

Filière Sciences économiques et gestion
2010 - 2011
Semestre 3

Module Méthodes quantitatives IV
Algèbre II

Solution des exercices

Prof. Dr. Hossain O. Yakhlef

05 Mai 2011

Exercice 1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. A n'est pas un espace vectoriel car $(0.2, 0.7) \in A$ et $(0.2, 0.6) \in A$ mais $(0.2, 0.7) + (0.2, 0.6) = (0.4, 1.3) \notin A$.

Exercice 2. Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a2 & 0 \\ 0 & b+b2 \end{pmatrix} \in B$.
2. $k \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k*a & 0 \\ 0 & k*b \end{pmatrix} \in B$ on peut vérifier facilement 3) 4) et 5).
- 3.
- 4.
- 5.
6. $\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & b3 \end{pmatrix} \right)$.
7. $(a * b) \cdot \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} = a \cdot \left(b \cdot \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} \right)$.
8. $\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & b1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & b2 \end{pmatrix}$
9. $(x + y) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
10. 1. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Exercice 3. $P = \{1 + ax + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel car

$1 + x + x^2 \in P$ et $1 + 2x + x^2 \in P$ mais $(1 + x + x^2) + (1 + 2x + x^2) = 2 + 3x + 2x^2 \notin P$.

Exercice 4. $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base.

Exercice 5.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}, a + e + i = 0 \right\}$$

est un espace vectoriel car

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ d1 & e1 & f1 \\ g1 & h1 & i1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a1 & b+b1 & c+c1 \\ d+d1 & e+e1 & f+f1 \\ g+g1 & h+h1 & i+i1 \end{pmatrix} \in A$ puisque $a+a1+e+e1+i+i1 = (a+e+i) + (a1+e1+i1) = 0+0 = 0$.
- $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha*a & \alpha*b & \alpha*c \\ \alpha*d & \alpha*e & \alpha*f \\ \alpha*g & \alpha*h & \alpha*i \end{pmatrix} \in A$ car $\alpha*a + \alpha*e + \alpha*i = \alpha*(a+e+i) = 0$.

Exercice 6. Non, ce n'est pas un espace vectoriel car $\det \left(7 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 7*1 \neq 1$.

Exercice 7.

- S est un e.v.
- U n'est pas un e.v.
- T est un e.v.

Exercice 8.

- a) Le plan des vecteurs avec première composante nulle ($b_1 = 0$) est un e.v.
b) Le plan des vecteurs avec seconde composante nulle ($b_2 = 0$) est un e.v.
c) !!!
d) Le vecteur $b = (0, 0, 0)$ est un e.v.
e) Les vecteurs $b = (b_1, b_2, b_3)$ avec $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ est un e.v.

Exercice 9. $a(1, 1, 2) + b(1, 2, 1) + c(3, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$. ces vecteurs suivants sont linéairement indépendants.

Exercice 10. $\det(T) = a.e.i = 0$ lorsque n'importe quel element de la diagonale de T est nul. on peut aussi le démontrer en terme d'indépendance linéaire.

Exercice 11.

Exercice 12.

- L'espace de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont la somme de ses composantes est zero:
 $= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\} = \{(-y - z - t, y, z, t)\}.$
 $(-y - z - t, y, z, t) = (-y, y, 0, 0) + (-z, 0, z, 0) + (-t, 0, 0, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1).$
 $\dim=3.$

Exercice 13. $\alpha_1\{(2, 1, 4, 4) + \alpha_2(-1, 3, -4, 3) + \alpha_3(4, 2, -3, 3) + \alpha_4(6, 4, 2, 4) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ 4\alpha_1 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 4\alpha_3 = \alpha_4 = 0. \text{ Donc ils sont lineairement indépendants.}$$

$B = \{(2, 1, 4, 4), (-1, 3, -4, 3), (4, 2, -3, 3), (6, 4, 2, 4)\}$ est une base. $\dim = 4$.

Exercice 14.

