la colonne correspondant à cette variable. Le tableau précédent devient le tableau 2 de départ pour la troisième itération:
Tableau 2

B \ HB	·	·	3	4	·	B
1	1	0	20/3	5/3	0	8
5	0	0	5/3	5/3	1	0.5
2	0	1	-10	-5	0	3
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	-(5/3)M+(11/6)	0	-0.5M-4.7

La deuxième itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 8,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.5$$

Troisième itération:

B \ HB	·	·	3	4	·	B	R
1	1	0	20/3	5/3	0	8	4.8
5	0	0	5/3	$\boxed{5/3}$	1	0.5	$\boxed{0.3}$
2	0	1	-10	-5	0	3	-0.6
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	$\boxed{-(5/3)M+(11/6)}$	0	-0.5M-4.7	

Variable entrante: x_4
Variable sortante: x_5
Pivot: 5/3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 5/3. On obtient

B \ HB	·	·	3	·	5	B
1	1	0	5	0	-1	7.5
4	0	0	1	1	3/5	0.3
2	0	1	-5	0	3	4.5
Δ (TMS)	0	0	0.5	0	M-1.1	-5.25

Comme M est choisi très grand, alors tous les coefficients sur la ligne Δ sont positifs. Par conséquent, on arrête les itérations et donc on a atteint la solution optimale. Elle correspond à

$$x_1^* = 7.5 \quad \text{et } x_2^* = 4.5$$

La valeur minimale de z est $z^* = 5.25$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

Le programme linéaire considéré dans cet exercice est le suivant:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme canonique}$$

En introduisant les variables d'écarts, le programme standard (I') est comme suite

$$\text{(I')} \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 6 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

D'après le même argument que celui dans l'exercice précedent, on sera ammener à introduire des variables artificielles x_6 et x_7 pour pouvoir déterminer une solution de base de départ. Ces variables seront affectées d'un coefficient M dans la fonction économique avec M très grand. On considère alors le progamme (II') suivant

$$\text{(II')} \quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7] \\ \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0, \; x_6 \geq 0, \; x_7 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tableau initial (0):

Le calcul des taux marginaux de substitution (TMS) se fait comme dans l'exercice précedent (voir aussi votre cours).

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B
6	1	4	2	-1	0	1	0	8
7	3	2	0	0	-1	0	1	6
C	2	3	1	0	0	M	M	
Δ (TMS)	(2-4M)	(3-6M)	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M

La solution de base de depart est

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_4 = 0, \; x_5 = 0, \; x_6 = 8, \; x_7 = 6.$$

Première itération:

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B	R
6	1	$\boxed{4}$	2	-1	0	1	0	8	$\boxed{8/4=2}$
7	3	2	0	0	-1	0	1	6	6/2=3
C	2	3	1	0	0	M	M		
Δ (TMS)	(2-4M)	$\boxed{(3\text{-}6M)}$	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M	

Variable entrante: x_2

Variable sortante: x_6

Pivot: 4

On divise la ligne du pivot par le pivot 4 et on élimine la colonne R et la ligne C. On obtient

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B
6	1/4	$\boxed{1}$	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
7	3	2	0	0	-1	0	1	6
Δ (TMS)	(2-4M)	$\boxed{(3-6M)}$	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M

On élimine ensuite x_1 des lignes 2 et 3.

B \ HB	1	·	3	4	5	6	·	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
7	5/2	0	-1	1/2	-1	-1/2	1	2
Δ (TMS)	(5/4)-(5/2)M	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	(3/2)M-(3/4)	0	-6- 2M

La variable artificielle x_6 est maintenant hors-base et comme on a choisi M très grand alors elle ne passera plus jamais dans la base. Par suite on peut supprimer la colonne correspondant à cette variable. Le tableau précédent devient le tableau 1 de départ pour la deuxième itération:
Tableau 1:

B \ HB	1	·	3	4	5	·	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2
7	5/2	0	-1	1/2	-1	1	2
Δ (TMS)	(5/4)-(5/2)M	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_7 = 2$$

Deuxième itération:

B \ HB	1	·	3	4	5	·	B	R
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2	8
7	$\boxed{5/2}$	0	-1	1/2	-1	1	2	$\boxed{4/5=0.8}$
Δ (TMS)	$\boxed{(5/4)-(5/2)M}$	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_7
Pivot: 5/2
On divise la ligne du pivot par le pivot 5/2 et on élimine la colonne R. On obtient

B \ HB	·	·	3	4	5	7	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2
1	1	0	-2/5	1/5	-2/5	2/5	4/5
Δ (TMS)	$\boxed{(5/4)-(5/2)M}$	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M

Par la suite, on élimine x_1 des équations 1 et 3.

B \ HB	·	·	3	4	5	7	B
2	0	1	3/5	-3/10	1/10	-1/10	9/5
1	1	0	-2/5	1/5	-2/5	2/5	4/5
Δ (TMS)	0	0	0	1/2	1/2	M-(1/2)	-7

On constate alors que tous les coefficients sur la ligne Δ sont positif, par suite on arrète les itérations et donc on a atteint la solution optimale:

$$x_1^* = 4/5,\ x_2^* = 9/5,\ x_3^* = 0$$

La valeur minimale de z est $z^* = 7$.