1. $E \oplus F = \{(x, x, x)\} \oplus \{(0, 0, t)\} = \{(x, x, t)\}$
2. $E \oplus F = \{(0, 0, t)\} \oplus \{(x, x, t')\} = \{(x, x, t'')\}$

Exercice 15. On vérifie facilement que E est una sous espace vectoriel. Puisque

$$\begin{pmatrix} 3a+2b & a \\ b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ b & -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

on a $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de E .

$$A = a \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ implique que } \begin{cases} 3a+2b = 4 \\ a = 2 \\ b = -1 \\ a-b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ et } b = -1.$$

Exercice 16. Les vecteurs de B_1 sont lineairement indépendants:

$$\alpha(1+x+2x^2) + \beta(3-x) + \gamma(2x+x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$$x = \alpha(1+x+2x^2) + \beta(3-x) + \gamma(2x+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma - 1 &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (-3/8, 1/8, 3/4).$$

$$x^2 = \alpha(1+x+2x^2) + \beta(3-x) + \gamma(2x+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \gamma - 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (3/4, -1/4, -1/2).$$

x^3 n'appartient pas à l'espace engendré par B_1 .

Exercice 17. $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \dots$

Exercice 18. On considère le sous espace vectoriel V de $M_3(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques de trace nulle.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} / a+b+c=0 \right\}.$$

$$A \in V \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -b-c & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de V est

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 19.

Exercice 20. Soient $A = \{a + bx^2 + cx^4\}$ et $B = \{a + bx + cx^3 + dx^5\}$.

$$(a + bx^2 + cx^4) + (a + bx + cx^3 + dx^5) = (a + a) + (b + b)x + (c + c)x^2 + (c + c)x^3 + (c + c)x^4 \in A.$$

$$\alpha * (a + bx^2 + cx^4) = ((\alpha * a) + (\alpha * b)x^2 + (\alpha * c)x^4) \in A.$$

$\{1, x^2, x^4\}$ est une base de A .

$\{1, x, x^3, x^5\}$ est une base de B .

Exercice 21. $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$ c.a.d. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

1. $M_2(\mathbb{R}) = S_2(\mathbb{R}) \oplus A_2(\mathbb{R}).$

2. non.

3. non.

4. non.

Exercice 1.
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2x - 3(1) + 0(0) = 3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \\ y = 1 \\ -5z = 0 \rightarrow z = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.

- $\emptyset$.
- $\{(w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$.
- $(1/2, 1/2, 1/2)$.

Exercice 3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & a & 5 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & a & 5 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -30 + 3a & -6c + a \end{pmatrix}.$$

- Si $(-30 + 3a) \neq 0$ ($a \neq 10$), alors $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(Ab) = 3 \Rightarrow$ Système compatible déterminé.
- Si $a = 10$.
 - Si $(-6c + a) \neq 0$ ($c \neq \frac{5}{2}$) alors $\text{Rang}(A) = 2, \text{Rang}(Ab) = 3 \Rightarrow$ Système incompatible.
 - Si $c = \frac{5}{2}$ alors $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(Ab) < 3 \Rightarrow$ Système indéterminé.

Exercice 4. on a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & a+1 & b+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & a-4 & b-3 \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 4 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(Ab) = 3 \Rightarrow$ système compatible déterminé.
- Si $a = 4$
 - Si $b \neq 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \text{rg}(Ab) = 3 \Rightarrow$ système incompatible.
 - Si $b = 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2, \text{rg}(Ab) = 2 < 3 \Rightarrow$ système compatible indéterminé.

Exercice 5. ERREURE

Exercice 6. Soient x, y et z les quantités que possède les joueurs J_x, J_y et J_z au début du jeu.

J_x a perdu le premier match:

$$\begin{aligned} x_1 &\leftarrow x - y - z \\ y_1 &\leftarrow 2y \\ z_1 &\leftarrow 2z \end{aligned}$$

J_y a perdu le deuxième match:

$$\begin{aligned} x_2 &\leftarrow 2(x - y - z) \\ y_2 &\leftarrow 2y - (x - y - z + 2z) = -x + 3y - z \\ z_2 &\leftarrow 2(2z) \end{aligned}$$

J_z a perdu le troisième match:

$$\begin{aligned} x_3 &\leftarrow 4(x - y - z) \\ y_3 &\leftarrow 2(-x + 3y - z) \\ z_3 &\leftarrow 4z - (2(x - y - z) + (-x + 3y - z)) = -x - y + 7z \end{aligned}$$

Maintenant on résoudre le système
$$\begin{cases} 4(x - y - z) &= c \\ 2(-x + 3y - z) &= c \\ -x - y + 7z &= c \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (\frac{13}{8}c, \frac{7}{8}c, \frac{1}{2}c).$$

Exercice 7.

1. Les prix d'équilibre sont:

$$\begin{cases} 10 - x + 3y - z &= 12 + x \\ 6 + x - 3y + 3z &= 4 + 3y \\ 10 + 3x + 3y - z &= 12 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y - z &= 2 \\ x - 6y + 3z &= -2 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 3, 5).$$

2. Les quantités d'équilibre sont

$$\begin{aligned} Q_{dA} &= 10 - 1 + 3(3) - 5 = 13 \quad \dots \\ Q_{oA} &= 12 + 1 = 13 \quad \dots \end{aligned}$$

Exercice 8.

$$1. \begin{cases} (A) & 200.000b_1 + 100.000(b_2 + b_3) &= 60.000 \\ (B) & 50.000(b_1 + b_2 + b_3) &= 20.000 \\ (C) & 100.000b_1 + 60.000(b_2 + b_3) &= 40.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20b_1 + 10(b_2 + b_3) &= 6 \\ 5(b_1 + b_2 + b_3) &= 2 \\ 10b_1 + 6(b_2 + b_3) &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = \phi.$$

$$2. \begin{cases} (A) & 200.000b_1 + 100.000(b_2 + b_3) &= 60.000 \\ (B) & 50.000(b_1 + b_2 + b_3) &= 20.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20b_1 + 10(b_2 + b_3) &= 6 \\ 5(b_1 + b_2 + b_3) &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(\frac{1}{5}, \frac{1}{5} - t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$$3. \begin{cases} (A) & 200.000b_1 + 100.000(b_2 + b_3) &= 60.000 \\ (B) & 50.000(b_1 + b_2 + b_3) &= 20.000 \\ (C) & 100.000b_1 + 60.000(b_2 + b_3) &= c * 10.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20b_1 + 10(b_2 + b_3) &= 6 \\ 5(b_1 + b_2 + b_3) &= 2 \\ 10b_1 + 6(b_2 + b_3) &= c \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 2 \\ 10 & 6 & 6 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2c + 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10c - 32 \end{pmatrix}.$$

Le système est compatible si et seulement si $c = 3.2$.

Ainsi, le bénéfice réel de l'investisseur (C) est 32.000 dhs.

Exercice 9.

1. Soient

x : le nombre d'unités du produit A
 y : le nombre d'unités du produit B
 z : le nombre d'unités du produit C.

on a:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z &= 850 \\ x + 2y + 4z &= 1200 \\ 2x + y + z &= 550 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (100, 150, 200).$$

$$2. \begin{cases} 3x + y + 2z &= 1200 \\ x + 2y + 4z &= 900 \\ 2x + y + z &= 1100 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (300, 700, -200).$$

Donc, on ne peut pas utiliser tout le temps disponible des machines.

Exercice 10.

Exercice 1. On considère le cas particulier $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A.B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. Démontrons ceci dans le cas générale.

Soit $A = [a_{i,j}]_{i=1,n, j=1,n}$ une matrice triangulaire supérieure, Ceci veut dire que la structure de la matrice A est définie par $(a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j)$.

Soit C le produit de deux matrices $n \times n$ triangulaire supérieure. Montrons que $(c_{i,j} = 0 \text{ si } i > j)$.

Pour $i > j$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 * b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} * 0 = 0.$$

Ainsi la matrice C est bien triangulaire supérieure.

Exercice 2. $(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$. Donc cette matrice est symétrique.

Exercice 3. Démontrons que $A.B$ est symétrique $\Leftrightarrow A$ et B commutent.

$$(\Rightarrow) A.B = (A.B)^T = B^T.A^T = B.A$$

$$(\Leftarrow) (A.B)^T = B^T.A^T = B.A = A.B$$

Exercice 4. $(B^T.A.B)^T = -B^T.A.B??$

$$(B^T.A.B)^T = B^T.A^T.B = -B^T.A.B.$$

Exercice 5. $A^{-1}(AB^{-1} + A)B - (B(AB)^{-1}A)^{-1} = I + B - (BB^{-1}A^{-1}A)^{-1} = B$.

Exercice 6.

Exercice 7.

1. A est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow AA^T = A^T A = I$.

$$1 = \det(AA^T) = \det(A) * \det(A^T) = \det(A) * \det(A) = \det(A)^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 12 \neq \pm 1$. Donc A n'est pas orthogonale.

Exercice 8.

Exercice 9. $B^2 = (I - A).(I - A) = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A = B$.

$$AB = A(I - A) = A - A^2 = (I - A).A = BA.$$

Exercice 10. $I - A$ admet une inverse $I + \lambda A \Leftrightarrow (I - A).(I + \lambda A) = I$.

$$(I - A).(I + \lambda A) = I + \lambda A - A - \lambda A^2 = I + \lambda A - A - n\lambda A = I + (\lambda - 1 - n\lambda)A$$

$$(I - A).(I + \lambda A) = I \Leftrightarrow (\lambda - 1 - n\lambda)A = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1 - n\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-n}.$$

Exercice 11.

$$1. \det(A) = a_1 * a_2 * \dots * a_n.$$

$$2. \det(B) = n * 1 * 2 * \dots * (n - 1) = n!.$$

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15. Cherchons les coordonnées de $(0, 1)$ dans la base $B = \{(2, -1), (4, 1)\}$.

$$(0, 1) = x(2, -1) + y(4, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$(1, 0) = x(2, -1) + y(4, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

$$f(0, 1) = -\frac{2}{3}f(2, -1) + \frac{1}{3}f(4, 1) = \left(0, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

$$f(1, 0) = \frac{1}{6}f(2, -1) + \frac{1}{6}f(4, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 1.

1. f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0$.

$$X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(X) = f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = 3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+a \\ 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+a \\ 0 & -5 & -3-4a \\ 0 & 0 & -2-4a \end{pmatrix}. \quad \text{Rang}(A) = 3 \Leftrightarrow a \neq -1/2.$$

Ainsi, f est injective si et seulement si $a \neq -1/2$.

2. $\text{Im}(f) = \{y = f(x) : x \in \mathbb{R}^3\}.$

$$y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 1+a \end{pmatrix}.$$

• Si f est injective ($a \neq -1/2$): $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ -2a \\ 1+a \end{pmatrix} \right\}$ est une base.

• Si f n'est pas injective, $\text{Rang}(A) = 2$ et $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ est une base.

Exercice 2.

1. $f(u_1) = f(u_1 + u_2) - f(u_2) = (2, -2, 1) - (-2, 2, -1) = (4, -4, 2).$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. on a:

- $u_1 + u_2 = (3, 0) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{3}(u_1 + u_2).$
- $2u_1 - u_2 = (2, -2) - (2, 1) = (0, -3) \Rightarrow e_2 = -\frac{1}{3}(2u_1 - u_2).$
- $f(e_1) = \frac{1}{3}f(u_1 + u_2) = (2/3, -2/3, 1/3).$
- $f(e_2) = -\frac{1}{3}f(2u_1 - u_2) = -\frac{2}{3}f(u_1) + \frac{1}{3}f(u_2) = -\frac{2}{3}(4, -4, 2) + \frac{1}{3}(-2, 2, -1) = (\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}).$

Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

3. $X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 5y \Leftrightarrow (x, y) = (5t, t) = t(5, 1)$

$$\text{Ker}(f) = \langle (5, 1) \rangle.$$

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 2 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 1.$$

$$\text{Im}(f) = \langle (2, -2, 1) \rangle.$$

Exercice 3. Non.

Exercice 4. Soit $P_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à trois.

1. $\alpha + \beta x + \gamma(x^2 - x) + \delta(x^3 - 3x^2 + 2x) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
2.
 - $f(p(x) + q(x)) = f((p+q)(x)) = (p+q)(x+1) + (p+q)(x) = p(x+1) + q(x+1) - p(x) - q(x) = f(p(x)) + f(q(x))$
 - $f(\alpha p(x)) = \alpha f(p(x))$.
 - $p \in \text{Ker} f(f) \Leftrightarrow f(p(x)) = p(x+1) - p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x+1) = p(x)$.

Exercice 5.
$$\begin{pmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.5 & -0.3 \\ -0.3 & 0.6 & -0.4 \\ -0.1 & -0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix}.$$

$\text{Det}(A) = -0.036 \neq 0 \Rightarrow \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}.$

$\dim \text{Im}(f) = 3 \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3.$

Exercice 6.

1. $f: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \\ x = (w, i, t) & \mapsto p = (p_a, p_b, p_c) \end{matrix}$

- $f(1, 0, 0) = (2, \frac{3}{2}, 2)$
- $f(0, 1, 0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$
- $f(0, 0, 1) = (1, 1, \frac{3}{2})$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$f: \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = (w, i, t) & \mapsto f(x) = (2w + \frac{3}{2}i + t, \frac{3}{2}w + \frac{3}{2}i + t, 2w + i + \frac{3}{2}t) \end{matrix}$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ i \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0).$

Ainsi on ne peut pas maintenir les prix des trois secteurs d'une année à une autre, sans qu'ils se maintiennent à la fois, les salaires, les prix d'importation et la pression fiscale.

Exercice 7.

1. $f(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(u_2).$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $A.B = B.A = A$

3. $X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z.$

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Une base de $\text{Ker}(f)$ est $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$

4. $\text{Ker}(f) \neq \{0\} \Rightarrow f$ n'est pas injective.

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = 3 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 1 \neq 3, \text{ donc } f \text{ n'est pas surjective.}$$

Exercice 8. on a:

- $E = E_1 \oplus E_2$
- $\text{Ker}(f) = E_1$.

Démontrons que $f(E) = f(E_2)$.

($\subseteq$) Soit $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) \Rightarrow f(x) \in f(E_2).$$

($\supseteq$) Soit $x_2 \in E_2 \Rightarrow f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) = f(x)$ avec $x \in E \Rightarrow f(E_2) \subseteq f(E)$.

Exercice 9.

Exercice 10.

- $f(u_1) = u_1 + u_2$.
 - $f(u_1) + f(u_2) = u_1 + 2u_2 + u_2$.
 - $f(u_2) = (u_1 + 2u_2 + u_2) - (u_1 + u_2) = u_2 + u_3$. $f(u_3) = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow (x, y, z) = z(0, 0, 1). \quad \text{Ker}(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

- Soit $v = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$. $f(v) = v \Leftrightarrow Av = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) =$

$$\beta(0, 1, 1).$$

$$\text{Ainsi } S = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

$$3. A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

- Soit A la matrice associée à f dans la base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Si A est non régulière, alors $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) < n \Rightarrow \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)\}$ sont linéairement dépendants. Absurde.
- A est régulière donc $\text{rang}(A) = n$ et par suite $\dim \text{Ker} f = 0$ c.a.d $\text{Ker}(f) = \{0\}$, et par conséquence f est injective. Elle est aussi surjective.